文章编号:1000－2367(2018)04－0014－09 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2018.04.003

带跳市场条件下欧式期权定价方法

——基于前景理论

郭文旌,芦天宇

(南京财经大学 金融学院,南京 210023)

摘 要:考虑了标的资产服从跳跃扩散过程的市场条件,并通过值函数和权重函数来刻画投资者的风险态度、损失厌恶以及主观概率,得到了欧式期权的定价方程以及数值模拟的结果.

关键词:欧式期权;累积前景理论;值函数;决策权重函数;跳跃扩散过程

中图分类号:F830.91 **文献标志码**:A

Black-Scholes 模型[1]自 1973 年问世以来就被认为是期权定价方面的里程碑式的成果,被广泛应用于金融市场,并且众多学者在许多方面都对其进行了延伸性研究.然而,有关期权价格的实证研究通常都表现出与理论模型的偏差,波动率微笑等市场异象在传统金融理论框架下不能得以解释.20 世纪 90 年代,以 Tversky 和 Kahneman[2]所提出的累积前景理论为基础的行为金融理论应运而生.行为金融理论注重投资者决策心理的多样性,突破了现代金融理论只注重最优决策模型,简单地认为理性投资决策模型就是决定证券市场价格变化的实际投资决策模型的假设,使人们对金融市场投资者行为的研究由“应该怎么做决策”转变到“实际是怎样做决策”,从而更接近实际,能够很好解释各种市场异象.

1993 年,Shefrin 和 Statman[3]最早将前景理论应用于期权定价,他们考虑了单期二叉树模型给有保护的看涨期权定价的问题.2010 年,Versluis[4]等给出了卖方视角下看涨期权的行为定价公式.2012 年 Nardon 和 Pianca[5]在文献[4]的基础上给出了买、卖双方视角下欧式看涨、看跌期权的定价公式.但是上述文献中,标的资产的价格都是连续变动的.

文献[6]指出连续的几何布朗运动和实际市场之间存在着差异.带跳的价格变动过程更符合实际市场.现有的许多实证研究,如文献[7]也证实了这一结论.本文致力于在非连续市场上将行为金融理论应用于期权定价.得到了非连续市场下的欧式期权定价方程和数值模拟结果.

1 预备知识

1979 年,文献[8]提出的前景理论是基于对前景的主观评价.对于未来状况的可能结果构成的一个有限集合 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}$,前景$((\Delta x_1,p_1),(\Delta x_2,p_2),\cdots,(\Delta x_n,p_n))$是有序对$(\Delta x_i,p_i)\in\mathbf{R}\times[0,1]$,$i=1,2,\cdots,n$ 的一个集合,其中 Δx_i 是一个结果,p_i 是它的概率.结果 Δx_i 是相对于一个确定参照点 x^* 定义的;令 x_i 是绝对值结果,有 $\Delta x_i=x_i-x^*$.假设 $\Delta x_i\leq\Delta x_j$,其中 $i<j$,$i,j=1,2,\cdots,n$,前景对于每一个有序结果都有一个概率 p_i.

在评估阶段,主观价值 $v(\Delta x_i)$ 并不是乘以概率 p_i,而是乘以决策权重 $\pi_i=w(p_i)$.正如前景理论中负的和正的结果需要分别评价一样,需要区分收益和损失:函数 v 在损失情况下是下凸的并且相对于收益情况

收稿日期:2017-07-23;**修回日期**:2018-04-25.

基金项目:国家自然科学基金(71471081;71501088);教育部人文社会科学研究规划项目(15YJC910008);江苏省高校自然科学研究面上项目(15KJBD110009).

作者简介(通信作者):郭文旌(1971—),男,湖南新宁人,南京财经大学教授,博士,主要研究方向为组合投资与风险管理,E-mail:guowenjing1971@163.com.

下的下凹是更为陡峭的,主观概率同样可以通过 w^+ 和 w^- 两个函数来分别衡量收益和损失的情况.为了强调这一点,定义对于 $\Delta x_i - m \leq i < 0$,是(严格)负的结果,而对于 $\Delta x_i, 0 < i \leq n$ 是(严格)正的结果,并且对于 $i < j$ 有 $\Delta x_i \leq \Delta x_j$. 前景的主观价值具有如下的表达形式:

$$V = \sum_{i=-m}^{n} \pi_i \cdot v(\Delta x_i), \tag{1}$$

其中 π_i 是决策权重,$v(\Delta x_i)$ 是主观价值.在期望效用论中,决策权重为 $\pi_i = p_i$ 并且效用函数并非是基于相对结果.

1.1　累积前景理论

Tversky 和 Kahneman[2] 建立的累积前景理论克服了原始前景理论的部分缺点(例如违反了随机占优).在累积前景理论中,决策权重 π_i 是扭曲后累积概率的差分:

$$\pi_i = \begin{cases} w^-(p_{-m}), i = -m, \\ w^-\left(\sum_{j=-m}^{i} p_j\right) - w^-\left(\sum_{j=-m}^{i-1} p_j\right), i = -m+1, \cdots, -1, \\ w^+\left(\sum_{j=i}^{n} p_j\right) - w^+\left(\sum_{j=i+1}^{n} p_j\right), i = 0, 1, \cdots, n-1, \\ w^+(p_n), i = n, \end{cases} \tag{2}$$

为了将累积前景理论应用于期权定价,必须要能够处理概率分布为连续时的情形,文献[9]提供了连续累积前景价值函数 V:

$$V = \int_{-\infty}^{0} v^-(x) \mathrm{d}w^-[F(x)] - \int_{0}^{+\infty} v^+(x) \mathrm{d}w^+[1 - F(x)], \tag{3}$$

(3)式可变形为:

$$V = \int_{-\infty}^{0} v^-(x) \mathrm{d}w^-[F(x)] - \int_{0}^{+\infty} v^+(x) \mathrm{d}w^+[F(\infty) - F(x)], \tag{4}$$

其中 v^- 和 v^+ 分别代表损失和收益情况下的值函数,w^- 和 w^+ 分别代表损失和收益情况下的权重函数,F 是对应于结果 x 的累积分布函数.本文中,想要在标的股票价格变动不连续的情况下给期权定价,正如文献[6]指出的,需要面对的是二维随机变量:

$$\begin{aligned} V = & \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} v^-(s) \mathrm{d}^2 w^-[F(x,y)] - \int_{-\infty}^{0} \int_{0}^{+\infty} v^+(x) \mathrm{d}^2 w^+[F(\infty,y) - F(x,y)] - \\ & \int_{0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{0} v^-(x) \mathrm{d}^2 w^-[F(x,\infty) - F(x,y)] + \int_{0}^{+\infty} \int_{0}^{+\infty} v^+(x) \mathrm{d}^2 w^+[F(\infty,\infty) - \\ & F(\infty,y) - F(x,\infty) + F(x,y)]. \end{aligned} \tag{5}$$

值得注意的是,通常将累积分布函数定义为 $F(x) = \mathrm{Prob}(X \leq x)$,对于连续分布函数来说,该式也等价 $F(x) = \mathrm{Prob}(X < x)$,而该式才是(2)式的真正含义.对于连续分布函数,使用哪个定义无关紧要,但是当处理离散分布(比如泊松分布)的时候,这就很重要了,所以在这里定义 $F(x,y) = \mathrm{Prob}(X < x, Y < y)$,其中 Y 代表了一个服从泊松分布的随机变量,并且 y 的参照点也是 0.

1.2　框架效应和心理账户

前景理论指出决策者在评价结果的时候是基于一定的参照点而非纯粹的最终财富.由于个体相较于收益给损失赋予了更大的权重,所以参照点的定义就显得极为重要.个体框架效应中对于参照点的选择在前景理论中是非常重要的.

人们倾向于将不同的结果放在不同的相互分离的心理账户中,之后在这些心理账户里分别考虑损失或者收益.文献[10]指出,当结合这些心理账户得到总体结果的时候,通常人们并不是将所有的货币结果直接相加,而是使用享乐框架,使得合并的结果看起来是最好的.

考虑结合两个确定性的(正的)结果 Δx 和 Δy,享乐框架可以描述为如下形式[11]

$$V = \max\{v(\Delta x + \Delta y), v(\Delta x) + v(\Delta y)\}. \tag{6}$$

若 $V = v(\Delta x + \Delta y)$ 则称 Δx 和 Δy 是合并的,若 $V = v(\Delta x) + v(\Delta y)$ 则称 Δx 和 Δy 是分离的,这取决于两者中哪一个可以得到最高的前景价值.

将享乐框架原则应用于(1)式可以得到

$$V=\sum_{i=-m}^{n}\pi_i\cdot\max[v(\Delta x_i+\Delta s),v(\Delta x_i)+v(\Delta s)],\tag{7}$$

其中 Δx_i 是可能结果,具有主观概率 π_i,Δy 是确定结果.

考虑到金融期权的定价,期权费就是确定结果,而期末的未定权益则由这些可能的结果来表示.

1.3 值函数和权重函数

值函数 v 是连续的,严格递增的,并且在收益的情况下是下凹的,而在损失的情况下是下凸的(但是并不要求可微,因为在参照点处通常不满足可微的条件),并且在损失时更为陡峭.在很多实证研究中常采用的一个值函数形式如下:

$$v(x)=\begin{cases}-\lambda(-x)^b,x<0,\\x^a,x\geq 0,\end{cases}\tag{8}$$

其中,3个参数都是正的,$0<a<1$ 和 $0<b<1$ 用来衡量风险态度,$\lambda>1$ 用来衡量损失厌恶程度.显然,在 $a=b=1$ 且 $\lambda=1$ 时,是风险中性的值函数.(8)式以0作为参照点,并且满足前述的特点,正如(3)式中那样,将用 v^- 和 v^+ 来区分损失和收益情况下的值函数.

权重函数 w 是一个从概率区间[0,1]到[0,1]的映射.它是严格递增的,并且满足 $w(0)=0$,$w(1)=1$.可以考虑文献[2]提出的权重函数:

$$w(p)=\frac{p^\gamma}{(p^\gamma+(1-p)^\gamma)^{1/\gamma}},\tag{9}$$

其中 γ 是一个正的常数(还包含某些额外的限制,来保证是递增函数).注意到(7)式满足 $w(0)=0$ 和 $w(1)=1$.参数 γ 刻画了从不可能事件到确定性事件之间概率变化的敏感性程度;参数值越低,函数图像的弯曲程度越大.当 $\gamma<1$ 时,可以得到倒 S 型的形状,其中低概率被赋予了较高的权重(造成了分布上的厚尾)并且中、高概率被赋予了较低的权重.在应用时,考虑了两个不同的函数 w^+ 和 w^-,分别使用不同的参数 γ^+ 和 γ^-,对应于收益和损失时的概率.

2 欧式期权定价

标的股票价格 S_t 的变动服从随机微分方程

$$\mathrm{d}S_t=\mu S_t\mathrm{d}t+\sigma S_t\mathrm{d}W_t+S_t\mathrm{d}Q_t,\tag{10}$$

W_t 是一个布朗运动.$Q(t)=\sum_{i=1}^{G(t)}Y_i$,其中 $G(t)=k$ 是一个强度为 ωt 的泊松过程,ω 单位时间内泊松事件发生的期望次数,Y_i 衡量了单个泊松时间对于股价的影响,并且 $G(t)=k$ 的概率密度函数为

$$\mathrm{Prob}(G(t)=k)=\frac{(\omega t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\omega t},\tag{11}$$

解得

$$S_t=S_0\,\mathrm{e}^{[(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t]}\cdot(Y_1+1)\cdot(Y_2+1)\cdots(Y_{G(t)}+1),\tag{12}$$

此处定义 $Y_i=\mathrm{e}^{X_i}-1$,其中 X_i 服从均值为 m 方差为 v^2 的正态分布.(12)式可以被改写为

$$S_t=S_0\,\mathrm{e}^{[(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W_t]}\cdot\mathrm{e}^{X_1+X_2+\cdots+X_{G(t)}}.\tag{13}$$

计算 S_t 的期望值,得到

$$E(S_t)=S_0\,\mathrm{e}^{\mu t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\omega t}E(\mathrm{e}^{X_1+X_2+\cdots+X_n})=S_0\,\mathrm{e}^{\mu t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\omega t}[E(\mathrm{e}^X)]^n=$$

$$S_0\,\mathrm{e}^{\mu t-\omega t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\omega tE(\mathrm{e}^X))^n}{n!}=S_0\,\mathrm{e}^{\mu t-\omega t+\omega E(\mathrm{e}^X)},$$

其中 X_i 是独立同分布的.在风险中性测度下,应当有 $E(S_t)=S_0\,\mathrm{e}^{rt}$,$r$ 是无风险利率.那么有 $S_0\,\mathrm{e}^{\mu t-\omega t+\omega E(\mathrm{e}^X)}=S_0\,\mathrm{e}^{rt}$.解出 μ,得到 $\mu=r+\omega-\omega E(\mathrm{e}^X)$,其中$\mathrm{e}^X$ 服从对数正态分布并且 X 的均值为 m 方差为 v^2,所以 $\mu=$

$r+\omega(1-e^{m+\frac{v2}{2}})$，至此调整了标的股票的期望收益率.

根据(13)式，显然当 $G(T)=k$ 时

$$\ln S_T \sim N(\ln S_0+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T+km,\sigma^2T+kv^2), \tag{14}$$

如果 $S_T=x$，那么

$$N(x \mid G(T)=k)=\Phi\left(\frac{\ln(x/S_0)-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T-km}{\sqrt{\sigma^2T+kv^2}}\right), \tag{15}$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 是标准高斯分布的累积分布函数.

2.1　看涨期权定价

行权价为 X，到期时间为 T 的看涨期权的价格为 c.在 $t=0$ 时刻，期权的空方卖出 1 份看涨期权，得到 c 并且将其以无风险利率 r 进行投资，到期时获得 ce^{rT}，并且如果期权的持有方在期权实值的时候行权，卖方需要支付 S_T-X.

在这里，到期时，$\Delta s=ce^{tT}$ 就是确定结果，并且可能结果就是 $\Delta x=x-x^*=S_T-X$.如果股价大于行权价 X，$\Delta x>0$，意味着卖方有损失，买方有收益.从卖方角度看，期权在行权的时候，给定股票价格 $S_T=x$，前景价值为：

$$\max[v(ce^{rT}+(T-x)),v^+(ce^{rT})+v^-(T-x)]. \tag{16}$$

不难发现，在两个心理账户的结果异号的时候，始终是合并的情况下前景价值较大.而应用于 $ce^{rT}+(X-x)$ 的值函数的形式取决于股价

$$v(ce^{rT}+(X-x))=\begin{cases}v^+(ce^{rT}+(X-x)),x\leq X+ce^{rT},\\ v^-(ce^{rT}+(X-x)),x<X+ce^{rT}.\end{cases} \tag{17}$$

如果期权的买方没有行权，那么前景价值为

$$\max[v^+(ce^{rT}+0),v^+(ce^{rT})+v(0)]=v^+(ce^{rT}), \tag{18}$$

因而，从卖方角度看，1 份看涨期权的前景价值为：

$$\begin{aligned}V_c^w=&-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{X+ce^{rT}}^{+\infty}v^-(ce^{rT}+(X-x))\mathrm{d}^2w^-(F(x,\infty)-F(x,y))+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{X}^{X+ce^{rT}}v^+(ce^{rT}+\\&(X-x))\mathrm{d}^2w^+(F(\infty,\infty)-F(x,\infty)-F(\infty,y)+F(x,y))+\\&\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{X}v^+(ce^{rT})\mathrm{d}^2w^+(F(\infty,\infty)-F(x,\infty)-F(\infty,y)+F(x,y)),\end{aligned} \tag{19}$$

其中累积分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{y-1}N(x\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k),y\geq 1,\\ 0,y<1.\end{cases} \tag{20}$$

因而有如下的式子：

$$\begin{aligned}&F(\infty,\infty)-F(x,\infty)-F(\infty,y)+F(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}N(\infty\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)-\\&\sum_{k=0}^{\infty}N(x\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)-\sum_{k=0}^{y-1}N(\infty\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)+\\&\sum_{k=0}^{y-1}N(x\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)=1-\sum_{k=0}^{\infty}N(x\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)-\\&\sum_{k=0}^{y-1}\mathrm{Prob}(G(T)=k)+\sum_{k=0}^{y-1}N(x\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)=\sum_{k=y}^{\infty}\mathrm{Prob}(G(T)=k)-\\&\sum_{k=y}^{\infty}N(x\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)=\sum_{k=y}^{\infty}[1-N(x\mid G(T)=k)]\cdot\\&\mathrm{Prob}(G(T)=k)\cdot F(x,\infty)-F(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}N(x\mid G(T)=k)\cdot\end{aligned}$$

$$\mathrm{Prob}(G(T)=k)-\sum_{k=0}^{y-1}N(x\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)=$$

$$\sum_{k=y}^{\infty}N(x\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k).$$

考虑到第 3 个积分的被积函数(也就是 $v^{+}(c\,\mathrm{e}^{rT})$)是一个常数,所以可以将其化简.(19)式最终可改写为:

$$V_c^w=-\int_0^{+\infty}\int_{X+c\mathrm{e}^{rT}}^{+\infty}v^{-}(c\,\mathrm{e}^{rT}+(X-x))\mathrm{d}^2w^{-}\left[\sum_{k=y}^{\infty}N(x\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)\right]+$$
$$\int_0^{+\infty}\int_X^{X+c\mathrm{e}^{rT}}v^{+}(c\,\mathrm{e}^{rT}+(X-x))\mathrm{d}^2w^{+}\left\{\sum_{k=y}^{\infty}[1-N(x\mid G(T)=k)]\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)\right\}+$$
$$v^{+}(c\,\mathrm{e}^{rT})w^{+}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}[1-N(X\mid G(T)=k)]\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)\right\}.\tag{21}$$

均衡时,令 V_c^w 为 0,然后解出价格 c,其中积分需要数值近似,并且结果也只能通过数值方法求解.

当从买方的立场考虑问题时,卖方的收益就是买方的损失.但是与期望效用论不同,对于同等货币量的损失和收益使用的是不同的前景价值函数,以表现出投资者的损失厌恶特质.所以同一个期权的前景价值对于买卖双方来说是不一样的,值得注意的是,前景价值只是一种主观概念,并非实际的货币量.从买方角度看,1 份看涨期权的前景价值为:

$$V_c^h=-\int_0^{+\infty}\int_{X+c\mathrm{e}^{rT}}^{+\infty}v^{+}((x-X)-c\,\mathrm{e}^{rT})\mathrm{d}^2w^{+}\left[\sum_{k=y}^{\infty}[1-N(x\mid G(T)=k)]\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)\right]-$$
$$\int_0^{+\infty}\int_X^{X+c\mathrm{e}^{rT}}v^{-}((x-X)-c\,\mathrm{e}^{rT})\mathrm{d}^2w^{-}\left[\sum_{k=y}^{\infty}N(x\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)\right]+$$
$$v^{-}(-c\,\mathrm{e}^{rT})w^{-}\left[\sum_{k=0}^{\infty}N(X\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)\right].\tag{22}$$

方程 $V_c^h=0$ 需要用数值方法求解得到期权价格 c.

2.2 看跌期权定价

在考虑看跌期权时,没有相应的看涨—看跌平价公式可以使用,甚至连其存在性都还是一个问题,即使是在同一视角下.行权价为 X,到期时间为 T 的看跌期权的价格为 p,在 $t=0$ 时刻,期权的空方卖出 1 份看跌期权,得到 p 并且将其以无风险利率 r 进行投资,到期时获得 $p\,\mathrm{e}^{rT}$,并且如果期权的持有方在期权实值的时候行权,卖方需要支付 $X-S_T$.

在这里,到期时,$\Delta s=p\,\mathrm{e}^{rT}$ 就是确定结果,并且可能结果就是 $\Delta x=x-x^{*}=S_T-X$.如果股价小于行权价 X,$\Delta x<0$,意味着卖方有损失,买方有收益.从卖方角度看,期权在行权的时候,给定股票价格 $S_T=x$,前景价值为:

$$\max[v(p\,\mathrm{e}^{rT}+(x-X)),v^{+}(p\,\mathrm{e}^{rT})+v^{-}(x-X)],\tag{23}$$

如前所述,异号时合并的结果总是最大的,而应用于 $p\,\mathrm{e}^{rT}+(x-X)$ 的值函数的形式取决于股价:

$$v(p\,\mathrm{e}^{rT}+(x-X))=\begin{cases}v^{+}(p\,\mathrm{e}^{rT}+(x-X)),x\geq X-p\,\mathrm{e}^{rT},\\ v^{-}(p\,\mathrm{e}^{rT}+(x-X)),x<X-p\,\mathrm{e}^{rT}.\end{cases}\tag{24}$$

如果期权的买方没有行权,那么前景价值为

$$\max[v^{+}(p\,\mathrm{e}^{rT}+0),v^{+}(p\,\mathrm{e}^{rT})+v(0)]=v^{+}(p\,\mathrm{e}^{rT}),\tag{25}$$

因而,从卖方角度看,1 份看跌期权的前景价值为:

$$V_p^w=v^{+}(p\,\mathrm{e}^{rT})w^{+}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}[1-N(X\mid G(T)=k)]\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)\right\}+\int_0^{+\infty}\int_{X-p\mathrm{e}^{rT}}^{X}v^{+}(p\,\mathrm{e}^{rT}+$$
$$(x-X))\mathrm{d}^2w^{+}\left\{\sum_{k=y}^{\infty}[1-N(x\mid G(T)=k)]\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)\right\}-\int_0^{+\infty}\int_0^{X-p\mathrm{e}^{rT}}v^{-}(p\,\mathrm{e}^{rT}+$$
$$(x-X))\mathrm{d}^2w^{-}\left[\sum_{k=y}^{\infty}N(x\mid G(T)=k)\cdot\mathrm{Prob}(G(T)=k)\right].\tag{26}$$

同样的方法可以得到买方角度下 L 份看跌期权的前景价值:

$$V_p^h = v^-(-p\mathrm{e}^{rT})w^-\left[\sum_{k=0}^{\infty}N(X \mid G(T)=k)\cdot \mathrm{Prob}(G(T)=k)\right]-\int_0^{+\infty}\int_{X-p\mathrm{e}^{rT}}^{X}v^-((X-x)-p\mathrm{e}^{rT})\mathrm{d}^2w^-\left[\sum_{k=y}^{\infty}N(x \mid G(T)=k)\cdot \mathrm{Prob}(G(T)=k)\right]+\int_0^{+\infty}\int_0^{X-p\mathrm{e}^{rT}}v^+((X-x)-p\mathrm{e}^{rT})\mathrm{d}^2w^+\left\{\sum_{k=y}^{\infty}[1-N(x \mid G(T)=k)]\cdot \mathrm{Prob}(G(T)=k)\right\}, \tag{27}$$

两个期权价格都需要数值方法求解.

3 数值结果与分析

本文计算了买卖双方视角下的看涨、看跌期权价格.表 1、表 2 分别是欧式看涨、看跌期权在买卖双方视角下的定价结果，并且还考虑了不同的行权价和参数的取值.当设置 $a=b=1,\lambda=1,\gamma=1$ 时，得到了和股价变动不连续的 Black-Scholes 模型(表 1 中第 3 列)相同的结果.当进一步设置 $m=0$ 和 $v^2=0$ 时，得到了和原始 Black-Scholes 模型(表 1 中第 2 列)相同的结果，第 4 列和第 5 列分别是方程(21)式和(22)式以及方程(26)式和(27)式的数值结果，精确度为万分之一.比较了 Black-Scholes 的定价和采用文献[2]考虑的参数值和文献[5]使用的温和态度参数值的结果，参数如下：$S_0=100,\mu=0.050,r=0.050,\sigma=0.200,T=1,\omega=2,m=0.020,v^2=0.020$.在 Black-Scholes 模型中：$a=b=1,\lambda=1,\gamma=1$.Tversky-Kahneman 参数为：$a=b=0.880,\lambda=2.250,\gamma^+=0.610,\gamma^-=0.690$.温和态度(Moderate Sentiment)的参数为：$a=b=0.988,\lambda=1.125,\gamma^+=0.961,\gamma^-=0.969$. 实际应用时，除股价和标的股票的波动率以及到期期限外，无风险利率及期望收益率可以取同期存款利率，跳跃事件发生的期望次数以及每次跳跃的幅度和方差以及行为参数可以用牛顿最速下降法进行以历史成交数据为样本进行参数估计，进而应用到样本外的估计中.

表 1　欧式看涨期权的定价结果

X	BS 参数		T-K 参数		温和态度参数	
	原始	带跳	c_w	c_h	c_w	c_h
70	33.540 1	34.167 1	54.583 0	27.575 5	35.747 2	33.236 0
80	24.588 8	26.011 6	46.695 0	21.021 5	27.595 2	25.203 2
90	16.699 4	19.060 5	39.457 4	15.789 9	20.588 3	18.415 8
100	10.450 6	13.528 5	32.907 6	11.766 6	14.916 2	13.054 1
110	6.040 1	9.381 8	27.062 1	8.747 8	10.567 2	9.063 2
120	3.247 5	6.412 7	21.935 4	6.516 5	7.367 3	6.215 4
130	1.639 6	4.352 4	17.537 8	4.879 8	5.089 1	4.242 5

图 1～4 展示了卖方和买方视角下欧式看涨看跌期权的定价和 BS 定价的结果，在温和态度参数的基础上采用不同的 ω,m 和 v^2. 图 5～10 考虑了值函数和权重函数的不同参数.

通过比较买卖双方对同一个期权在相同条件下的行为定价的结果，可以看出，买方的结果普遍低于卖方的结果，并且如果将这两个结果作为一个区间来看的话，带跳 Black-Scholes 公式得出的值通常是落在区间内的.

值得注意的是，在采用 Tversky-Kahneman 的参数时，卖方过于高估，而买方则过于低估.正如参数的名字那样，温和态度参数使得结果对于 Black-Scholes 的偏离变得温和了许多.总的来说，定价结果正相关于 ω,m,v^2,a 和 b，负相关于 γ^+和 γ^-.特别的，λ 在看涨看跌期权上的影响是相反的，并且在看涨期权上，对于不同的 m 和 v^2 还存在着一定的复归现象.

表 2 欧式看跌期权的定价结果

X	BS 参数		T-K 参数		温和态度参数	
	原始	带跳	p_w	p_h	p_w	p_h
70	0.126 2	0.753 2	3.521 3	0.876 2	0.895 4	0.736 7
80	0.687 2	2.110 0	7.181 8	1.953 0	2.433 9	2.032 4
90	2.310 1	4.671 2	12.114 9	3.739 2	5.231 8	4.470 8
100	5.573 5	8.651 5	18.039 0	6.375 4	9.440 7	8.275 7
110	10.675 3	14.017 1	24.713 3	9.937 4	14.981 0	13.440 9
120	17.395 0	20.560 3	31.963 6	14.431 6	21.631 0	19.785 6
130	25.299 4	28.012 3	39.665 4	19.813 3	29.136 2	27.062 5

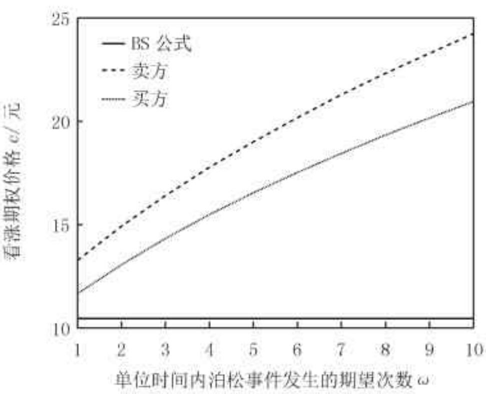

图 1 ω 从 1 到 10 变动时看涨期权定价

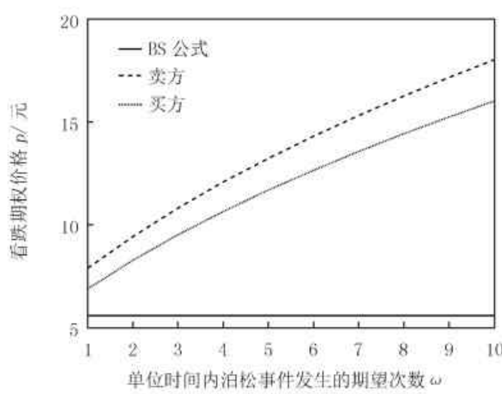

图 2 ω 从 1 到 10 变动时看跌期权定价

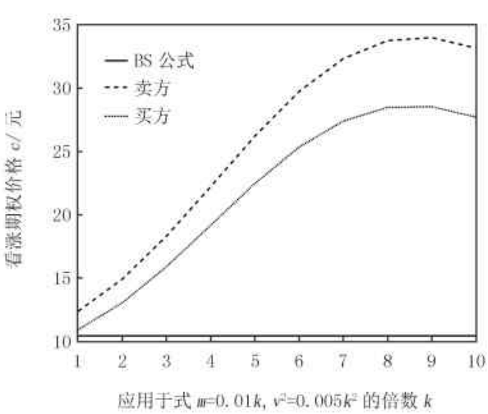

图 3 m 和 v^2 分别从 0.01 到 0.10 和 0.005 到 0.500 变动时的看涨期权定价

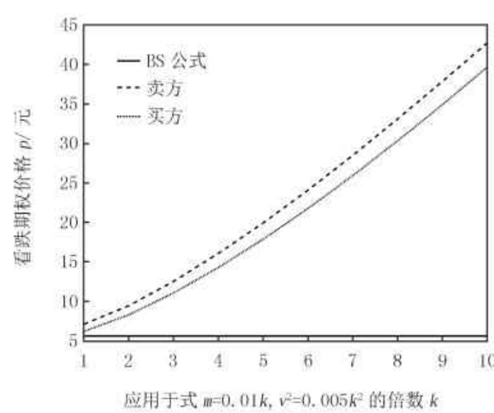

图 4 m 和 v^2 分别从 0.01 到 0.10 和 0.005 到 0.500 变动时的看跌期权定价

4 结 论

通过考虑投资者的风险厌恶,进而可以部分解释相对于 Black-Scholes 模型的定价偏误,前景理论近年来在期权定价方面引起了越来越多的关注,连续累积前景理论在期权定价中成为一种可行的方法.另外还考虑了一种更为一般的情况,即标的股票价格的变动由复合泊松过程来刻画.

从卖方和买方的角度得到了期权价格的区间.这一区间的大小受到权重函数和值函数参数值的影响,在此仅考虑了后者.

还考察了看涨看跌两类期权的价格,并没有使用看涨看跌平价公式,因为公式本身是否存在都是一个值得研究的问题.

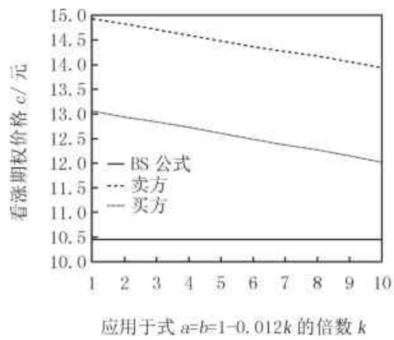

图 5　a 和 b 从 0.988 到 0.880 变动时的看涨期权定价

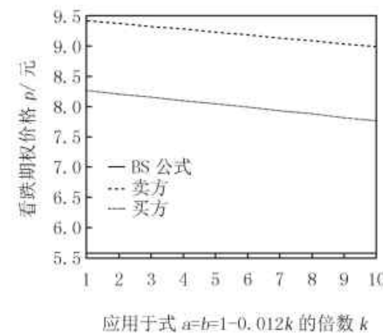

图 6　a 和 b 从 0.988 到 0.880 变动时的看跌期权定价

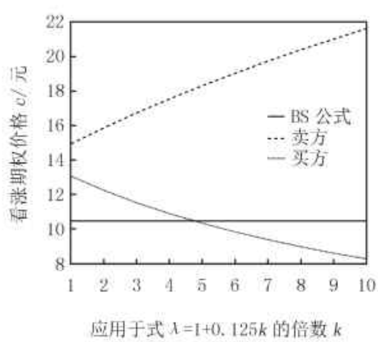

图 7　λ 从 1.125 到 2.250 变动时的看涨期权定价

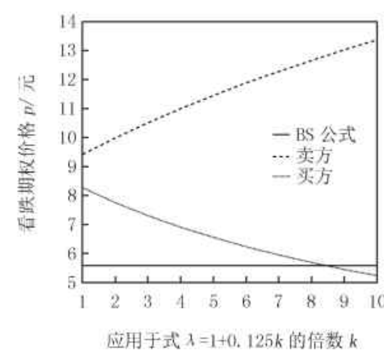

图 8　λ 从 1.125 到 2.250 变动时的看跌期权定价

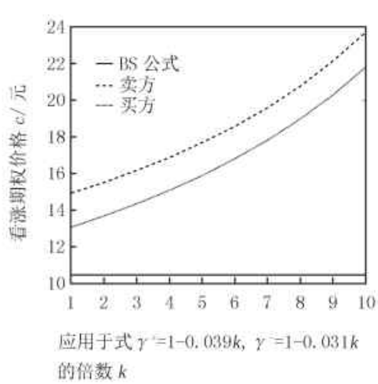

图 9　γ^+ 和 γ^- 分别从 0.961 到 0.610 和 0.969 到 0.690 变动时的看涨期权定价

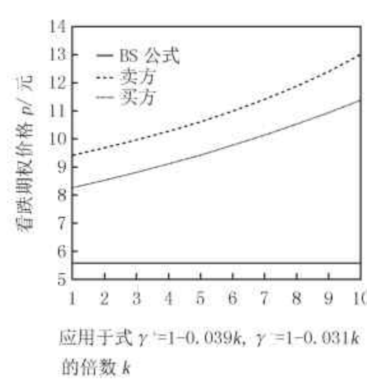

图 10　γ^+ 和 γ^- 分别从 0.961 到 0.610 和 0.969 到 0.690 变动时的看跌期权定价

考虑了这个更为一般的情况后，期权定价结果都普遍变高了，这与期权本身价值随着波动率变大而变大的特点是一致的.最后，期权价格对于参数值的选取是较为敏感的，适当的选取样本区间然后通过市场数据来得到市场的情绪参数是本文模型在应用中值得注意的地方.

参　考　文　献

[1]　Black F，Scholes M.The pricing of options and corporate liabilities[J].Journal of Political Economy，1973，81(3)：637-654.

[2]　Tversky A，Kahneman D.Advances in prospect theory：cumulative representation of the uncertainty[J].Journal of risk and uncertainty，1992，5：297-323.

[3]　Shefrin H，Statman M.Behavioral aspects of the design and marketing of financial products[J].Financial Management，1993，22(2)：

123-134.
[4] Versluis C, Lehnert T, Wolff C C P. A cumulative prospect theory approach to option pricing[EB/OL]. (2010-11-30)[2017-05-16]. http://ssrn.com/abstract=1717015.
[5] Nardon M, Pianca P. A Behavioural Approach to the Pricing of European Options[C]//Corazza M, Pizzi C. International MAF Conference 2012-Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance. Venice: Springer, 2012: 219-230.
[6] Merton R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. J Financial Ecom, 1976, 3: 125-144.
[7] Lo A W, Mackinlary A C. Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test[J]. Review of Financial Studies, 1988, 1: 41-66.
[8] Kahneman D, Tversky A. Prospect theory: an analysis of decision under risk[J]. Econometrica, 1979, 47(2): 263-292.
[9] Barberis N, Huang M. Stocks as lotteries: The implication of probability weighting for security prices[EB/OL]. [2017-05-20]. http://ssrn.com/abstract=649421.
[10] Thaler R H. Mental accounting and consumer choice[J]. Marketing Science, 1985, 4: 199-214.
[11] Thaler R H. Mental accounting matters[J]. Journal of Behavioral Decision Marking, 1999, 12: 183-206.

Option pricing under the market with jump

——based on prospect theory

Guo Wenjing, Lu Tianyu

(School of Finance, Nanjing University of Finance & Economics, Nanjing 210023, China)

Abstract: Given the market in which the price of underlying asset follows jump-diffusion process, while risk attitude, loss aversion and subjective probability of investors are described by value function and weighting function, we derive the pricing equations and numerical simulation solutions of European options.

Keywords: European option; continuous cumulative prospect theory; value function; weighting function; jump-diffusion process

[责任编校 陈留院]