

# 低通滤波器对时延耦合振子系统振幅死亡的影响

刘维清<sup>1</sup>,刘汉昌<sup>1</sup>,朱云<sup>1</sup>,许海燕<sup>2</sup>

(1.江西理工大学 理学院,江西 赣州 341000;2.赣南卫生健康职业学院,江西 赣州 341000)

**摘要:**研究具有不同截止频率的低通滤波器对时延耦合周期和混沌振子的振幅死亡的影响.结果表明,当耦合振子系统的耦合通道具有低通滤波特性时,其截止频率的减小有利于耦合振子系统走向振幅死亡.低通滤波效应可以使原本不存在振幅死亡的时延耦合振子系统产生振幅死亡,使原本存在的振幅死亡岛的区域面积增加.研究成果可以为理解生物系统的节律产生和控制提供理论支持.

**关键词:**振幅死亡;时间延迟;低通滤波器

**中图分类号:**O415.5

**文献标志码:**A

自然界许多系统可以用耦合非线性振子来描述,虽然组成系统的每个个体具有各自的振荡节律,但通过各种形式的相互作用后,耦合振子系统可以表现出有丰富的自组织动力学行为,如各种形式的同步<sup>[1-3]</sup>和振幅死亡<sup>[4-5]</sup>.其中耦合振子系统的振幅死亡现象对理解生命节律、工程减振、斑图结构形成和系统老化具有重要的意义.

耦合振子系统的振幅死亡是指相互作用的振子系统,由于个体间存在频率失配<sup>[6]</sup>或耦合作用信号传递产生的时间延迟<sup>[7]</sup>或耦合通道的响应特性<sup>[8-9]</sup>等因素影响下而停止振动的现象.有证据表明神经退行性疾病的产生与互相耦合作用的神经元的振幅死亡密切相关<sup>[10]</sup>,且可以通过压制某些不利的振荡态来控制治疗这些疾病<sup>[11]</sup>.自从瑞利勋爵<sup>[12]</sup>首次观先察到管风琴的相邻管子会因相互作用而出现消音现象以来,人们在许多耦合振子系统中(如生物系统<sup>[13]</sup>,化学系统<sup>[14]</sup>,激光系统<sup>[15]</sup>,工程系统<sup>[16]</sup>)观察到振幅死亡现象.耦合振子系统振幅死亡的产生条件不仅受系统之间的频率失配的空间分布影响<sup>[17-18]</sup>,还受耦合作用的不对称性<sup>[19]</sup>和网络结构的影响.在规则网络<sup>[20]</sup>、随机网络<sup>[21]</sup>和无标度网络<sup>[22]</sup>中,耦合系统走向振幅死亡的过程和条件均有所不同.此外,耦合作用的信号传递通道的特性对振幅死亡也具有显著影响.耦合通道的特性主要有幅频特性和相频特性.耦合通道的相频特性中,信号通道对所传递信号产生的时间延迟会导致耦合系统由振荡态走向振幅死亡态<sup>[23]</sup>.邹为等人<sup>[24]</sup>发现部分耦合通道存在时间延迟有利于促进振幅死亡.在排斥耦合中存在时间延迟时,耦合系统会从振荡态走向振幅死亡态.耦合通道的幅频特性<sup>[25]</sup>对振幅死亡的稳定性有较大的影响.当耦合通道具有低通滤波特性时,会抑制频率高于某一临界值的信号,从而对耦合振子系统的动力学行为产生影响<sup>[26]</sup>.如在平均场耦合作用下,具有不同截止频率的低通滤波器会使系统从振荡态过渡到各种形式的振幅死亡<sup>[27]</sup>.同时低通滤波器也可以使耦合振子系统产生振荡态与振荡死亡态共存现象.而在时延系统中,对自反馈信号引入低通滤波特性的通道后,可以使耦合振子的振幅死亡区域减小甚至消失<sup>[28]</sup>.低通滤波器是否可以使有时延的耦合系统的振幅死亡区域增大?为了弄清这一问题,以时延耦合朗道周期振子为模型,考虑耦合通道的低通滤波特性对耦合振子系统动力学的影响.结果表明,当耦合振子系统的耦合通道具有低通滤波特性时,其截止频率的减小有利于耦合振子系统走向振幅死亡.

## 1 模型

为了更好地研究耦合通道的滤波特性对耦合时延系统振幅死亡的影响,引入耦合朗道振子模型为研究

收稿日期:2021-09-22;修回日期:2021-12-08.

基金项目:国家自然科学基金(11765008);江西省科技厅重点项目(20202ACBL201004).

作者简介:刘维清(1977—),男,江西兴国人,江西理工大学教授,博士,研究方向为理论物理,E-mail:lwq\_jx@163.com.

通信作者:刘汉昌(1995—),男,江西理工大学硕士研究生,研究方向为非线性电路与系统,E-mail:511141631@qq.com.

对象

$$\begin{aligned} \dot{Z}_j(t) &= (1 + i\omega_j - |Z_j(t)|^2)Z_j(t) + \epsilon(S_k(t - \tau) - Z_j(t)), \\ \dot{S}_k(t) &= \alpha^{-1}(-S_k(t) + Z_k(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $j=1,2, k=1,2$  表示耦合振子数,且  $j \neq k$ ,  $Z_j(t) = x_j(t) + iy_j(t)$  为振子  $j$  的复变量,  $\epsilon$  为振子之间的相互作用强度,  $\tau$  为耦合通道的时间延迟量,  $\alpha^{-1}$  为低通滤波器的截止频率,  $S_k(t)$  为耦合通道对  $Z_k(t)$  进行滤波后的输出信号. 滤波器对频率低于  $\alpha^{-1}$  的信号会进行抑制.  $\omega_j$  为振子  $j$  的振荡频率  $\omega_j$ , 对于给定不为 0 的频率  $\omega_j$ , 单个子系统会以频率  $\omega_j$  作周期振荡. 当通道不存在滤波特性时, 即  $(\alpha = 0)$  时,  $S_k(t) = Z_k(t)$ .

## 2 理论分析

为了研究耦合通道的滤波特性对有时延的耦合振子振幅死亡的影响, 先考查耦合振子系统固定点  $(0, 0)$  的稳定性. 令  $Z_1 = Z_2 = 0, S_1 = S_2 = 0$ , 并引入微扰量  $\xi_i$ , 则微扰的动力学演化可由其特征方程

$$\begin{vmatrix} 1 + i\omega_1 - \epsilon - \lambda & 0 & 0 & \epsilon e^{-\lambda\tau} \\ \alpha^{-1} & -\alpha^{-1} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon e^{-\lambda\tau} & 1 + i\omega_2 - \epsilon - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-1} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

确定. 考虑 2 个全同耦合振子, 有  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , 方程(2)可简化为

$$(1 + i\omega - \epsilon - \lambda)(\alpha^{-1} + \lambda) = \pm \alpha^{-1} \epsilon e^{-\lambda\tau}. \quad (3)$$

特别地, 当  $\alpha = 0$  时, 截止频率趋向于无穷, 可以看成是耦合通道对通过其的信号  $Z_j$  没有滤波作用. 此时, 耦合振子的特征方程<sup>[7]</sup>可以写成

$$1 + i\omega - \epsilon - \lambda = \pm \epsilon e^{-\lambda\tau}. \quad (4)$$

振幅死亡域对应于方程(4)中实部小于 0 的特征值  $\lambda$ , 所以令  $\lambda$  的实部为 0 可得振幅死亡与振荡区域的临界线

$$\tau_a = \frac{\arccos(1 - \epsilon^{-1})}{\omega - \sqrt{\epsilon^2 - (\epsilon - 1)^2}}, \tau_b = \frac{\pi - \arccos(1 - \epsilon^{-1})}{\omega - \sqrt{\epsilon^2 - (\epsilon - 1)^2}}. \quad (5)$$

振幅死亡区域为(5)式中 2 曲线所围区域. 若 2 曲线不相交, 则耦合振子系统在此参数下不存在振幅死亡. 在振子振荡频率为  $\omega = 4$  时,  $\tau \sim \epsilon$  参数空间中实线  $\tau_a$  和虚线  $\tau_b$  没有共同的区域, 所以耦合系统在此频率下没有振幅死亡岛, 不存在振幅死亡现象如图 1(a)所示.

当  $\alpha \neq 0$  时, 耦合通道存在低通滤波特性, 此时耦合振子振幅死亡区域的临界线可由方程(3)中使特征值实部等于 0 得到. 由于该方程是超越方程, 无法得到解析的结果, 可通过数值计算得到滤波器具有不同截止频率时的振幅死亡区域.

## 3 耦合通道滤波特性对耦合时延系统振幅死亡岛的影响

为了探讨耦合通道的低通滤波特性对时延耦合振子系统的振幅死亡区域的影响, 分别计算振荡频率为  $\omega = 7, 9$  时, 通道的低通滤波器的截止频率  $\alpha^{-1} = 30, 40, 60, 80$ , 在参数空间  $(\tau, \epsilon)$  振幅死亡岛的区域. 如图 2(a, b)可知, 随着低通滤波器的截止频率减小, 与没有低通滤波器通道时的振幅死亡岛相比(粗实线所围区域), 振幅死亡岛的面积逐渐增加. 因此, 通道的滤波特性有利于耦合振子的振幅死亡.

为了更好地确定耦合通道的低通滤波器的截止频率对振幅死亡岛的影响, 引入了归一化参量  $R = S(\alpha)/S_0$ ; 其中  $S(\alpha)$  表示低通滤波器的截止频率为  $\alpha^{-1}$  时, 振幅死亡岛的区域面积,  $S_0$  表示参数给定的参数范围  $\tau \in [0, 0.9], \epsilon \in [0, 35]$  的区域总面积. 在不同振荡频率下,  $R$  和  $\alpha$  的函数关系如图 3 所示. 结果表明, 对于具有不同振荡频率的振子系统, 振幅死亡岛的面积会随着低通滤波器的截止频率  $\alpha^{-1}$  的减小先快速增加, 然后缓慢增加至某一稳定值. 频率越大, 最终稳定的死亡区域面积越大, 且达到稳定值所需的截止频率  $\alpha^{-1}$  越大. 注意到当  $\omega = 3$  时耦合振子系统在无通道滤波器时不存在振幅死亡现象, 而加入通道滤波特性后, 随着

截止频率  $\alpha^{-1}$  减小到 3.32 时才开始出现振幅死亡岛.因此,低通滤波器有利于 2 个耦合时延振子产生振幅死亡.值得注意的是邹为等人<sup>[28]</sup>发现通道的低通滤波器截止频率减少有利于促进耦合振子振荡,减小振幅死亡区域.其低通滤波器是对自反馈的信号进行滤波,而本文中的低通滤波器是对来自耦合振子的信号进行滤波,在实际耦合系统中更具普适性.

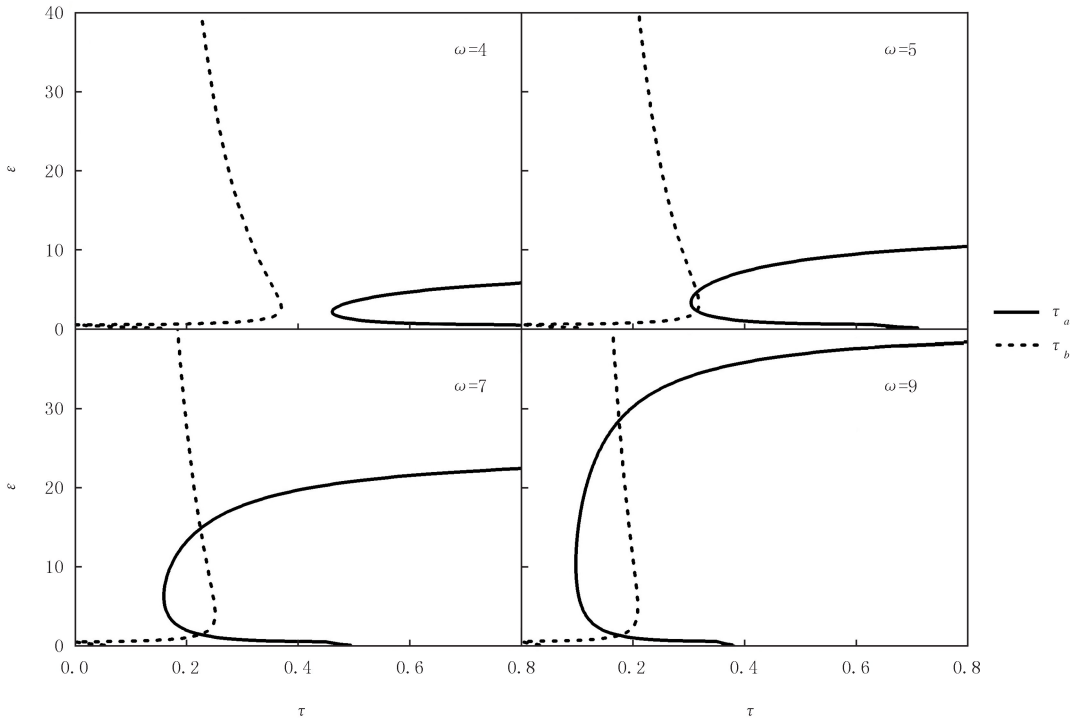


图1 不同  $\omega$  下, 耦合振子系统在参数空间中  $\varepsilon - \tau$  的振幅死亡区域

Fig.1 Amplitude death region of the coupled oscillators in the parameter spaces  $\varepsilon - \tau$  for different  $\omega$

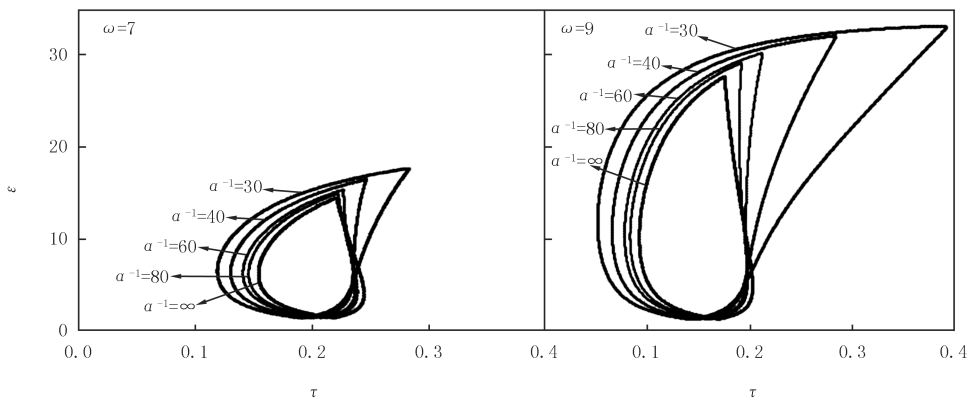


图2  $\omega=7, 9$ 时, 耦合振子系统在参数空间  $\varepsilon - \tau$  的振幅死亡区域

Fig.2 Amplitude death region of the coupled oscillators in the parameter spaces  $\varepsilon - \tau$  for  $\omega=7, 9$  respectively

#### 4 时延混沌振子中滤波器对振幅死亡岛的影响

为了进一步研究耦合通道低通滤波器对时延耦合振子系统振幅死亡的影响的普适性,考查耦合混沌振子系统,以耦合 Rössler 振子系统为例,

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \omega_i(-y_i - z_i), \\ \dot{y}_i &= \omega_i(x_i + ay_i) + \epsilon(S_k(t - \tau) - y_i), \\ \dot{z}_i &= \omega_i(b + z_i(x_i - c)), \\ \dot{S}_k &= \alpha^{-1}(-S_k + y_k). \end{aligned} \tag{6}$$

其中  $i=1,2, k=1,2$  表示耦合振子数,且  $i \neq k$ . 不失一般性,系统参数在  $a=b=0.1, c=14$  时,单个 Rössler 系统具有 1 个混沌吸引子和 1 个不稳定焦点  $P(x^*, y^*, z^*)$ , 其中  $x^* = -ay^*, y^* = -z^*, z^* = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a}$ .  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  是耦合振子的时间尺度, 决定混沌系统的主频.

没有时延和通道滤波特性时,耦合全同混沌振子会随着耦合强度的增加而走向完全同步态.当耦合通道只存在时间延时而无低通滤波特性时,耦合系统会在参数空间  $(\tau, \epsilon)$  存在振幅死亡区域如图 4(a) 中的粗实线所包围区域.耦合通道同时存在时延和低通滤波特性时,随着滤波器的截止频率  $\alpha^{-1}$  减少,耦合振子系统的振幅死亡区域增加.随着截止频率  $\alpha^{-1}$  的减少,振幅死亡区域先快速增大,然后缓慢增加,且单个振子的振荡频率越大,振幅死亡区域的面积也越大,其变化规律与前面耦合周期振子的结果相似.与耦合周期振子的情形不同的是,截止频率较小时,耦合振子的振幅死亡岛的面积才趋于稳定值.

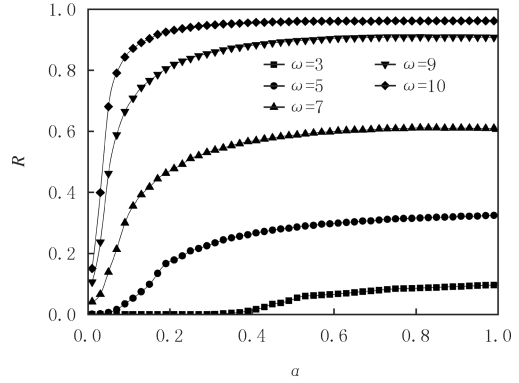
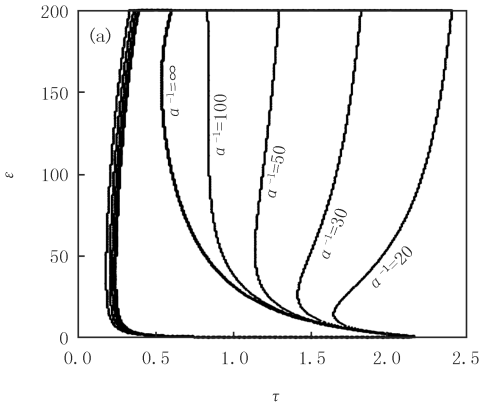


图3 不同  $\omega$  时, 振幅死亡区域占比  $R$  随  $\alpha$  的变化关系  
Fig.3 The ratio of amplitude death region  $R$  versus parameter  $\alpha$  for different  $\omega$

图4 死亡振幅死亡区域随  $\alpha$  的变化

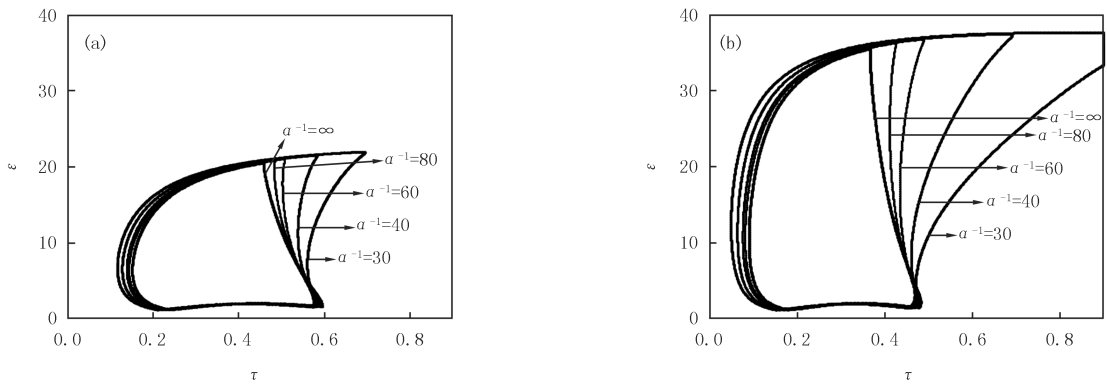
Fig.4 The ratio of amplitude death region is affected by  $\alpha$

### 5 全联通网络中滤波器对振幅死亡岛的影响

为了研究耦合通道的滤波特性对振幅死亡影响的一般性,进一步讨论耦合全连通网络.简单起见,以  $N=3$  为例,讨论全连通耦合网络模型中的朗道振子振幅死亡现象.

$$\dot{Z}_j = (1 + i\tau\omega - |Z_j|^2)Z_j + \frac{\epsilon}{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N [S_k(t - \tau) - Z_j(t)], \dot{S}_k = \alpha^{-1}(-S_k + Z_k), \tag{7}$$

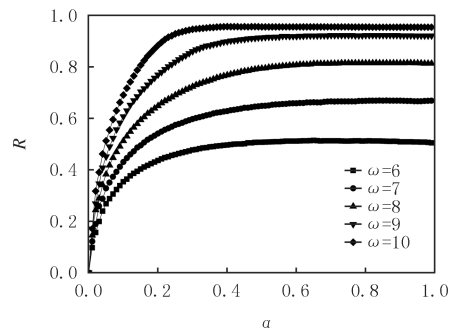
其中,  $S_k (k=1,2,3, \dots, N)$  为低通滤波器,当耦合通道没有滤波器时,耦合振子在参数空间  $(\tau, \epsilon)$  的振幅死亡岛在  $\omega \geq 4$  时才存在.分别以  $\omega=7,9$  为例,通过数值计算分别得到滤波器在不同的截止频率  $\alpha^{-1}=30,40,60,80$  时耦合振子在参数空间  $(\tau, \epsilon)$  的振幅死亡岛如图 5(a,b) 中细实线所包围的区域.其中粗实线所包围区域为无低通滤波器时的振幅死亡岛.结果表明,耦合全连通网络中,随着通道滤波器的截止频率  $\alpha^{-1}$  减小,振幅死亡岛面积逐渐增加.且初始频率  $\omega$  越大,振幅死亡岛的区域也越大.

图5 全连通网络中,不同 $\alpha^{-1}$ 参数空间 $\varepsilon-\tau$ 的振幅死亡区域Fig.5 Amplitude death region of the globally coupled oscillators in the parameter spaces  $\varepsilon-\tau$  for different  $\alpha^{-1}$ 

同样地,由归一化参量  $R$  与  $\alpha$  的关系图 6 可以看出,随着  $\alpha$  的增加,振幅死亡区域先快速地增加,然后缓慢增加到某一稳定值.该稳定值随着单个振子的频率  $\omega$  的增加而相应地增加,此外, $\omega$  越大趋向于稳定所需的  $\alpha$  值越小.因此,在全连通网络中低通滤波器的截止频率对振幅死亡岛的影响规律与 2 个耦合振子系统的结果相似.

## 6 结 论

耦合振子系统的通道特性对耦合振子系统的振幅死亡具有显著的影响.低通滤波效应越强,越有利于促进耦合振子的振幅死亡.此规律在耦合周期、混沌振子系统,局域耦合和全连通耦合系统均具有普适性.因耦合通道的滤波特性在工程中具有普适性,对耦合振子系统动力学的影响规律可为工程中系统的减振,生物节律的控制提供理论支持.此外滤波器结构简单,易于实现,因此局部滤波器方案在实验上具有可行性,可以应用于非线性电路、混沌控制、耦合激光器和神经系统等.

图6 全连通网络中,不同 $\omega$ 下, $R$ 随 $\alpha$ 的变化关系  
Fig.6  $R$  versus  $\alpha$  for different  $\omega$  in the globally coupled oscillators

## 参 考 文 献

- [1] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization of chaotic systems[J]. Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 2015, 25(9):097611.
- [2] 张天翼,王海风.风电并入弱交流系统引发次同步振荡的研究方法综述[J].电力系统保护与控制, 2021, 49(16):177-187.  
ZHANG T Y, WANG H F. Research methods for subsynchronous oscillation induced by wind power under weak AC system: a review[J]. Power System Protection and Control, 2021, 49(16):177-187.
- [3] 朱云,谢琛,黄竞雄.非局域不对称耦合相振子系统中的移动奇异态[J].河南师范大学学报(自然科学版), 2021, 49(6):64-69.  
ZHU Y, XIE C, HUANG J X. The traveling chimera state in non-locally asymmetric coupled phase oscillators[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2021, 49(6):64-69.
- [4] 刘维清,吴徽.复杂网络中时间尺度对耦合振子振幅死亡的影响[J].河南师范大学学报(自然科学版), 2021, 49(5):40-45.  
LIU W Q, WU H. The effects of the time scale on the amplitude death in the coupled oscillators with complex network[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2021, 49(5):40-45.
- [5] 施添添,茅晓晨.时滞耦合 van der Pol-Duffing 振子环的动力学分析[J].动力学与控制学报, 2019, 17(3):264-269.  
SHI T T, MAO X C. Dynamics of a ring of coupled van der Pol-Duffing oscillators with time delays[J]. Journal of Dynamics and Control, 2019, 17(3):264-269.
- [6] ARONSON D G, ERMENROUT G B, KOPELL N. Amplitude response of coupled oscillators[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1990, 41(3):403-449.
- [7] 徐江,郭锋.乘性色噪声和加性双值噪声作用下延迟双稳系统中的随机共振[J].红外, 2020, 41(3):38-45.  
XU J, GUO F. Stochastic resonance in a time-delayed bistable system with multiplicative colored noise and additive dichotomous noise[J].

- Infrared, 2020, 41(3):38-45.
- [8] LIU W Q, LEI X Q, CHEN J N. Effects of periodically modulated coupling on amplitude death in nonidentical oscillators[J]. Europhysics Letters, 2019, 125(5):50004.
- [9] LIU W Q, XIAO G B, ZHU Y, et al. Oscillator death induced by amplitude-dependent coupling in repulsively coupled oscillators[J]. Physical Review E, 2015, 91(5):052902.
- [10] THOMAS N, MONDAL S, PAWAR S A, et al. Effect of noise amplification during the transition to amplitude death in coupled thermoacoustic oscillators[J]. Chaos, 2018, 28(9):093116.
- [11] 曹颖, 王青云. 癫痫疾病模型的动力学分岔分析[C]//北京力学学会第二十四届学术年会会议论文集. 北京:[出版者不详], 2018.
- [12] RAYLEIGH J W S, LINDSAY R B. The theory of sound[M]. New York: Dover Publications, 1945:1877-1878.
- [13] FIGUEIREDO-JUNIOR A T, DE FÁTIMA ANJOS F, DE MELO BRITO F D C, et al. Bixin loaded on polymeric nanoparticles: synthesis, characterization, and antioxidant applications in a biological system[J]. Applied Nanoscience, 2021, 11(1):63-78.
- [14] ZHAI Y M, KISS I Z, HUDSON J L. Amplitude death through a Hopf bifurcation in coupled electrochemical oscillators: experiments and simulations[J]. Physical Review E, 2004, 69(2):026208.
- [15] MARTIN L, VERNISSE B, THIERRY B, et al. Optical system with main function for an automobile: EP09153175.6[P]. 2009-02-19.
- [16] BIWA T, TOZUKA S, YAZAKI T. Amplitude death in coupled thermoacoustic oscillators[J]. Physical Review Applied, 2015(3):034006.
- [17] 刘维清, 蓝晶, 钟建环, 等. 不同边界条件下频率空间排列对耦合振子振荡死亡的影响[J]. 江西理工大学学报, 2014, 35(1):75-82.
- LIU W Q, LAN J, ZHONG J H, et al. Effects of the spatial frequency distribution on the oscillation death of coupled oscillators with different boundary conditions[J]. Journal of Jiangxi University of Science and Technology, 2014, 35(1):75-82.
- [18] WU Y, LIU W Q, XIAO J H, et al. Effects of spatial frequency distributions on amplitude death in an array of coupled Landau-Stuart oscillators[J]. Physical Review E, 2012, 85(5):056211.
- [19] LIU W Q, XIAO J H, LI L X, et al. Effects of gradient coupling on amplitude death in nonidentical oscillators[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 69(3):1041-1050.
- [20] VERA-ÁVILA V P, SEVILLA-ESCOBOZA J R, DURÓN R R R, et al. Dynamical consistency in networks of nonlinear oscillators[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2021, 148:111017.
- [21] LI W T, QIAO M, QIN L, et al. Eccentricities on small-world networks[J]. The VLDB Journal, 2019, 28(5):765-792.
- [22] LIU W Q, WANG X G, GUAN S G, et al. Transition to amplitude death in scale-free networks[J]. New Journal of Physics, 2009, 11(9):093016.
- [23] STROGATZ S H. Death by delay[J]. Nature, 1998, 394(6691):316-317.
- [24] WEI Z, MENG Z. Partial time-delay coupling enlarges death island of coupled oscillators[J]. Physical Review E, 2009, 80(6):065204.
- [25] 刘梦, 甘朝晖, 张士英. 一种分数阶流控忆感器的幅频特性分析[J]. 系统仿真学报, 2019, 31(6):1179-1187.
- LIU M, GAN Z H, ZHANG S Y. Analysis of amplitude-frequency characteristics of fractional-order current-controlled meminductor[J]. Journal of System Simulation, 2019, 31(6):1179-1187.
- [26] LI H, ZHANG X Y, FENG Y, et al. Impact of low-pass filtering on masking release in understanding Mandarin sentences[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2019, 146(1):EL52.
- [27] DUDKOWSKI D, CZOŁCZYŃSKI K, KAPITANIAK T. Traveling amplitude death in coupled pendula[J]. Chaos, 2019, 29(8):083124.
- [28] ZOU W, ZHAN M, KURTHS J. Revoking amplitude and oscillation deaths by low-pass filter in coupled oscillators[J]. Physical Review E, 2017, 95:062206.

## The effects of the low pass filter on the amplitude death in the coupled oscillators with time delay

Liu Weiqing<sup>1</sup>, Liu Hanchang<sup>1</sup>, Zhu Yun<sup>1</sup>, Xu Haiyan<sup>2</sup>

(1. School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China;

2. Gannan Healthcare Vocational College, Ganzhou 341000, China)

**Abstract:** The effects of the low pass filter with different cutoff frequency on the amplitude death of coupled periodical or chaotic oscillators with time delay are explored. The decreasing cutoff frequency is beneficial to realize amplitude death in the coupled oscillators with coupling channel containing time delay and low pass filter characteristics. The low pass filter of the coupling channel tends to generate amplitude death or enlarge the amplitude death island of the coupled oscillators with time delay. The results are helpful to better understand the rhythm control of the coupled system.

**Keywords:** amplitude death; time delay; low pass filter

[责任编辑 杨浦 刘洋]