

# 五维最小规范超引力中渐近 AdS 黑洞的类 Komar 守恒荷

邹长利,刘惠发,彭俊金

(贵州师范大学 物理与电子科学学院,贵阳 550001)

**摘要:** Komar 积分可以有效地定义渐近平直黑洞的质量与角动量等守恒荷,但不能用于定义渐近 anti-de Sitter(AdS)黑洞的质量.如果需要将 Komar 积分拓展到渐近 AdS 引力理论中,必须对其进行修正.一种可行的方案就是在守恒势中引入额外的 Killing 矢量场的三阶导数项,得到高阶修正的 Komar 积分.基于该积分,本文提供了计算五维最小规范超引力中渐近 AdS 黑洞的质量与角动量的又一有效方法.

**关键词:** Komar 积分;五维超引力;引力理论的守恒量;渐近 AdS 黑洞

**中图分类号:** O412.1

**文献标志码:** A

1959 年,为了寻找一个定义广义相对论中引力场能量的协变性表达式,学者 Komar 在文献[1]中从引力场运动方程出发构造了与 Killing 矢量  $\xi^\mu$  (也可以是一般性的矢量场)相对应的一个协变性二阶反对称张量  $K^{\mu\nu} = \nabla^\mu \xi^\nu - \nabla^\nu \xi^\mu$ , 由于 Komar 率先给出了这个张量并把它应用于引力场能量的定义,文献中通常把它称为 Komar 势,它与守恒流  $J_K^\mu$  的联系可由散度方程  $J_K^\mu = \nabla_\nu K^{\mu\nu}$  表示.值得指出的是,在广义相对论框架下, Komar 流与势的存在并不是偶然的,完全可以建立在著名的诺特定理之上.事实上,遵循学者 Wald 与其合作者发展的协变相空间方法<sup>[2-4]</sup>或 Barnich 等学者提出的 Barnich-Brandt-Compere(BBC)方法<sup>[5-8]</sup>,对广义相对论的爱因斯坦-希尔伯特作用量进行变分,也可自然地导出 Komar 流与势.

对势  $K^{\mu\nu}$  在一个封闭表面内进行积分,可得到所谓的 Komar 积分.由于形式上的简单性与计算过程中的易操作性, Komar 积分可以非常方便地用来计算引力理论各种时空,特别是渐近平直时空的质量与角动量等守恒荷.但是,一旦引力理论的作用量纳入了负宇宙学常数  $\Lambda$ ,从而允许渐近 anti-de Sitter(AdS)黑洞存在时,如果把 Komar 积分用于计算这些黑洞的质量,不可避免地会遭遇发散性这一困境.因此,为了得到有物理意义的结果,必须对原始的 Komar 势进行修正.最近,在文献[9]中,沿着文献[10-11]中构造与任意矢量相对应的守恒流的思路,本文作者通过引入任意 Killing 矢量的高阶导数项,对原始的 Komar 势进行了一个有效推广,进而给出了定义含宇宙学常数爱因斯坦引力中渐近 AdS 时空的质量与角动量的公式.因其与原初 Komar 积分的高度关联性,方便起见,本文称之为类 Komar 积分.

为了延续类 Komar 积分在爱因斯坦引力中的有效性,可以考虑把它拓展到包含 U(1)规范场的规范超引力中,如五维最小规范超引力理论中渐近 AdS 时空.2005 年,在五维最小规范超引力理论中,Chong 等学者找到了该理论的最一般非极端、渐近 AdS 的双转动带电黑洞解<sup>[12]</sup>,在  $\{t, r, \theta, \phi, \psi\}$  坐标下,其时空线元可以表述为如下形式:

$$ds^2 = -\frac{\Delta_\theta [(1 + \ell^2 r^2) \Sigma dt + 2qV_1] dt}{\Xi_a \Xi_b \Sigma} + \frac{2qV_1 V_2}{\Sigma} + \frac{UA^2}{3q^2} + \frac{\Sigma dr^2}{\Delta_r} + \frac{\Sigma d\theta^2}{\Delta_\theta} + \frac{(r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2}{\Xi_a} + \frac{(r^2 + b^2) \cos^2 \theta d\psi^2}{\Xi_b}, \quad (1)$$

(1)式中,变量  $V_1$  与  $V_2$  分别为

收稿日期:2020-10-08;修回日期:2020-12-03.

基金项目:国家自然科学基金(11865006)

作者简介(通信作者):彭俊金(1981-),男,湖南邵阳人,贵州师范大学教授,博士,研究方向为引力物理与相对论天体物理, E-mail:jjpeng@gznu.edu.cn.

$$V_1 = b \sin^2 \theta d\phi + a \cos^2 \theta d\psi, V_2 = \frac{a \sin^2 \theta d\phi}{\Xi_a} + \frac{b \cos^2 \theta d\psi}{\Xi_b}. \quad (2)$$

仅与坐标  $\theta$  关联的函数  $\Delta_\theta$  以及仅与坐标  $r$  相关的函数  $\Delta_r$  分别记为,

$$\Delta_\theta = 1 - a^2 \ell^2 \cos^2 \theta - b^2 \ell^2 \sin^2 \theta, \Delta_r = \frac{(r^2 + a^2)(r^2 + b^2)(1 + \ell^2 r^2) + 2abq + q^2}{r^2} - 2m, \quad (3)$$

而函数  $\Sigma$  与  $U$  有

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta, U = 2(m + abq\ell^2)\Sigma - q^2. \quad (4)$$

在以上各式中,积分常参量  $(a, b, m, q)$  依次与黑洞的沿  $\phi, \psi$  方向角动量,质量以及电荷有关.参量  $(\ell, \Xi_a, \Xi_b)$  依次定义为

$$\ell^2 = -\Lambda/6, \Xi_a = 1 - a^2 \ell^2, \Xi_b = 1 - b^2 \ell^2. \quad (5)$$

$U(1)$ 规范场  $A$  给定为

$$A = \frac{\sqrt{3}q(\Delta_\theta dt - \Xi_a \Xi_b V_2)}{\Xi_a \Xi_b \Sigma}. \quad (6)$$

代入上述各表达式,可以验证度规张量  $g_{\mu\nu}$  与规范场  $A_\mu$  精确满足如下场方程<sup>[13]</sup>

$$0 = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda - 2\left(F_{\mu\rho}F_\nu^\rho - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^2\right), 0 = \nabla_\nu F^{\mu\nu} + \frac{\sqrt{3}}{6}\epsilon^{\mu\alpha\beta\rho\sigma}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}, \quad (7)$$

在(7)式中, $U(1)$ 规范场  $A$  的 2-形式场强  $F$  定义为  $F = dA$ , 而五维完全反对称 Levi-Civita 张量  $\epsilon^{\mu\alpha\beta\rho\sigma}$  由 delta 符号表示为  $\sqrt{-g}\epsilon^{\mu\alpha\beta\rho\sigma} = -5! \delta_0^{[\mu} \delta_1^{\alpha} \delta_2^{\beta} \delta_3^{\rho} \delta_4^{\sigma]}$  (对 Levi-Civita 张量性质的了解可以参考文献[14]).由线元(1)描述的带电转动渐近 AdS 黑洞是当前在五维最小规范超引力理论中发现的最具一般属性的精确黑洞解,理解它的几何属性与热力学性质等很具有理论价值,已有一系列文献对此开展了研究;不仅如此,由于该黑洞拥有渐近 AdS 的边界结构,完全可以把它用于探讨与著名的 AdS/CFT 对应相关的一些性质<sup>[15]</sup>.

本文拟把文献[9]中得到的定义渐近 AdS 时空守恒荷的高阶修正 Komar 积分公式用来计算由(1)式给出的五维最小规范超引力中渐近 AdS 黑洞的质量与角动量,主要基于如下两个目的:其一,因超引力理论包含物质场的 Chern-Simons 项,该项的存在对检验含高阶导数项修正的 Komar 积分公式的普适性具有参考意义;其二,与已有的一些定义引力理论守恒荷的标准方法,比如,协变相空间方法<sup>[2-4]</sup>、BBC 方法<sup>[5-8]</sup> 与 Abbott-Deser-Tekin(ADT)定义<sup>[16-20]</sup>等进行比较,类 Komar 积分公式的结构以及与其相关的计算相对最为简单,因此,如果证明该公式确实可行,本文将提供定义五维最小规范超引力中渐近 AdS 黑洞的质量与角动量的又一简单有效方法.

## 1 五维最小规范超引力中渐近 AdS 黑洞的质量与角动量

基于文献[9]中的高阶修正类 Komar 积分公式,本节将计算由时空线元(1)式描述的五维最小规范超引力中最具一般性的渐近 AdS 黑洞的质量与角动量.

首先,简单回顾一下文献[9]中构造类 Komar 积分公式的基本思路.当把原初的 Komar 积分<sup>[1]</sup>直接应用于爱因斯坦引力中渐近 AdS 黑洞(比如,最为简单的静态球对称且渐近 AdS 的 Schwarzschild-AdS 黑洞)的质量定义时,经过计算不难发现,由于无穷远处发散项的存在,不可能得到一个收敛值.因此,必须引入额外的项来抵消这些发散项,同时,还要求这些新加入的项保证结果具有物理意义.那么,究竟怎样操作呢?受文献[10-11]启发,基于外微分理论,不妨利用微分形式把守恒流与矢量场二者均视为 1-形式场,它们经由余微分算子  $\delta$ (也称为伴随外微分算子,co-differential),外导数  $d$ (exterior derivative)以及物理学中常出现的达朗贝尔算子  $\square$ (d'Alembert operator,由协变导数  $\nabla^\rho$  表示为  $\square = \nabla^\rho \nabla_\rho$ )的共同作用(对三者的详细定义以及有关性质的了解,尤其是外导数与霍奇星算子的组合规律,可参见文献[11,21]以及文中所引用的相关文献),分析表明,原初的 Komar 流与 Killing 矢量之间可以建立如下关系<sup>[9-10]</sup>

$$J_K = k_1 \delta d\xi + k_2 \square \xi + k_3 d\delta\xi, \quad (8)$$

这里常参量  $k_1$  与  $k_2$  要求满足  $k_1 + (k_2/2) = -1$ .常参量  $k_3$  可以是任意的,因为  $\delta\xi = 0$ .上式揭示:完全可以

尝试由维持微分形式的次不变的达朗贝尔算子以及余微分算子与外导数二者的组合作用于任意 Killing 矢量场来生成与之对应的守恒流. 如果不断增加这些算符的数目并确保它们始终保持微分形式场的次不变, 通过线性组合, 原则上可以生成任意偶数阶导数的守恒流. 在此基础上, 再来借助守恒流与势的经典关系, 即流可以表示成势的散度, 进而得到相应的守恒势. 沿着上述思路, 最近, 文献[9]通过引入 Killing 矢量场的三阶导数项来修正原初的 Komar 守恒势  $K = d\xi$ , 得到了包含负宇宙学常数的爱因斯坦引力理论中的高阶修正的 Komar 守恒势, 在五维时空流形中, 其表达式为

$$K_{\text{AdS}} = \frac{1}{4} \left( K - \frac{1}{2\ell^2} \square K \right), \quad (9)$$

上式右边第二项为高阶修正项, 该项的存在恰好可以抵消原初 Komar 积分在渐近 AdS 情形出现的发散项. 基于分量形式来表述(9)式中守恒势, 得到

$$K_{\text{AdS}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} + \frac{1}{2\ell^2} R^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \nabla^{\rho} \xi^{\sigma} + \frac{1}{\ell^2} \xi^{\sigma} \nabla^{[\mu} R^{\nu]}_{\sigma} \right). \quad (10)$$

在守恒势的基础上, 可以进一步定义引力场的守恒量. 当坐标系统选为  $\{t, r, x^i\}$  (这里正整数  $i = 2, 3, 4$ ,  $t$  为时间坐标,  $r$  为径向坐标) 时, 对推广的 Komar 势  $K_{\text{AdS}}^{\mu\nu}$  在  $t = \text{const}$  与  $r = \infty$  的三维表面上积分, 得到质量与角动量等守恒荷  $Q$  的如下定义

$$Q = \frac{1}{96\pi} \int_{r \rightarrow \infty} K_{\text{AdS}}^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\gamma} dx^{\rho} \wedge dx^{\sigma} \wedge dx^{\gamma}. \quad (11)$$

为了得到有物理意义的结果, 显然, 这里最低要求当径向坐标趋向于无穷大时, 上述积分必须为有限值.

其次, 有了上述准备, 借助(11)式给出的守恒量定义, 可以进一步计算渐近 AdS 黑洞(1)的质量与角动量. 与质量相对应的五维 Killing 矢量场选取为  $\xi_{(t)}^{\mu} = (-1, 0, 0, 0, 0)$ , 经由冗长的计算, 得到如下质量

$$M = \frac{\pi}{4} \frac{m(2E_a + 2E_b - E_a E_b) + 2abq\ell^2(E_a + E_b)}{E_a^2 E_b^2}. \quad (12)$$

当计算沿  $\phi$  与  $\psi$  两个方向的角动量  $J_{\phi}$  与  $J_{\psi}$  时, 对应的 Killing 矢量场分别选取为  $\xi_{(\phi)}^{\mu} = \xi_{\phi}^{\mu}$  与  $\xi_{(\psi)}^{\mu} = \xi_{\psi}^{\mu}$ , 代入守恒量的定义进行计算得到

$$J_{\phi} = \frac{\pi}{4} \frac{2bq + 2ma - bqE_a}{E_a^2 E_b}, J_{\psi} = \frac{\pi}{4} \frac{2aq + 2mb - aqE_b}{E_a E_b^2}. \quad (13)$$

显然,  $J_{\phi}$  与  $J_{\psi}$  有参量  $a, b$  交换对称性, 即  $J_{\phi} = J_{\psi} (a \leftrightarrow b)$ . 值得注意的是, 在计算角动量时, 可以发现: 高阶修正 Komar 势中含曲率张量的项与原初 Komar 势对角动量有相同的贡献, 因此, 前者完全可以由后者覆盖. 这样, 原初的 Komar 积分也足够可以给出五维最小规范超引力中最具一般性的渐近 AdS 黑洞的角动量, 这正是文献[12]求解角动量时所采取的做法. 但是, 当计算质量时, 与曲率张量相关项的贡献却是决定性的.

最后, 对结果(12)与(13)二者做一个简单评述. 当常参量  $q = 0$  时, 也就是黑洞不带电时, 由度规(1)描述的带电转动渐近 AdS 黑洞回到了爱因斯坦引力中的五维中性转动 Kerr-AdS 黑洞, 在此情形下, (12)与(13)两式给出的质量与角动量等守恒量与文献[9]中得到的结果完全一致; 当  $q = 0$  且  $\ell = 0$  时, 对应于五维渐近平直的 Myers-Perry 黑洞情形, (12)与(13)二式正好是文献中给出的标准结果. 此外, 文献[12]采用了原初的 Komar 公式得到了黑洞(1)的角动量, 在此基础上, 再来通过对热力学第一定律积分的方式得到(12)式中的质量, 并不是经由质量的一般性定义来导出的. 因此, 本文中的守恒荷定义(11)式相当于给出了五维最小规范超引力中渐近 AdS 时空的质量与角动量的统一表达式.

## 2 与协变相空间、BBC 以及 ADT 等标准方法给出的结果比较

把上一节中得到的结果与三种有关引力理论守恒荷定义的标准方法进行比较. 已存于文献中的众多方法中, 植根于诺特定理之上的协变相空间方法<sup>[2-4]</sup>以及所谓的 BBC 方法<sup>[5-8]</sup>二者非常具有代表性. 这两种方法已被证明在协变性引力理论范畴内与精确对称性相对应的守恒荷的定义是等价的, 尤其在文献[13]中, 本文作者之一(彭俊金)严格验证了二者在任意奇数维超引力理论中的严格等价性. 除此之外, 另一种常用于定

义渐近 AdS 引力理论守恒荷的方法便是 ADT 公式<sup>[16-19]</sup>及其近期的离壳推广定义<sup>[20]</sup>,该方法的实质是在一个固定的 AdS 背景时空上对引力场的度规张量与场的运动方程执行线性扰动,再借助于引力场运动方程的表达式满足 Bianchi 恒等式这一属性来导出守恒流,进而给出守恒荷的定义.在文献[13]中,业已证明了 ADT 定义、协变相空间方法以及 BBC 方法三者 in 最小规范超引力理论框架中彼此均是等价的.因此,仅需与上述三种方法中的任意一种给出的结果进行对比,就可验证本文给出结果的可靠性和普适性.

选择让(12)与(13)两式中的质量和角动量与 ADT 定义给出的相应结果进行比较.由 ADT 方法给出的守恒荷定义可知,只需要把(11)式中的守恒势替换为如下表达式

$$J_{ADT}^{\mu\nu} = \xi_{\rho}^{\nu} \nabla^{\rho} h^{\mu}{}_{\nu} - h^{\rho\mu} \nabla_{\rho} \xi^{\nu} - \xi^{\rho\mu} \nabla_{\rho} h^{\nu}{}_{\rho} + \xi^{\rho\mu} \nabla^{\nu} h + \frac{1}{2} h \nabla^{\mu} \xi^{\nu}, \quad (14)$$

上式中,度规张量的扰动  $h_{\mu\nu}$  以及固定背景度规  $\bar{g}_{\mu\nu}$  分别定义为

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \bar{g}_{\mu\nu}, \bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} (m, q = 0), \quad (15)$$

而协变导数算符以及指标的升降均与背景度规相匹配.严格仿照上一节计算质量与角动量的程序,经由烦琐而冗长的计算后,可以得到与(12~13)式完全一致的结果.因此,得出结论:由类 Komar 积分公式定义的五维最小超引力中最具一般性的转动带电且渐近 AdS 黑洞的质量和角动量与协变相空间方法、BBC 方法以及 ADT 公式三者给出的结果完全一致,从而验证了本文结果的一般性.尽管如此,不管是由守恒荷定义式自身的结构来看,还是从计算过程的繁简程度来考虑,相较于经典的协变相空间方法、BBC 方法以及 ADT 公式三者,基于高阶导数项修正的类 Komar 积分公式最为简洁.

### 3 结 论

在本文中,利用高阶修正的类 Komar 积分公式,得到了五维最小规范超引力理论中带电双转动且渐近 AdS 黑洞的质量和角动量等守恒荷,它们分别由(12)与(13)两式给出.这些结果满足黑洞热力学第一定律的微分形式,因此具有物理意义.不仅如此,它们与协变相空间方法、BBC 方法以及 ADT 公式等三种定义引力理论守恒荷的经典方法给出的结果完全一致.由于超引力理论包含 Chern-Simons 项,本文结果进一步支持修正的 Komar 积分公式的普适性,与此同时,该公式还提供了定义五维最小规范超引力中渐近 AdS 时空的质量和角动量的又一简单有效途径.

尽管本文仅考虑了五维最小规范超引力的情形,相关推导原则上来说可以推广到任意奇数维度的规范超引力理论.在守恒荷定义(11)式的基础上,还可进一步探究黑洞(1)的热力学第一定律的 Smarr 公式;把(11)式拓展到规范超引力理论中渐近 AdS 黑洞的焓的定义,也是一个非常值得深入探讨的问题.此外,在任意维度最小超引力框架下,可以尝试建立高阶修正的 Komar 积分公式与协变相空间方法的一般关系.对这些问题的回答,期望在未来的研究中找到答案.

### 参 考 文 献

- [1] KOMAR A. Covariant conservation laws in general relativity[J]. Phys Rev, 1959, 113: 934.
- [2] LEE J, WALD R M. Local symmetries and constraints[J]. J Math Phys, 1990, 31: 725.
- [3] IYER V, WALD R M. Some properties of the Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy[J]. Phys Rev D, 1994, 50: 846.
- [4] WALD R M, ZOUPAS A. A general definition of conserved quantities in general relativity and other theories of gravity[J]. Phys Rev D, 2000, 61: 084027.
- [5] BARNICH G, BRANDT F. Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges[J]. Nucl Phys B, 2002, 633: 3.
- [6] BARNICH G. Boundary charges in gauge theories: using Stokes theorem in the bulk[J]. Class Quantum Grav, 2003, 20: 3685.
- [7] BARNICH G, COMPERE G. Generalized Smarr relation for Kerr AdS black holes from improved surface integrals[J]. Phys Rev D, 2005, 71: 044016.
- [8] BARNICH G, COMPERE G. Surface charge algebra in gauge theories and thermodynamic integrability[J]. J Math Phys, 2008, 49: 042901.
- [9] PENG J J, ZOU C L, LIU H F. A Komar-like integral for mass and angular momentum of asymptotically AdS black holes in Einstein gravity[EB/OL]. [2020-10-03]. <https://arxiv.org/abs/2008.06733>.

- [10] PENG J J,ZOU C L.Generalized Komar currents for vector fields[EB/OL].[2020-10-03].<https://arxiv.org/abs/1910.00339>.
- [11] PENG J J.Constructing p,n-forms from p-forms via the Hodge star operator and the exterior derivative[J].Commun Theor Phys,2020,72(6):065402.
- [12] CHONG Z W,CVETIC M,LV H, et al.General nonextremal rotating black holes in minimal five-dimensional gauged supergravity[J].Phys Rev Lett,2005,95(16):161301.
- [13] PENG J J.Mass and angular momentum of charged rotating Gödel black holes in five-dimensional minimal supergravity[J].Int J Mod Phys A,2019,34(32):1950217.
- [14] 彭俊金,雷良建.由反对称化操作探究 Levi-Civita 与 Kronecker 符号的性质[J].中山大学学报(自然科学版),2019,58(5):26-32.  
PENG J J,LEI L J.Exploring the properties of Levi-Civita and Kronecker symbols through anti-symmetrization[J].Acta Sci Nat Univ Sunyatseni,2019,58(5):26-32.
- [15] 吴健聘,黄雯钧,付国杨,等.掺杂全息费米系统[J].河南师范大学学报(自然科学版),2020,48(4):37-42.  
WU J P,HUANG W J,FU G Y, et al.Doped holographic fermionic system[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2020,48(4):37-42.
- [16] ABBOTT L F,DESER S.Stability of gravity with a cosmological constant[J].Nucl Phys B,1982,195:76.
- [17] ABBOTT L F,DESER S.Charge definition in non-abelian gauge theories[J].Phys Lett B,1982,116:259.
- [18] DESER S,TEKIN B.Gravitational energy in quadratic curvature gravities[J].Phys Rev Lett,2002,89:101101.
- [19] DESER S,TEKIN B.Energy in generic higher curvature gravity theories[J].Phys Rev D,2003,67:084009.
- [20] KIM W,KULKARNI S,YI S H.Quasi-local conserved charges in covariant theory of gravity[J].Phys Rev Lett,2013,111:081101.
- [21] 彭俊金.霍奇星算子与外微分算符的组合规律[J].河南师范大学学报(自然科学版),2019,47(3):47-54.  
PENG J J.Combination rules of Hodge star and the exterior derivative[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2019,47(3):47-54.

## Komar-like charges for asymptotically AdS black holes in five-dimensional minimal gauged supergravity

Zou Changli, Liu Huifa, Peng Junjin

(School of Physics and Electronic Science, Guizhou Normal University, Guiyang 550001, China)

**Abstract:** As is well known, the Komar integral can be used to define the mass and the angular momentum of asymptotically flat black holes, but it fails to give a well definition for the mass of black holes with AdS asymptotic. A feasible way to solve this problem is to bring third-order derivatives of the Killing vector into the conserved potential. In this paper, on the basis of the higher-order corrected Komar integral, we provide another effective method to compute the mass and the angular momentum of asymptotically AdS black holes in the framework of five-dimensional minimal gauged supergravity.

**Keywords:** Komar integral; five-dimensional supergravity; conserved charges for gravity theories; asymptotically AdS black holes

[责任编辑 杨浦 刘洋]