

一类考虑未就诊患者带分布时滞的 SIS 模型分析

齐龙兴,程光一,包云婷

(安徽大学 数学科学学院,合肥 230061)

摘要: 传染性疾病一直对人类产生重要的危害.人体感染某些疾病后不会立即发病,部分染病的患者在初期时症状轻微,而未去医院就诊,并且此类病人经过一段时间后才具有传染性.为研究这些易被忽略的因素对传染病传播的影响,建立具有分布时滞并考虑未就诊患者 SIS 模型,计算出基本再生数 R_0 ,分析了无病平衡点和地方病平衡点的存在性和稳定性.通过 Lyapunov 函数证明,得到当 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点全局渐近稳定,地方病平衡点不稳定;在给定阈值 R_c 的基础上,当 $R_0 > R_c$ 时,疾病持久,并且在特定条件下,地方病平衡点局部稳定.另外,对离散化的时滞模型进行数值模拟,结果显示传染性潜伏时间越短,未就诊病人数的峰值越大;反之,未就诊病人数的峰值越小.

关键词: 传染性疾病;分布时滞;未就诊患者;基本再生数

中图分类号: O175.13

文献标志码: A

2020 年全球暴发了新冠疫情,引起了人们对疾病传播情况的重视,已有大量学者对新冠肺炎进行了研究^[1-2].除新冠肺炎外,对人类生命造成威胁的还有 SARS,疟疾, AIDS, H7N9 等传染性较强的流行病^[3-4].一些流行病在发病初期的症状类似于普通流感,未引起人类重视,并不去医院就诊,直到症状出现严重不适时才去医院就诊,而此阶段已出现传染性^[5].除此之外,当易感者被传染后,要经历一段时间才产生传染性,传染病的时滞一般在 2~14 天,如霍乱在 2 天左右,新冠病毒的时滞在 14 天内^[7-8].这些都说明疾病的感染会出现滞后性,并且在疾病传染期间是连续的^[6],因此分布时滞更能反映其滞后性.

当前,已有很多学者在研究流行病时采用分布时滞^[1,7-13],严阅等^[1]针对新冠肺炎疫情建立了具有分布时滞的 IJGR 模型,采用数值分析方法对所建分布时滞模型进行模拟,预测疫情传播趋势.ZHANG 等^[9]考虑了具有分布时滞的非自治疟疾传播模型,对其持久性、灭绝性以及全局渐近稳定性进行了理论分析,最后进行数值模拟分析理论结果.ZOU 等^[10]考虑了具有分布时滞和脉冲控制策略的生态流行病模型,对系统进行了理论分析,并通过数值模拟发现理论结果中的周期解是由脉冲效应和时间延迟引起的.YIN 等^[11]使用重合度理论的连续定理,得到具有反馈调节和分布时滞的单物种模型正周期解存在性的判据.ZHANG 等^[15]在 Edoardo Beretta 的具有分布时滞的 SIR 模型^[12-14]上,考虑了具有分布时滞的 SIRS 模型,主要进行理论分析,得到基本再生数 R_0 ,并且当 $R_0 > 1$ 时,疾病持久.通过 Lyapunov 函数得到无病平衡点的稳定性以及地方病平衡点局部稳定的充分条件.但是他们都没有考虑未就诊患者以及未就诊患者在疾病传播中的时滞性.

在疾病传播中,还有学者考虑多种类型的感染人群,例如 CAI 等^[16]考虑了包含有症状感染者与无症状感染者的模型,建立了艾滋病传染病模型,对其进行理论分析,其对应的离散时滞模型出现了霍普夫分支.文献^[17]针对新冠肺炎也考虑了无症状感染者对疾病传播的影响,得到了解无症状传播的时间过程对于评估这种传播途径的重要性的疾病动力学非常重要.但是未就诊患者代表已经患病但未去医院就诊的人群,此类人群中有人因为无明显症状不知患病的,也有症状轻微不愿去医院就诊的.因此,未就诊患者人群不仅包括无症

收稿日期:2021-06-16;修回日期:2021-10-21.

基金项目:国家自然科学基金(11401002);安徽省自然科学基金(2008085MA02);安徽省质量工程重点项目(2020jyxm0103).

作者简介(通信作者):齐龙兴(1979-),女,安徽桐城人,安徽大学教授,博士,博士生导师,研究方向为生物数学,E-mail:qilx@ahu.edu.cn.

状感染者,也包括有症状感染者.值得注意的是,很多疾病的未就诊患者与就诊患者均有传染性,然而未就诊人群在总人群中的具体数量^[5]是无法准确得知的.因此,未就诊患者的传染性经常容易被忽略,其发病的滞后性更容易被忽略.所以,考虑未就诊患者的传染性及其发病的滞后性对疾病传播的影响至关重要.BAO等^[18]考虑了未就诊人群在呼吸道系统传播疾病的影响,建立含未就诊人群的 SIS 模型,并结合合肥市呼吸道系统就诊数据进行数值模拟,得到增强免疫力,就可使就诊病人下降,最终总病人数下降.之前工作未考虑未就诊病人的滞后性,因此本文主要考虑未就诊患者对易感者的传染,并加入分布时滞,建立含分布时滞的 SIS 模型.

1 模型建立与平衡点存在性

1.1 模型

通过考虑传染性疾病的未就诊人群以及疾病的分布时滞,建立如下含分布时滞的 SIS 模型:

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda + \delta I_a(t) + \sigma I_s(t) + \beta S(t) \int_0^h f(\tau) [I_a(t-\tau) + I_s(t-\tau)] d\tau - \mu S(t), \\ I'_a(t) = \beta S(t) \int_0^h f(\tau) [I_a(t-\tau) + I_s(t-\tau)] d\tau - (\mu + \delta + \gamma) I_a(t), \\ I'_s(t) = \gamma I_a(t) - (\alpha + \mu + \sigma) I_s(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中, $S(t)$ 为 t 时刻的易感者, $I_a(t)$ 为 t 时刻的未就诊患者, $I_s(t)$ 为 t 时刻的就诊患者, δ 为未就诊患者的自愈率, σ 为就诊患者的治愈率, β 为易感者与患者的接触感染率, γ 为未就诊患者去医院的就诊率, 也即未就诊患者向就诊患者的转移率, μ 为自然死亡率, α 为因病死亡率, 以上参数均为正常数. 总人口数 $N(t)$ 满足 $N'(t) = \Lambda - \mu N(t) - \alpha I_s(t)$. 非负常数 h 是时滞, 其中 $f(\tau)$ 是 $[0, h] \rightarrow (-\infty, +\infty)$ 上的有界非递减函数, 且满足 $\int_0^h f(\tau) d\tau = 1 > 0$.

系统(1)的初始条件为 $S(\theta) = \varphi_1(\theta)$, $I_a(\theta) = \varphi_2(\theta)$, $I_s(\theta) = \varphi_3(\theta)$, $-h \leq \theta \leq 0$. 其中 $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T \in C$. 对于所有 $-h \leq \theta \leq 0$, 都有 $\varphi_i(\theta) \geq 0$ ($i=1, 2, 3$), C 为 Banach 空间上由区间 $[-h, 0]$ 映射到 \mathbf{R}^3 的连续函数 $C([-h, 0], \mathbf{R}^3)$, 并且在 C 上每一个元素 φ 的范数满足 $\|\varphi\| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} \{|\varphi_1(\theta)|, |\varphi_2(\theta)|, |\varphi_3(\theta)|\}$. 根据生物意义, 下面一直认为 $\varphi_i(\theta) \geq 0$ ($i=1, 2, 3$).

1.2 平衡点的存在性

为计算系统(1)的平衡点, 令方程右端为 0, 容易得到无病平衡点 $E^0 = (S^0, I_a^0, I_s^0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right)$. 同时, 可以得到关于 $I_s(t)$ 的方程如下:

$$\left[\delta \frac{\alpha + \mu + \sigma}{\gamma} + \sigma - \frac{(\mu + \delta + \gamma)(\alpha + \mu + \sigma)}{\gamma} \right] I_s = \mu \frac{(\mu + \delta + \gamma)(\alpha + \mu + \sigma)}{\beta(\alpha + \mu + \sigma + \gamma)} - \Lambda.$$

令 $A = \delta \frac{\alpha + \mu + \sigma}{\gamma} + \sigma - \frac{(\mu + \delta + \gamma)(\alpha + \mu + \sigma)}{\gamma}$, 则

$$A = \frac{\delta(\alpha + \mu + \sigma) + \sigma\gamma - \delta(\alpha + \mu + \sigma) - (\mu + \gamma)(\alpha + \mu + \sigma)}{\gamma} = \frac{-\mu(\alpha + \mu + \sigma) - (\alpha + \mu)\gamma}{\gamma} < 0.$$

令 $R_0 = \beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{\alpha + \mu + \sigma + \gamma}{\mu(\mu + \delta + \gamma)(\alpha + \mu + \sigma)}$, 则当 $R_0 > 1$ 时, 存在唯一的地方病平衡点 $E^* = (S^*, I_a^*, I_s^*)$, 其

$$\text{中, } S^* = \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{R_0}, I_a^* = \frac{\alpha + \mu + \sigma}{\gamma} I_s^*, I_s^* = \frac{\gamma\Lambda(1 - R_0)}{R_0(-\mu(\alpha + \mu + \sigma) - (\alpha + \mu)\gamma)}.$$

根据生物意义知 R_0 为系统的基本再生数,

$$R_0 = \beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{\mu + \delta + \gamma} + \beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{\alpha + \mu + \sigma} \gamma \frac{1}{\mu + \delta + \gamma} = R_{0a} + R_{0s},$$

其中 R_{0a} 表示每个未就诊人群感染期间新产生的病人数, R_{0s} 表示每个未就诊人群就诊后在其感染期间新产生的病人数. 因此 R_0 表示患者人群在其感染期间新产生的第 2 代总病人数.

2 持久性

在系统(1)中, $I_a(t)$ 和 $I_s(t)$ 均表示患者,在此令 $I(t) = I_a(t) + I_s(t)$, 则系统(1)化为

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda + \delta I_a(t) + \sigma I_s(t) - \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - \mu S(t), \\ I'(t) = \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - (\mu + \delta) I_a(t) - (\alpha + \mu + \sigma) I_s(t). \end{cases} \quad (2)$$

定理 1 对任意的 $t \geq 0, S(t) > 0, I(t) > 0$, 并且 $\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, 其中 $N(t) = S(t) + I(t)$.

证明 由于系统(2)在不变集上是连续的且在 C 上是局部 Lipschitz 的, 其初始状态下的解在 $[0, b)$ ($0 \leq b \leq +\infty$) 上存在且唯一. 断言对 $\forall t \in [0, b), S(t) > 0$. 为证明断言正确, 考虑其否定情况, 即存在一个 $t_1 \in [0, b)$, 使得 $S(t_1) = 0$ 以及 $S'(t_1) \leq 0$, 当 $t \in [0, t_1), S(t) > 0$. 下证在 $t \in [0, t_1)$ 时, 必有 $I(t) > 0$, 否则存在一个 $t_2 \in (0, t_1)$, 使得 $I(t_2) = 0$, 当 $t \in [0, t_2), I(t) > 0$.

由系统(2)第 2 个式子得到

$$\begin{aligned} I'(t) &= \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - (\mu + \delta) I_a(t) - (\alpha + \mu + \sigma) I_s(t) \geq \\ &\beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) d\tau - (\mu + \delta + \alpha + \sigma) I(t). \end{aligned}$$

将其在 $[0, t_2)$ 上积分后, 有

$$I(t_2) \geq I(t) e^{-(\mu+\delta+\alpha+\sigma)t_2} + \beta \int_0^{t_2} S(u) \int_0^h f(\tau) I(t-\tau) e^{(\mu+\delta+\alpha+\sigma)(u-t_2)} d\tau du > 0,$$

与 $I(t_2) = 0$ 矛盾. 因此在 $t \in [0, t_1)$ 上, $I(t) > 0$.

下面证明 $\forall t \in [0, b), S(t) > 0$ 的否定情况不成立. 由系统(2)第 1 个式子得到

$$S'(t_1) \geq \Lambda + \sigma I_a(t_1) + \sigma I_s(t_1) \geq \Lambda + k I(t_1) > 0,$$

其中 $k = \min\{\delta, \sigma\}$, 与 $S'(t_1) \leq 0$ 矛盾. 因此 $S(t) > 0$ 在 $[0, b)$ ($0 \leq b \leq +\infty$) 上成立.

通过以上证明, 对 $\forall t \in [0, b)$, 有 $S(t) > 0$ 并且 $I(t) > 0$. 因此对于 $\forall t \in [0, b), N'(t) \leq \Lambda - \mu N(t)$,

积分后, 得 $N(t) \leq N(0) e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \leq N(0) + \frac{\Lambda}{\mu}$. 令 $b \rightarrow +\infty$, 有 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} N(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$.

定理 2 系统(2)的解满足 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq \frac{\mu \Lambda}{\beta \Lambda + \mu^2} = \nu_1 > 0$.

证明 由命题 1 可知, 对任意小的 $\epsilon > 0$, 有足够大的 $t_1 > 0$, 使得 $t > t_1$ 时, $I(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} + \epsilon$. 因此当 $t >$

$t_1 + h$ 时, $S'(t) \geq \Lambda - \beta \left(\frac{\Lambda}{\mu} + \epsilon \right) S(t) - \mu S(t) = \Lambda - \left[\beta \left(\frac{\Lambda}{\mu} + \epsilon \right) + \mu \right] S(t)$, 这里蕴含

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq \frac{\Lambda}{\beta \left(\frac{\Lambda}{\mu} + \epsilon \right) + \mu} = \frac{\mu \Lambda}{\beta (\Lambda + \mu \epsilon) + \mu^2}.$$

由于 ϵ 任意小, 则 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} S(t) \geq \frac{\mu \Lambda}{\beta \Lambda + \mu^2}$.

下面证明患者人群 I 的持久性, 为此设 $R_* = \beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{\alpha + \mu + \sigma + \delta}$, 其意义为所有患者在其恢复期内感染

的新病人数. 由于

$$\begin{aligned} R_0 - R_* &= \beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{\alpha + \mu + \sigma + \gamma}{(\alpha + \mu + \sigma)(\mu + \delta + \gamma)} - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{\alpha + \mu + \sigma + \delta} = \\ &\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{(\alpha + \mu + \sigma + \gamma)(\alpha + \mu + \sigma + \delta) - (\alpha + \mu + \sigma)(\mu + \delta + \gamma)}{(\alpha + \mu + \sigma)(\mu + \delta + \gamma)(\alpha + \mu + \sigma + \delta)} = \end{aligned}$$

$$\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{(\alpha + \mu + \sigma)(\mu + \delta + \gamma) + (\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + \sigma) + \gamma\delta - (\alpha + \mu + \sigma)(\mu + \delta + \gamma)}{(\alpha + \mu + \sigma)(\mu + \delta + \gamma)(\alpha + \mu + \sigma + \delta)} =$$

$$\beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + \sigma) + \gamma\delta}{(\alpha + \mu + \sigma)(\mu + \delta + \gamma)(\alpha + \mu + \sigma + \delta)}.$$

显然 $R_0 - R_*$ 恒大于 0, 因此 $R_0 > R_*$ 恒成立.

定理 3 若 $R_* > 1$, 则系统(2)的解满足 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq c_0 e^{-(\alpha + \mu + \sigma + \delta)(h + \rho h)} = \nu_2 > 0$, 其中, $c_0 > 0, \rho > 0$ 均为常数.

证明 若 $R_* = \beta \frac{\Lambda}{\mu} \frac{1}{\alpha + \mu + \sigma + \delta} > 1$, 则存在 $c_0 > 0$ 和 $\rho > 0$ 满足:

$$\beta \frac{\Lambda}{\mu + c_0 \beta} [1 - e^{-(\mu + c_0 \beta)\rho h}] \frac{1}{\alpha + \mu + \sigma + \delta} > 1.$$

令 $S^\Delta = \frac{\Lambda}{\mu + c_0 \beta} [1 - e^{-(\mu + c_0 \beta)\rho h}]$. 现在考虑有界函数

$$V(t) = I(t) + (\alpha + \mu + \sigma + \delta) \int_0^h \int_{t-\tau}^t f(\tau) I(u) du d\tau.$$

$V(t)$ 沿系统(2)的导数为

$$V'(t) = \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t - \tau) d\tau - (\mu + \delta) I_a(t) - (\alpha + \mu + \sigma) I_s(t) + (\alpha + \mu + \sigma + \delta) \int_0^h f(\tau) I(t) d\tau - (\alpha + \mu + \sigma + \delta) \int_0^h f(\tau) I(t - \tau) d\tau \geq \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t - \tau) d\tau - (\alpha + \mu + \sigma + \delta) I(t) + (\alpha + \mu + \sigma + \delta) I(t) - (\alpha + \mu + \sigma + \delta) \int_0^h f(\tau) I(t - \tau) d\tau = [\beta S(t) - (\alpha + \mu + \sigma + \delta)] \int_0^h f(\tau) I(t - \tau) d\tau.$$

现断言在所有的 $t \geq t_1 \geq \rho h$ 上 $I(t) \leq c_0$ 是不可能的. 考虑相反情况, 则当 $t \geq t_1 + h$ 时,

$$S'(t) = \Lambda - \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t - \tau) d\tau - \mu S(t) + \delta I_a(t) + \sigma I_s(t) \geq \Lambda - (c_0 \beta + \mu) S(t).$$

上式在 $[t_1 + h, t]$ 上积分, 得

$$S(t) \geq e^{-(c_0 \beta + \mu)(t - t_1 - h)} S(t_1 + h) + \Lambda e^{-(c_0 \beta + \mu)(t - t_1 - h)} \int_{t_1 + h}^t e^{(c_0 \beta + \mu)(\vartheta - t_1 - h)} d\vartheta =$$

$$e^{-(c_0 \beta + \mu)(t - t_1 - h)} \left[S(t_1 + h) + \Lambda \int_{t_1 + h}^t e^{(c_0 \beta + \mu)(\vartheta - t_1 - h)} d\vartheta \right] \geq \frac{\Lambda}{c_0 \beta + \mu} (1 - e^{-(c_0 \beta + \mu)(t - t_1 - h)}).$$

所以当 $t > t_1 + h + \rho h$ 时,

$$S(t) \geq \frac{\Lambda}{c_0 \beta + \mu} (1 - e^{-(c_0 \beta + \mu)\rho h}) = S^\Delta. \quad (3)$$

通过以上不等式可得, 当 $t > 2\rho h + h$ 时,

$$V'(t) \geq [\beta S(t) - (\alpha + \mu + \sigma + \delta)] \int_0^h f(\tau) I(t - \tau) d\tau > (\alpha + \mu + \sigma + \delta) \left[\frac{\beta S^\Delta}{\alpha + \mu + \sigma + \delta} - 1 \right] \int_0^h f(\tau) I(t - \tau) d\tau.$$

令 $\underline{i} = \min_{\theta \in [-h, 0]} I(2\rho h + h + \theta)$. 下面证明对 $\forall t > 2\rho h + h$, 有 $I(t) \geq \underline{i}$. 否则存在 $T > 0$, 使得 $t \in [2\rho h + h, 2\rho h + h + T]$ 时, $I(t) \geq \underline{i}$ 且 $I(2\rho h + h + T) = \underline{i}, I'(2\rho h + h + T) \leq 0$.

另一方面, 由系统(2)第 2 个方程可以得到, 当 $t = 2\rho h + h + T$,

$$I'(t) \geq \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t - \tau) d\tau - (\alpha + \mu + \sigma + \delta) I(t) \geq [\beta S^\Delta - (\alpha + \mu + \sigma + \delta)] \underline{i} > 0.$$

与 $I'(2\rho h + h + T) \leq 0$ 矛盾. 因此, 对所有的 $t > 2\rho h + h$, 有 $I(t) \geq \underline{i}$.

进而, 当 $t > 2\rho h + 2h$, 有 $V'(t) > [\beta S(t) - (\alpha + \mu + \sigma + \delta)] \underline{i}$, 所以 $t \rightarrow +\infty$ 时, $V(t) \rightarrow +\infty$, 与 $V(t)$

有界矛盾. 因此断言正确.

现在 $I(t)$ 有两种可能: 对于足够大的 $t, I(t) \geq c_0$ 或者 $I(t)$ 在 c_0 处摆动.

现证当 t 足够大, $I(t) \geq c_0 e^{-(\alpha+\mu+\sigma+\delta)(h+\rho h)}$. 若 $I(t) \geq c_0$, 则 $I(t) \geq c_0 e^{-(\alpha+\mu+\sigma+\delta)(h+\rho h)}$ 一定成立. 因此, 现考虑 $I(t)$ 在 c_0 处摆动的情况, 任取足够大的 t_1, t_2 , 满足 $I(t_1) = 0, I(t_2) = c_0$, 且当 $t \in (t_1, t_2)$ 时, $I(t) \leq c_0$. 若 $t_2 - t_1 \leq h + \rho h$, 由于 $I'(t) \geq -(\alpha + \mu + \sigma + \delta)I(t)$, 则通过积分计算, 可得 $t \in [t_1, t_2], I(t) \geq c_0 e^{-(\alpha+\mu+\sigma+\delta)(h+\rho h)}$. 若 $t_2 - t_1 > h + \rho h$, 则当 $t \in [t_1, t_1 + h + \rho h]$ 时 $I(t) \geq c_0 e^{-(\alpha+\mu+\sigma+\delta)(h+\rho h)}$. 现证明在 $[t_1 + h + \rho h, t_2]$ 上也成立. 若在 $t \in [t_1 + h + \rho h, t_2]$ 时不成立, 则存在 $T^* > 0$, 使得当 $t \in [t_1, t_1 + h + \rho h + T^*]$ 时, 有 $I(t) \geq c_0 e^{-(\alpha+\mu+\sigma+\delta)(h+\rho h)}, I(t_1 + h + \rho h + T^*) = c_0 e^{-(\alpha+\mu+\sigma+\delta)(h+\rho h)}$ 且 $I'(t_1 + h + \rho h + T^*) \leq 0$. 由系统(2)以及(3)式得:

$$I'(t_1 + h + \rho h + T^*) \geq \beta S(t) \int_0^h f(\tau) I(t - \tau) d\tau - (\alpha + \mu + \sigma + \delta) I(t) \geq [\beta S^\Delta - (\alpha + \mu + \sigma + \delta)] c_0 e^{-(\alpha+\mu+\sigma+\delta)(h+\rho h)} > 0.$$

因此与 $I'(t_1 + h + \rho h + T^*) \leq 0$ 产生矛盾. 所以 $I(t) \geq c_0 e^{-(\alpha+\mu+\sigma+\delta)(h+\rho h)}$ 在 $t \in [t_1, t_2]$ 均成立.

综上所述, $\liminf_{t \rightarrow +\infty} I(t) \geq c_0 e^{-(\alpha+\mu+\sigma+\delta)(h+\rho h)} = \nu_2 > 0$.

通过定理 1~3 得到系统(2)的解是持久的.

3 平衡点的稳定性

3.1 无病平衡点的稳定性

定理 4 当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E^0 全局渐近稳定; 当 $R_0 > 1$ 时, E^0 不稳定.

证明 在区域 $\Omega = \left\{ (S, I_a, I_s) \mid 0 \leq I_a + I_s \leq \frac{\Lambda}{\mu}, 0 \leq S \leq \frac{\Lambda}{\mu} \right\}$ 中考虑 Lyapunov 函数

$$V(x_t) = I_a(t) + \omega I_s(t) + \beta \frac{\Lambda}{\mu} \int_0^h f(\tau) \int_{t-\tau}^t [I_a(u) + I_s(u)] du d\tau,$$

其中, $\omega > 0$. 易知 $I_a(t) + I_s(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}, S(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$, 则对任意 $t \geq 0, V(x_t) \geq \min\{1, \omega\} [I_a(t) + I_s(t)]$.

$V(x_t)$ 沿系统(1)求导, 得到

$$\begin{aligned} |V'(x_t)|_{(2)} &= -(\mu + \delta + \gamma) I_a(t) + \beta S(t) \int_0^h f(\tau) [I_a(t) + I_s(t)] d\tau + \omega \gamma I_a(t) - \\ &\omega(\alpha + \mu + \sigma) I_s(t) + \beta \frac{\Lambda}{\mu} [I_a(t) + I_s(t)] - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \int_0^h f(\tau) [I_a(t) + I_s(t)] d\tau \leq \\ &- \left[(\mu + \delta + \gamma) - \omega \gamma - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \right] I_a(t) - \left[\omega(\alpha + \mu + \sigma) - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \right] I_s(t). \end{aligned}$$

取 $\omega = \frac{\mu + \delta + \gamma}{\alpha + \mu + \sigma + \gamma}$, 此时, 由 $R_0 < 1$ 得 $V'(x_t)|_{(2)} < 0$. 因此当 $R_0 < 1$ 时, 无病平衡点 E^0 全局渐近稳定.

下面证明当 $R_0 > 1$ 时, E^0 不稳定. 令 $x(t) = S(t) - S^0, y(t) = I_a(t) - I_a^0, z(t) = I_s(t) - I_s^0$, 则系统(1)变为

$$\begin{cases} x'(t) = -\beta(x(t) + S^0) \int_0^h f(\tau) [y(t - \tau) + z(t - \tau)] d\tau + \delta y(t) + \sigma z(t) - (\beta(I_a^0 + I_s^0) + \mu)x(t), \\ y'(t) = \beta(x(t) + S^0) \int_0^h f(\tau) [y(t - \tau) + z(t - \tau)] d\tau + \beta(I_a^0 + I_s^0)x(t) - (\mu + \delta + \gamma)y(t), \\ z'(t) = \gamma y(t) - (\alpha + \mu + \sigma)z(t). \end{cases}$$

对应 $E^0 = (S^0, I_a^0, I_s^0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0 \right)$ 的特征方程为

$$(\lambda + \mu) \begin{vmatrix} \lambda - \beta \frac{\Delta}{\mu} \int_0^h f(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau + (\mu + \delta + \gamma) & -\beta \frac{\Delta}{\mu} \int_0^h f(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau \\ -\gamma & \lambda + (\alpha + \mu + \sigma) \end{vmatrix} = 0.$$

令

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \beta \frac{\Delta}{\mu} \int_0^h f(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau + (\mu + \delta + \gamma) & -\beta \frac{\Delta}{\mu} \int_0^h f(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau \\ -\gamma & \lambda + (\alpha + \mu + \sigma) \end{vmatrix} = \\ \lambda^2 + \left[(\mu + \delta + \gamma) + (\alpha + \mu + \sigma) - \beta \frac{\Delta}{\mu} \int_0^h f(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau \right] \lambda - \\ (\alpha + \mu + \sigma + \gamma) \beta \frac{\Delta}{\mu} \int_0^h f(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau + (\mu + \delta + \gamma)(\alpha + \mu + \sigma),$$

则 $f(\lambda)$ 是关于 λ 的开口向上的二次函数. 在 $\tau > 0$ 的条件下, 当 $R_0 > 1$ 时, 有

$$f(0) = (\mu + \delta + \gamma)(\alpha + \mu + \sigma) - \beta \frac{\Delta}{\mu} (\alpha + \mu + \sigma + \gamma) < 0,$$

而若 $\lambda \rightarrow +\infty$, 则 $\beta \frac{\Delta}{\mu} \int_0^h f(\tau) e^{-\lambda\tau} d\tau \rightarrow 0$, 那么有

$$f(\lambda) \rightarrow \lambda^2 + (\mu + \delta + \gamma + \alpha + \mu + \sigma)\lambda + (\mu + \delta + \gamma)(\alpha + \mu + \sigma) \rightarrow +\infty.$$

所以, 必存在一个实部为正的 λ^+ , 使得 $f(\lambda^+) = 0$, 因此 E^0 不稳定.

3.2 地方病平衡点的局部稳定性

引理 1^[19] 若存在非负连续向量函数 $\omega_1(\cdot), \omega_2(\cdot)$, 满足当且仅当 $x = 0, \omega_i(x) = 0$, 且当 $x \rightarrow +\infty, \omega_1(x) \rightarrow +\infty, V: C([- \tau, 0], \mathbf{R}^n) \rightarrow \mathbf{R}$ 是连续微分向量函数, 其在系统(1)的解满足:

$$V(\phi) \geq \omega_1(\phi(0)), V'(\phi) \leq -\omega_2(|\phi(0)|),$$

则系统的解是渐近稳定的.

定理 5 若 $\alpha = 0$, 则当 $R_0 > 2$ 时, 地方病平衡点 E^* 局部稳定; 若 $\alpha \neq 0$, 则当 $\gamma < \frac{\alpha^2}{4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu)}$ 以及 $R_0 > 1 + \frac{4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu)\tilde{R}}{4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu) - \gamma\alpha^2}$ 时, 地方病平衡点 E^* 局部稳定, 其中 $\tilde{R} = 2 \frac{\mu(\alpha + \mu + \sigma) + \gamma(\alpha + \mu)}{(\alpha + 2\mu)(\alpha + \mu + \sigma + \gamma)}$.

证明 令 $u_1(t) = S(t) - S^*, u_2(t) = I_a(t) - I_a^*, u_3(t) = I_s(t) - I_s^*$, 则系统(1)变为

$$\begin{cases} u_1'(t) = -\beta(u_1(t) + S^*) \int_0^h f(\tau)[u_2(t-\tau) + u_3(t-\tau)]d\tau + \delta u_2(t) + \sigma u_3(t) - (\beta(I_a^* + I_s^*) + \mu)u_1(t), \\ u_2'(t) = \beta(u_1(t) + S^*) \int_0^h f(\tau)[u_2(t-\tau) + u_3(t-\tau)]d\tau + \beta(I_a^* + I_s^*)u_1(t) - (\mu + \delta + \gamma)u_2(t), \\ u_3'(t) = \gamma u_2(t) - (\alpha + \mu + \sigma)u_3(t). \end{cases}$$

取其线性部分:

$$\begin{cases} u_1'(t) = -\beta S^* \int_0^h f(\tau)[u_2(t-\tau) + u_3(t-\tau)]d\tau + \delta u_2(t) + \sigma u_3(t) - (\beta(I_a^* + I_s^*) + \mu)u_1(t), \\ u_2'(t) = \beta S^* \int_0^h f(\tau)[u_2(t-\tau) + u_3(t-\tau)]d\tau + \beta(I_a^* + I_s^*)u_1(t) - (\mu + \delta + \gamma)u_2(t), \\ u_3'(t) = \gamma u_2(t) - (\alpha + \mu + \sigma)u_3(t). \end{cases}$$

考虑 Lyapunov 函数

$$V(u_t) = \frac{1}{2}\omega_1(u_1 + u_2 + u_3)^2 + \frac{1}{2}u_2^2 + \frac{1}{2}\omega_3 u_3^2 + \frac{1}{2}\beta S^* \int_0^h f(\tau) \int_{t-\tau}^t u_2(\nu)[u_2(\nu) + u_3(\nu)]d\nu d\tau.$$

其中 $\omega_1 > 0, \omega_3 > 0$. 则 $V(u_t)$ 沿上述线性系统求导, 得到

$$V'(u_t) = \omega(u_1 + u_2 + u_3)[- \mu u_1 - \mu u_2 - (\alpha + \mu)u_3] + u_2[\beta S^* \int_0^h f(\tau)[u_2(t-\tau) + u_3(t-\tau)]d\tau +$$

$$\beta(I_a^* + I_s^*)u_1 - (\mu + \delta + \gamma)u_2] + \omega_3 u_3 [\gamma u_2 - (\alpha + \mu + \sigma)u_3] + \frac{1}{2}\beta S^* u_2(u_2 + u_3) - \frac{1}{2}\beta S^* \int_0^h f(\tau)u_2(t - \tau)[u_2(t - \tau) + u_3(t - \tau)]d\tau \leq \omega_1(u_1 + u_2 + u_3)[- \mu u_1 - \mu u_2 - (\alpha + \mu)u_3] + \beta S^* u_2(u_2 + u_3) + \beta(I_a^* + I_s^*)u_1 u_2 - (\mu + \delta + \gamma)u_2^2 + \omega_3 \gamma u_2 u_3 - \omega_3(\alpha + \mu + \sigma)u_3^2.$$

情形 1 若 $\alpha = 0$, 则

$$V'(u_t) \leq -\mu\omega_1(u_1 + u_2 + u_3)^2 + \beta S^* u_2(u_2 + u_3) + \beta(I_a^* + I_s^*)u_1 u_2 - (\mu + \delta + \gamma)u_2^2 + \omega_3 \gamma u_2 u_3 - \omega_3(\mu + \sigma)u_3^2 < -\mu\omega_1(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2u_1 u_2 + 2u_1 u_3 + 2u_2 u_3) + \beta S^* u_2 u_3 + \beta(I_a^* + I_s^*)u_1 u_2 + \omega_3 \gamma u_2 u_3 - \omega_3(\mu + \sigma)u_3^2,$$

其中, $\beta S^* < \mu + \delta + \gamma$. 当 $R_0 > 2$ 时, $\beta(I_a^* + I_s^* - S^*) > 0$, 因此选取 $\omega_1 = \frac{\beta(I_a^* + I_s^*)}{2\mu} > 0, \omega_3 = \frac{\beta(I_a^* + I_s^* - S^*)}{\gamma} > 0$. 此时, 计算得到

$$V'(u_t) < -\mu\omega_1(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + 2u_1 u_3) - \omega_3(\mu + \sigma)u_3^2 = -\mu\omega_1(u_1 + u_3)^2 - \mu\omega_1 u_2^2 - \omega_3(\mu + \sigma)u_3^2 < 0.$$

由引理 1 可知 E^* 局部渐近稳定.

情形 2 若 $\alpha \neq 0$, 则

$$V'(u_t) < \omega_1[-\mu u_1^2 - \mu u_2^2 - (\alpha + \mu)u_3^2 - 2\mu u_1 u_2 - (\alpha + 2\mu)u_1 u_3 - (\alpha + 2\mu)u_2 u_3] + \beta S^* u_2 u_3 + \beta(I_a^* + I_s^*)u_1 u_2 + \omega_2 \gamma u_2 u_3 - \omega_3(\alpha + \mu + \sigma)u_3^2.$$

当 $R_0 > 1 + \frac{4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu)\tilde{R}}{4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu) - \gamma\alpha^2}$, 其中 $\tilde{R} = 2\frac{\mu(\alpha + \mu + \sigma) + \gamma(\alpha + \mu)}{(\alpha + 2\mu)(\alpha + \mu + \sigma + \gamma)}$, 显然此时 $R_0 > 2$, 因此

选择 $\omega_1 = \frac{\beta(I_a^* + I_s^*)}{2\mu} > 0, \omega_3 = \frac{\beta}{\gamma} \left[(\alpha + 2\mu) \frac{I_a^* + I_s^*}{2\mu} - S^* \right] > 0$. 计算得到

$$V'(t) < -\omega_1 \mu u_1^2 - \omega_1(\alpha + 2\mu)u_1 u_3 - [\omega_1(\alpha + \mu) + \omega_3(\alpha + \mu + \sigma)]u_3^2 - \mu\omega_1 u_2^2.$$

若上式为负定二次型, 则必须满足

$$[\omega_1(\alpha + 2\mu)]^2 - 4\mu\omega_1[\omega_1(\alpha + \mu) + \omega_3(\alpha + \mu + \sigma)] < 0,$$

即 $[\omega_1(\alpha + 2\mu)]^2 < 4\mu\omega_1[\omega_1(\alpha + \mu) + \omega_3(\alpha + \mu + \sigma)]$, 则 $\omega_1 \alpha^2 < 4\mu\omega_3(\alpha + \mu + \sigma)$.

进而可得:

$$[4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu) - \gamma\alpha^2](R_0 - 1) > 4\mu(\alpha + \mu + \sigma) \frac{2[\mu(\alpha + \mu + \sigma) + (\alpha + \mu)\gamma]}{\alpha + \mu + \sigma + \gamma},$$

$$[4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu) - \gamma\alpha^2](R_0 - 1) > 4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu)\tilde{R},$$

当 $\gamma < \frac{\alpha^2}{4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu)}$ 时, $(R_0 - 1) > \frac{4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu)\tilde{R}}{4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu) - \gamma\alpha^2}$, 则 $R_0 > 1 +$

$\frac{4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu)\tilde{R}}{4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu) - \gamma\alpha^2}$. 此时 $V'(u_t) < 0$, 根据引理 1 可知地方病平衡点 E^* 局部稳定.

4 数值模拟

为验证系统的稳定性情况, 针对系统(1)进行数值模拟, 见图 1.

下面考虑变化时滞后, 观察时滞对系统动力学的影响.

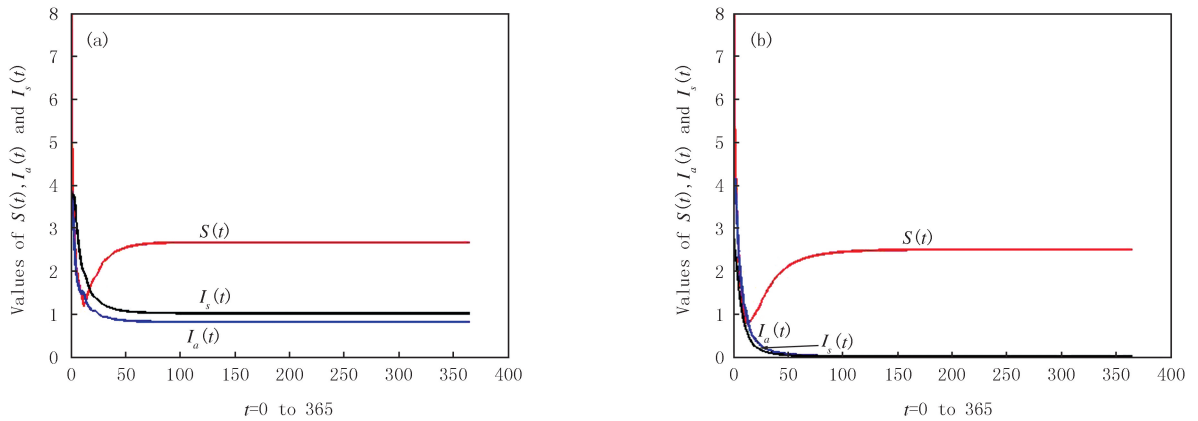
从图 2 中可以看出在 $R_0 > 1$ 时, 时滞 τ 越小, 未就诊病人人数达到的峰值越大; 反之, 未就诊病人人数达到的峰值越小. 因此从被感染到具有感染力的时间的长短会影响病人人数到达的峰值高度.

5 讨论

为研究未就诊病人在人群中的传染情况以及传染力的滞后情况, 建立了含未就诊病人且带分布时滞的

SIS 传染病模型.通过理论分析,得到无病平衡点 E^0 、地方病平衡点 E^* 以及基本再生数 R_0 .持久性证明结果显示,当 $R_0 > 1$ 时,系统持久.在平衡点稳定性证明中,通过构造 Lyapunov 函数得到,当 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点 E^0 全局渐近稳定;当 $R_0 > 1$ 时, E^0 不稳定;若 $\alpha = 0$,则当 $R_0 > 2$ 时,地方病平衡点 E^* 局部稳定;若 $\alpha \neq 0$,则当 $\gamma < \frac{\alpha^2}{4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu)}$ 以及 $R_0 > 1 + \frac{4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu)\tilde{R}}{4\mu(\alpha + \mu + \sigma)(\alpha + 2\mu) - \gamma\alpha^2}$ 时,地方病平衡点 E^* 局部稳定.其中 $\tilde{R} = 2 \frac{\mu(\alpha + \mu + \sigma) + \gamma(\alpha + \mu)}{(\alpha + 2\mu)(\alpha + \mu + \sigma + \gamma)}$.

为观察时滞对系统的影响,以及各类人群的发展情况,对其进行了数值模拟.结果显示,当 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点 E^0 渐近稳定,疾病灭绝;当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点 E^* 渐近稳定,疾病持久.在理论证明中,定理 2 中的附加条件为 E^* 局部稳定的充分条件,因此当且仅当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点的渐近稳定性的理论还未完善.未来将在此理论上继续研究,进行完善.



(a) 中 $\lambda=0.25, \beta=0.2, \mu=0.1, \sigma=0.4, \alpha=0.4, \delta=0.5, \gamma=0.5, \tau=10, R_0=0.707 < 1, R_s=0.357 < 1$. 此时 E^0 是全局渐近稳定的, 疾病灭绝.
 (b) 中 $\lambda=1, \beta=0.2, \mu=0.2, \sigma=0.1, \alpha=0.1, \delta=0.5, \gamma=0.5, \tau=10, R_0=1.875 > 1, R_s=1.111 > 1$. 此时 E^* 是全局渐近稳定的, 疾病持久.

图1 S, I_a 和 I_s 关于时间 t 的关系图
 Fig.1 Relation diagram of S, I_a and I_s about time t

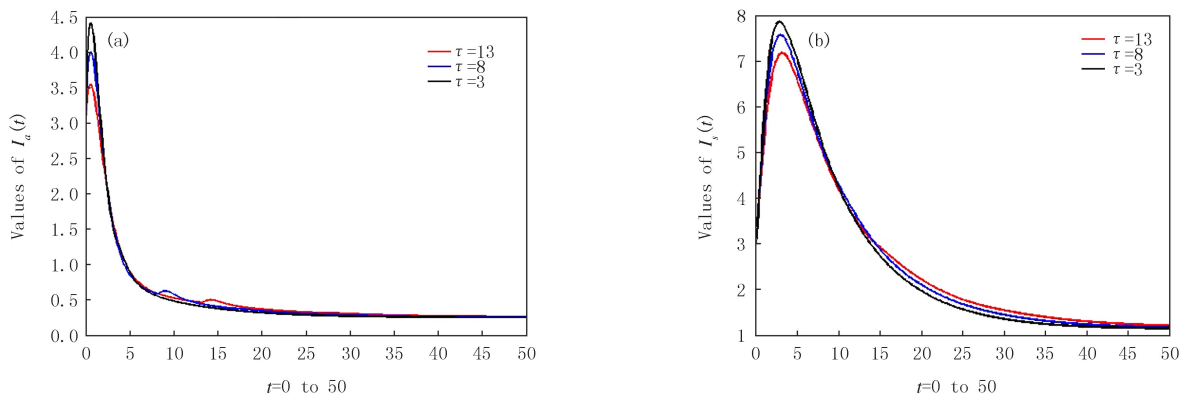


图2 $R_0 > 1$ 时, $I_a(t)$ (a) 与 $I_s(t)$ (b) 在不同时滞下的趋势图
 Fig.2 When $R_0 > 1$, trend diagram of $I_a(t)$ (a) and $I_s(t)$ (b) with different time delays

参 考 文 献

[1] 严阅,陈瑜,刘可俊,等.基于一类时滞动力学系统对新型冠状病毒肺炎疫情的建模和预测[J].中国科学:数学,2020,50(3):385-392.
 YAN Y, CHEN Y, LIU K J, et al. Modeling and prediction for the trend of outbreak of NCP based on a time-delay dynamic system[J]. Scientia Sinica(Mathematica), 2020, 50(3):385-392.
 [2] SONG X K, WANG L L, ZHOU Y W, et al. An epidemiological forecast model and software assessing interventions on COVID-19 epidemic in China[J]. Journal of Data Science, 2020, 3:1-35.

- [3] 陈吉荣,杨方廷,战守义,等.北京 SARS 仿真模型的参数和初始值的处理[J].系统仿真学报,2003,15(7):995-998.
CHEN J R, YANG F T, ZHAN S Y, et al. Processing on the parameters and initial values of SARS simulation model for Beijing[J]. Acta Simulata Systematica Sinica, 2003, 15(7): 995-998.
- [4] WANG W D, RUAN S G. Simulating the SARS outbreak in Beijing with limited data[J]. Journal of Theoretical Biology, 2004, 227(3): 369-379.
- [5] MEYER K C. The role of immunity and inflammation in lung senescence and susceptibility to infection in the elderly[J]. Seminars in Respiratory and Critical Care Medicine, 2010, 31(5): 561-574.
- [6] MCCLUSKEY C C. Complete global stability for an SIR epidemic model with delay—Distributed or discrete[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2010, 11(1): 55-59.
- [7] MISRA A K, MISHRA S N, PATHAK A L, et al. Modeling the effect of time delay in controlling the carrier dependent infectious disease—Cholera[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(23): 11547-11557.
- [8] MONTRI M. Time delay epidemic model for COVID-19[J/OL]. [2021-05-13]. https://www.researchgate.net/publication/341540153_Time_delay_epidemic_model_for_COVID-19.
- [9] ZHANG X H, JIA J W, SONG X Y. Permanence and extinction for a nonautonomous malaria transmission model with distributed time delay[J]. Journal of Applied Mathematics, 2014, 2014: 1-15.
- [10] ZOU L, XIONG Z L, SHU Z P. The dynamics of an eco-epidemic model with distributed time delay and impulsive control strategy[J]. Journal of the Franklin Institute, 2011, 348(9): 2332-2349.
- [11] YIN F Q, LI Y K. Positive periodic solutions of a single species model with feedback regulation and distributed time delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 153(2): 475-484.
- [12] BERETTA E, TAKEUCHI Y. Global stability of an SIR epidemic model with time delays[J]. Journal of Mathematical Biology, 1995, 33(3): 250-260.
- [13] TAKEUCHI Y, MA W B, BERETTA E. Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2000, 42(6): 931-947.
- [14] BERETTA E, HARA T, MA W B, et al. Global asymptotic stability of an SIR epidemic model with distributed time delay[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2001, 47(6): 4107-4115.
- [15] ZHANG T L, TENG Z D. Global behavior and permanence of SIRS epidemic model with time delay[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2008, 9(4): 1409-1424.
- [16] CAI L M, LI X Z, GHOSH M, et al. Stability analysis of an HIV/AIDS epidemic model with treatment[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 229(1): 313-323.
- [17] PARK S W, CORNFORTH D M, DUSHOFF J, et al. The time scale of asymptomatic transmission affects estimates of epidemic potential in the COVID-19 outbreak[J]. Epidemics, 2020, 31: 100392.
- [18] BAO Y T, XU Y L, QI L X, et al. Modeling the influence of nonclinic visits on the transmission of respiratory diseases[J]. Computational and Mathematical Methods in Medicine, 2020, 2020: 1-10.
- [19] HALE J K. Linear differential difference equations[M]. New York: Springer, 1977.

Analysis of a class of SIS model with distributed delay considering non visiting patients

Qi Longxing, Cheng Guangyi, Bao Yunting

(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230061, China)

Abstract: Infectious diseases have always taken a major toll on mankind. People infected with certain diseases will not immediately come on, some infected patients in the initial symptoms of mild did not go to the hospital will become infectious after a period of time. In order to investigate the influence of these easily neglected factors on the spread of infectious diseases, this study established a SIS model with distributed delay considering non visiting patients. Basic reproduction number was calculated, and the existence and stability of disease-free equilibrium and endemic equilibrium were analyzed. Lyapunov function is used to prove that the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable, while the endemic equilibrium is unstable. On the basis of a given threshold, when the disease is persistent, and under certain conditions, the endemic equilibrium point is locally stable. In addition, the numerical simulation of the discretized time-delay model showed that the shorter the incubation time of infection, the greater the peak value of the number of untreated patients would be. On the contrary, the peak of the number of non visiting patients is smaller.

Keywords: infectious diseases; distributed time delay; non visiting patients; basic reproduction number

[责任编辑 陈留院 赵晓华]

本期专家介绍



崔景安,北京建筑大学教授,博士,博士生导师.中国数学会生物数学专业委员会主任,*International Journal of Biomathematics* 编委,《生物数学学报》常务编委,北京市学术创新团队负责人,北京建筑大学数学学科负责人.主要研究方向为生物数学、传染病动力学模型及其应用、种群动力系统.主持国家自然科学基金项目 5 项,发表学术论文 120 余篇.主要教学科研成果获得教育部自然科学奖一等奖 1 项、教育部自然科学奖二等奖 2 项,北京市教育教学成果奖一等奖 1 项.

齐龙兴,安徽大学教授,博士,博士生导师,博士毕业于南京师范大学,博士后工作于加拿大 York 大学. 目前任安徽大学数学科学学院信息与计算机系主任. 长期从事传染病传播动力学模型研究,主持国家自然科学基金项目 2 项,安徽省自然科学基金项目 2 项,安徽省高校自然科学基金 1 项,安徽省高等学校优秀青年人才基金项目 1 项,发表 SCI/EI/CSCD 收录的科研论文 30 余篇. 已培养 1 名博士,15 名硕士,获“安徽省教坛新秀”荣誉称号.



董磊,山西大学激光光谱研究所教授,博士,博士生导师,青年三晋学者,获得国家自然科学基金优秀青年科学基金和山西省中青年拔尖创新人才项目的支持. 目前担任中国光学学会环境光学专委会委员、山西省光学学会副理事长、美国莱斯大学激光科学组客座教授、意大利巴里理工大学工业 4.0 博士学位委员会委员及 PolySenSe 联合实验室客座教授、《中国激光》和《大气与环境光学学报》杂志社青年编委、《光学学报》激光光谱与光谱学栏目专题编辑、国际期刊 *Photoacoustics* 和

Sensors 客座编辑.2007 年毕业于山西大学,获光学专业博士学位.长期以来主要从事基于激光光谱的传感技术研究,在新型光声光热光谱领域,尤其是石英增强光声光谱用于痕量气体检测方面取得了系列重要成果.解决了高灵敏的石英增强光声光谱从近红外向长波中红外和太赫兹波段应用拓展及与大功率光源结合的关键技术问题;发展了基于音叉式石英晶振用于新材料研究的传感新技术.近 5 年来,以第一或通信(含共同)作者在 *Nature Communications*, *Applied Physics Reviews*, *ACS sensors* 等刊物上发表论文 40 余篇,其中 ESI 高被引论文 5 篇;先后主持承担了包括国家重点研发计划在内的国家级项目 5 项;以第一发明人授权发明专利 15 件,成果在核电、电网、军工等领域实现了应用.