文章编号:1000－2367(2017)02－0018－05 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2017.02.004

离散完整力学系统的 Mei 对称性共形不变性

夏丽莉[1,2]，张伟[1]

(1.北京工业大学 机械工程与应用电子技术学院，北京 100124；
2.河南财政金融学院 物理与电子工程学院，郑州 450046)

摘 要:基于离散完整系统的差分 Euler－Lagrange 方程，研究离散完整力学系统的 Mei 对称性共形不变性和守恒量. 提出了该系统 Mei 对称性共形不变性的定义和确定方程. 结合规范函数和共形因子，得到在无限小单参数点变换群作用下系统的共形不变性导致的守恒量形式. 举例说明结果的应用.

关键词:离散 Noether 定理;Mei 对称性共形不变性；守恒量

中图分类号:O316 **文献标志码**:A

力学系统的对称性问题一直备受关注[1]. 通过对称性可以探求系统的守恒量. Noether[2] 和 Lutzky [3] 揭示了对称性和守恒量之间的关系. 共形不变性是建立在标度不变性、平移不变性、转动不变性和短程相互作用基础之上的一种对称性理论. 作为一类重要的对称性理论，共形不变性是寻求守恒量的现代方法. 1997 年，俄国学者 Galiullin 等人[4]在特殊无限小参数变换下研究了 Birkhoff 系统的共形不变性，讨论了共形不变性与 Lie 对称性之间的关系，并导出了 Noether 守恒量. 目前，有两种主要的共形不变性:一种是 Lie 对称性共形不变性;另一种是 Mei 对称性共形不变性. Lie 对称性共形不变性是比较常见的共形不变性，这种不变性要求系统的解不但要满足共形不变性判定方程，同时也要满足 Lie 对称性条件[5－9]. 共形不变性和 Lie 对称性通过引入的共形因子联系起来，共形因子是共形不变性同时等价于 Lie 对称性的充要条件. Mei 对称性共形不变性不同于 Lie 对称性共形不变性，系统的解在一定条件下要满足共形不变性的条件，同时也要满足 Mei 对称性判定方程 [10－12]. 虽然共形因子都是联系共形不变性和 Lie 对称性、共形不变性和 Mei 对称性的桥梁，但是这两种对称性理论是探究系统方程解的两条不同的路径，需要满足不同的条件才能实现对系统更多守恒量的探究.

由离散差分方程描述的力学系统更接近研究对象的实际情况，更能真实地反映系统的运动规律. 而对于差分方程的可积性问题也因为计算机可视化、量子场论、数学物理、经济学等领域的迫切需求而显得尤为重要. 长期以来，离散动力学系统的差分方程形式和积分理论获得了持续的发展[13－16]. Mei 对称性 (形式不变性)[17]是一种新的对称性理论，是基于运动微分方程中的函数在无限小变换下仍然满足原方程的一种不变性质. 连续系统的 Mei 对称性理论取得了充分的的发展[1]. 鉴于离散力学系统的积分理论的重要性，差分系统的 Mei 对称性理论也开始发展起来. 施沈阳[18]研究了离散完整系统的 Mei 对称性和守恒量. 文献[16]研究了带有非保守约束的离散动力学系统的 Mei 对称性和守恒量. 离散系统的 Mei 对称性理论为探求离散系统的物理性质提供了一条重要的途径. 文献[19]首次把共形不变性理论推广到离散动力学，研究了离散完整系统的 Mei 对称性共形不变性. 在此基础上，本文进一步研究完整约束力学系统的共形不变性. 给出离散 Lagrange 系统的 Mei 对称性共形不变性导致守恒量的条件，最后给出例子说明结果的应用.

收稿日期:2016-07-10;**修回日期**:2016-09-25.

基金项目:国家自然科学基金(11502071;11290152);河南省高等学校重点项目(17A140015);北京市朝阳区博士后基金(2016ZZ-01-17).

作者简介:夏丽莉(1980－),女,江苏徐州人,河南财政金融学院讲师,博士,主要从事物理和力学中的数学方法研究,E-mail:xll2004@126.com.

通信作者:张伟,男,北京工业大学教授,博士,主要从事动力学与控制方面的研究,E-mail:sandyzhang0@yahoo.com.

1　离散完整系统的动力学方程

考虑序列 (t,q) 在空间 $\widetilde{Z}$ 上，力学系统坐标由独立变量 t 和非独立变量 $q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 组成. 在离散变量空间中，离散变量形式为$(t^-,t,t^+,t^{++},\cdots,q^-,q,q^+,q^{++},\cdots)$的情况，每个离散节点之间的间距为 $h>0$(广义变量 q 方向)，即网格长度. 左右离散移位算符和左右离散微分算分别为

$$\underset{+h}{S}=\mathrm{e}^{hD}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{h^s}{S!}D^s,\ \underset{-h}{S}=\mathrm{e}^{-hD}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-h)^s}{S!}D^s. \tag{1}$$

$$\underset{-h}{D}=\frac{1-\underset{-h}{S}}{h}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{h^{i-1}}{S!}D^i,\ \underset{+h}{D}=\frac{\underset{+h}{S}-1}{h}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-h)^{i-1}}{S!}D^i. \tag{2}$$

算符 $\underset{+h}{S},\underset{-h}{S},\underset{+h}{D}$ 和$\underset{-h}{D}$ 满足关系式$\underset{+h}{D}=\underset{-h}{D}\underset{+h}{S}$ 和$\underset{-h}{D}=\underset{+h}{D}\underset{-h}{S}$.

对于离散的变量$(t^-,t,t^+,t^{++},\cdots,q^-,q,q^+,q^{++},\cdots)$，令 $q_{s,t}=\underset{+h}{D}(q_s)=\dfrac{q_s^+-q_s}{h^+}$，则对 q 的全导数可表示为

$$\frac{\delta}{\delta q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}-\sum_{i=1}^{\infty}(-h)^{i-1}D^i\left(\frac{\partial}{\partial q_{s,t}}\right)=\frac{\partial}{\partial q_i}-\underset{-h}{D}\left(\frac{\partial}{\partial q_{s,t}}\right), \tag{3}$$

即动力学系统的离散 Euler 算子. 令 $E_s^d=\dfrac{\partial}{\partial q_i}-\underset{-h}{D}\left(\dfrac{\partial}{\partial q_{s,t}}\right)$，算子(3)作用在系统 Lagrange 函数上，离散保守动力学系统方程可表示为

$$E_s^d(L_d)=0. \tag{4}$$

函数 $L_d=L_d(t,q_s,t_{s,t})$ 为有限差分 Lagrange 函数. 如果系统受到离散的非势广义约束力 $Q_{s,d}$，则完整力学系统的有限差分方程为

$$\frac{\partial L_d}{\partial q_s}-\underset{-h}{D}\left(\frac{\partial L_d}{\partial q_{s,t}}\right)=Q_{s,d}, \tag{5}$$

称之为均匀网格下的完整约束系统的广义差分方程.

2　离散完整系统的 Mei 对称性共形不变性

在探寻动力学系统的守恒量过程中，梅凤翔先生给出了具有重要意义的 Mei 对称性概念[17]. Mei 对称性是运动微分方程中函数(如 Lagrange 函数、非势广义力、广义约束力等)在无限小变换下的不变性. 下面我们引入独立变量 t 和非独立变量 $\boldsymbol{q}$ 的变化形式

$$t*=t+\varepsilon\xi(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),q*_s(t*)=q_s+\varepsilon\eta_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{6}$$

其中，ε 是无限小参数，ξ,η_s 为无限小生成元. 离散动力学系统的 Mei 对称性理论近年来取得了一定的进展[19,20]. 对于离散完整系统，在无限小变换(6)下，忽略高阶无穷小项，可以得到离散完整系统的 Mei 对称性共形不变性判定方程

$$E_s^d\{p_{rX}(L_d)\}-p_{rX}(Q_{s,d})\mid_{E_s^d(L_d)-Q_{s,d}=0}=0, \tag{7}$$

其中

$$p_{rX}=\xi\frac{\partial}{\partial t}+\eta_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\xi^-\frac{\partial}{\partial t^-}+\eta_s^-\frac{\partial}{\partial q_s^-}+\xi^+\frac{\partial}{\partial t^+}+\eta^+\frac{\partial}{\partial q_s^+} \tag{8}$$

是变量 $(t,\boldsymbol{q})$ 和无限小生成元 $\xi^-=\xi(t^-,\boldsymbol{q}^-)$、$\eta_s^-=\eta_s(t^-,\boldsymbol{q}^-)$、$\xi^+=\xi(t^+,\boldsymbol{q}^+)$ 和 $\eta_s^+=\eta_s(t^+,\boldsymbol{q}^+)$ 的向量差分形式.

定义 1　对于离散完整力学系统的方程(5)，如果存在非奇异矩阵 $M_{s,d}^k$ 满足

$$E_s^d\{p_{rX}(L_d)\}-p_{rX}(Q_{s,d})=M_{s,d}^k\{E_s^d(L_d)-Q_{s,d}\}, \tag{9}$$

则方程(5)在无限小单参数点变换(6)下是 Mei 对称性共形不变的. 方程(9)是系统的 Mei 对称性共形不变性的确定方程. 其中 $M_{s,d}^k$ 是共形因子.

定理 1　对于离散的 Lagrange 函数 $L_d=L_d(t,q_s,q_{s,t})$，如果无限小生成元 ξ 和 η_s 满足

$$\begin{cases} p_{rX}(L_d) = ML_d + C\varphi_d, \\ p_{rX}(Q_{s,d}) = MQ_{s,d}, \end{cases} \tag{10}$$

则方程(5)是 Mei 对称性共形不变的. 其中 C 和 M 是常量，函数 $\varphi_d = \varphi_d(t,t^+)$.

证明 欧拉算子作用在函数 $\varphi_d = \varphi_d(t,t^+)$ 上，有

$$E_s^d(\varphi_d) = \frac{\partial \varphi_d}{\partial q_s} - \underset{-h}{D}\left(\frac{\partial \varphi_d}{\partial q_{s,t}}\right) = 0. \tag{11}$$

由方程 (9)～(11)可得

$$\begin{aligned} E_s^d\{p_{rX}(L_d)\} - p_{rX}(Q_{s,d}) = ME_s^d(L_d) + CE_s^d(\varphi_d) - MQ_{s,d} = \\ ME_s^d(L_d) - MQ_{s,d} = M_{s,d}^k\{E_k^d(L_d) - Q_{k,d}\}, s,k = 1,\cdots,n, \end{aligned} \tag{12}$$

其中，$M_{s,d}^k = \delta_s^k M, \delta_s^k = \begin{cases} 1, s = k, \\ 0, s \neq k. \end{cases}$ 因此方程(1)是 Mei 对称性共形不变的.

定理 2 如果离散完整系统是 Mei 对称性共形不变的，那么也是 Mei 对称的.

证明 将方程 (5)带入到(12)式，可得 Mei 对称性判定方程

$$\{E_s^d[p_{rX}(L_d)] - p_{rX}(Q_{s,d})\}\big|_{E_s^d(L_d)-Q_{s,d}=0} = M_{s,d}^k\{E_s^d(L_d) - Q_{s,d}\}\big|_{E_s^d(L_d)-Q_{s,d}=0} = 0. \tag{13}$$

证毕.

3 完整系统的离散 Noether 定理

大量的文献研究了对称性和守恒量之间的关系. Noether 对称性理论被广泛应用于经典力学[20-21]和场论中[22-23]. 离散系统的共形不变性可以用来寻找离散系统的守恒量. 对于 Mei 对称性共形不变性，可以通过 Noether 定理来获得守恒量. 根据 Noether 定理的内容，在有限或连续的变群 G_α 下变量变分保持对称性，则会存在 α 个线性关系. 这个定理的特点是:对称性和守恒量具有一一对应关系. 对于完整力学系统，等式

$$\begin{aligned} p_{rX}(L_d) + L_d\underset{+h}{D}(\xi) + Q_{s,d}(\eta - \underset{+h}{D}(q_{s,d})\xi) + \underset{+h}{D}(G_s^d) \equiv \xi\left(\frac{\partial L_d}{\partial t} + \frac{h^-}{h^+}\frac{\partial L_d^-}{\partial t} + \underset{+h}{D}(q_{s,d})Q_{s,d} - \underset{+h}{D}(L_d)\right) + \\ \eta\left(\frac{\partial L_d}{\partial q_s} + \frac{h^-}{h^+}\frac{\partial L_d^-}{\partial q^s} + Q_{s,d}\right) + \underset{+h}{D}\left(h^-\ \eta\frac{\partial L_d^-}{\partial q_s} + h^-\ \xi\frac{\partial L_d^-}{\partial t} + \xi L_d^- + G_s^d\right) \end{aligned} \tag{14}$$

成立. 这里 $L_d = L_d(t,q_s,q_{s,t}) = L_d(t,t^+,q_s,q_s^+)$. 如果(14) 式左端为 0，即

$$p_{rX}(L_d) + L_d\underset{+h}{D}(\xi) + Q_{s,d}(\eta - \underset{+h}{D}(q_{s,d})\xi) + \underset{+h}{D}(G_s^d) = 0, \tag{15}$$

则称为系统的 Noether 等式. 右端为 0,则有

$$\xi\left(\frac{\partial L_d}{\partial t} + \frac{h^-}{h^+}\frac{\partial L_d^-}{\partial t} + \underset{+h}{D}(q_{s,d})Q_{s,d} - \underset{+h}{D}(L_d)\right) + \eta\left(\frac{\partial L_d}{\partial q_s} + \frac{h^-}{h^+}\frac{\partial L_d^-}{\partial q^s} + Q_{s,d}\right) = 0, \tag{16}$$

也称之为系统的广义极值方程. 则系统有离散的守恒量形式如下

$$\underset{+h}{D}\left(h^-\ \eta\frac{\partial L_d^-}{\partial q_s} + h^-\ \xi\frac{\partial L_d^-}{\partial t} + \xi L_d^- + G_s^d\right) = 0. \tag{17}$$

即

$$I = h^-\ \eta\frac{\partial L_d^-}{\partial q_s} + h^-\ \xi\frac{\partial L_d^-}{\partial t} + \xi L_d^- + G_s^d = \text{const}. \tag{18}$$

差分方程 (18) 称之为系统的 Noether 守恒量的离散形式.

定理 3 对于满足共形因子的无限小生成元 ξ、η_s或者是生成元向量 p_{rX}，如果存在规范函数 $G_s^d = G_s^d(t,t^+,q_s,q_s^+)$ 满足离散 Noether 等式 (15)，那么离散方程 (5) 导致守恒量(18)式成立.

对于离散的完整系统，离散 Noether 定理给出了系统的对称性导致守恒量的条件. 这个条件说明了不是所有的对称性都能导致守恒量的原因.

4 例 子

一般完整系统的离散 Lagrange 函数为

$$L_d=\frac{1}{2}\left(\frac{q_1^+-q_1}{h}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{q_2^+-q_2}{h}\right)^2. \tag{19}$$

系统受到约束力为

$$\begin{cases}Q_{1,d}=\left(\frac{q_1^++q_1}{2}\right)^2,\\ Q_{2,d}=t^+.\end{cases} \tag{20}$$

取无限小生成元向量

$$\xi=-2t,\eta_1=q_1,\quad \eta_2=q_2, \tag{21}$$

$$\xi=1,\quad \eta_1=0,\quad \eta_2=q_2, \tag{22}$$

$$\xi=0,\quad \eta_1=0,\quad \eta_2=q_2, \tag{23}$$

$$\xi=1,\quad \eta_1=0,\quad \eta_2=0. \tag{24}$$

生成元向量 (21)～(24)式满足确定方程 (9). 因此(21)～(24)式是 Mei 对称性的. 存在规范函数 $G_s^d=G_s^d(t,t^+,q_s,q_s^+)$ 和无限小生成元 ξ,η,或者对称性算子 p_{rX} 满足 Noether 等式 (15)，则有守恒量

$$I_1=\frac{q_1(q_1-q_1^-)}{h}+\frac{q_2(q_2-q_2^-)}{h}-t\left(\frac{q_1-q_1^-}{h}\right)^2-t\left(\frac{q_2-q_2^-}{h}\right)^2-2t\left(\frac{q_1+q_1^-}{2}\right)^2+2ht=\text{const}, \tag{25}$$

$$I_2=\frac{q_2-q_2^-}{h}+L_d^-+t=\text{const}, \tag{26}$$

$$I_3=\frac{q_2-q_2^-}{h}=\text{const}, \tag{27}$$

$$I_4=L_d^-+t=\text{const}. \tag{28}$$

对于(21)式，有

$$p_{rX}(L_d)=2L_d-4t^+, \tag{29}$$

因此

$$E_s^d\{p_{rX}(L_d)\}=E_s^d(2L_d-4t^{+2})=2E_s^d(L_d)=M_{s,d}^kE_s^d(L_d)=0, \tag{30}$$

所以系统是 Mei 对称性也是 Mei 对称性共形不变的. 共形因子为 $M_{s,d}^k=2\delta_s^kM=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$.

由(15)式可得

$$-4t^++\underset{+h}{D}(G)=0,\quad G=2t^{+2}-2ht^+. \tag{31}$$

从守恒量形式(18)式，可得(25) 式的 I_1. 而生成元向量 (22)～(24)式不满足 Mei 对称性共形不变性判定方程(7).

守恒量 (25)～(28)式是离散版本的守恒量. 这提供了一种构造保守系统的差分守恒量的方法，这种方法对于构造系统的数值算法也非常有意义. 对于离散系统的共形不变性，通过 Noether 定理寻找离散的不变量并非易事，特别对于非线性的系统就更加困难. 通过共形不变性寻找守恒量的困难在于:生成元向量不仅要满足 Noether 等式还要满足共形不变性判定方程.

5 结　论

本文给出了离散完整系统的 Mei 对称性共形不变性. 提供了一种寻找离散系统守恒量的新方法. 离散完整系统 Mei 对称性共形不变性不总是能导致守恒量. 本文给出了 Mei 对称性共形不变性导致守恒量的条件，即:生成元向量不仅要满足 Noether 等式还要满足 Mei 对称性共形不变性判定方程.

参 考 文 献

[1] MEI F X. Symmetries and conserved quantities of constrained mechanical systems[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2004.

[2] NOETHER E. Invariante variationsprobleme[J]. Gott Nachr, 1918, 2: 235-257

[3] LUTZKY M. Dynamical symmetries and conserved quantities[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1979, 12(7):

973-981.

[4] GALIULLIN A S. GAFAROV G G, MALAISHK R P, et al. Analytical dynamics of helmholtz, Birkhoff and Nambu systems[M]. Moscow: UFN, 1997.

[5] CAI J E, MEI F X. Conformal invariance and conserved quantity of Lagrange systems under Lie point transformation. [J]. Acta Phys Sin, 2008(9): 5369-5373.

[6] CAI J L. Conformal invariance and conserved quantities of general holonomic systems[J]. Chin Phys Lett, 2008, 25(5): 1523-1526.

[7] CAI J L, LUO S K, MEI F X. Conformal invariance and conserved quantity of Hamilton systems[J]. Chin Phys B, 2008, 17(9): 3170-3174.

[8] HE G, MEI F X. Conformal invariance and integration of first-order differential equations[J]. Chin Phys B, 2008, 17(8): 2764-2765.

[9] FU J L, WANG X J, XIE F P. Conserved quantities and conformal mechanico-electrical systems[J]. Chin Phys Lett, 2008, 25(7): 2413-2416.

[10] CAI J. Conformal invariance of Mei symmetry for the non-holonomic systems of non-Chetaev's type[J]. Nonlinear Dynamics, 2011, 69(1): 487-493.

[11] LUO Y P, FU, J L. Conformal invariance and conserved quantities of Appell systems under second-class Mei symmetry[J]. Chin Phys B, 2010, 19(9): 090304.

[12] HUANG W L, CAI J L. Conformal invariance and conserved quantity of Mei symmetry for higher-order nonholonomic system[J]. Acta Mechanica, 2011, 223(2): 433-440.

[13] CADZOW J A. Discrete calculus of variations[J]. International Journal of Control, 1970, 11(3): 393-407.

[14] MAEDA S. On quadratic invariants in a discrete model of mechanical systems[J]. Math Japan, 1979, 23: 587-606.

[15] FU J, CHEN L, CHEN B. Noether-type theory for discrete mechanico-electrical dynamical systems with nonregular lattices[J]. Science China Physics, Mechanics and Astronomy, 2010, 53(9): 1687-1698.

[16] XIA L L, CHEN L Q. Mei symmetries and conserved quantities for non-conservative Hamiltonian difference systems with irregular lattices[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 70(2): 1223-1230.

[17] 梅凤翔. Form Invariance of Lagrange System[J]. 北京理工大学学报(英文版), 2000, 9(2):120-124.

[18] SHI S Y, CHEN L Q, FU J L. Mei Symmetry of General Discrete Holonomic System[J]. Communications in Theoretical Physics, 2008, 50(3): 607-610.

[19] XIA L L, CHEN L Q. Conformal invariance of Mei symmetry for discrete Lagrangian systems[J]. Acta Mechanica, 2013, 224(9): 2037-2043.

[20] MEI F X. Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems[M]. Beijing : Science Press, 1999.

[21] SARLET W, CANTRIJN F. Generalizations of Noether's Theorem in Classical Mechanics[J]. SIAM Review, 1981, 23(4): 467-494.

[22] LI Z P. Symmetries in constrained canonical systems[M]. Beijing: Science Press, 2002.

[23] 刘长欣，夏丽莉. 场论中的离散积分理论研究[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2016,44(2): 53-56.

Conformal Invariance of Mei Symmetry for Discrete Holonomic Systems

Xia Lili[1,2], Zhang Wei[1]

(1. College of Mechaniacl Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124,China;
2. College of Physical and Electronic Engineering , Henan Institute of Finance and Banking, Zhengzhou 450046, China)

Abstract: Based the difference Euler-Lagrange equations on regular lattices, the conformal invariance of the Mei symmetry and the conserved quantities are investigated for discrete holonomic systems. The conformal invariance of the Mei symmetry is defined for the discrete holonomic systems. The criterion equations and the determining equations are proposed. The conserved quantities of the systems are derived from the structure equation governing the gauge function. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: discrete Noether theorem; the conformal invariance of the Mei symmetry; conserved quantity

[责任编辑 杨浦]