

光腔内一维扩展玻色-哈伯德模型的量子相变

高旭艳, 张万舟

(太原理工大学 物理与光电工程学院, 太原 030024)

摘要:光晶格为研究冷原子提供了一个非常纯净并且容易调节的实验平台.在光腔内的光晶格中载入冷原子,可以引入光子原子之间的耦合相互作用,有助于人们研究超辐射转变以及超流和超固体等量子相.除了最近邻格点之间原子排斥相互作用有助于形成超固体以外,原子光子耦合系数的正负符号随位置交替变化也有助于形成超固体.本文将这两种相互作用都考虑进光腔中扩展玻色-哈伯德模型,通过测量原子密度、光子密度、超流序参量、固体序参量和超固体序参量,用平均场方法得到系统的基态相图,发现与硬核系统相比,软核系统的超固体范围更大更容易被发现.此研究结果有助于指导光腔中冷原子实验寻找新的量子相.

关键词:扩展玻色-哈伯德模型;平均场方法;光腔;超固体

中图分类号:O413

文献标志码:A

超固体是一种新奇的量子相,同时具有对角长程序(固体序)和非对角长程序(超流序)的相^[1-4].非对角长程序是一种集体量子效应,通常指的是超流序.固体序指的是玻色子在晶格中的排布结构打破原有的光晶格固有的平移对称性.例如,用 0 和 1 来表示玻色子在光晶格上的占据数,若原子在晶格上形成(1, 1, 1, 1, ...)排布,那么系统就没有打破原有的晶格平移对称性.若原子在晶格上形成(1, 0, 1, 0, ...)排布,系统就会形成固体相^[5].超固体同时具有这两种序.

人们试图从理论和实验两方面去寻找在多种系统中的超固体相.例如,在最近的 Hamburg 和瑞士联邦理工学院实验(ETH)组中,他们成功地囚禁了光腔中具有短程和长程相互作用的玻色原子气体^[6-7],发现腔光和冷原子间相互作用衍生出非常丰富的量子相变.从理论的角度,陈宇等人^[8]通过在光腔中的玻色-哈伯德模型加入了光子与原子耦合项且令奇数和偶数格点上的耦合系数的正负符号交错变化,给出 ETH 实验的理论相图和相边界.Flottat 等人^[9]运用古茨维勒平均场近似和精确的量子蒙特卡罗模拟,研究了光腔中二维玻色哈伯德模型的基态相图,发现除了超流和莫特绝缘相,长程相互作用驱动系统形成密度波相和超固体相.然而,上述理论研究中,都是单一地考虑了原子光子间的耦合相互作用或者腔中原子间的最近邻排斥相互作用,因此,将两种作用同时考虑在内,探究系统是否会有超固体以及新的量子相变出现是有意义的.

本文用平均场方法^[10-12]研究了光腔内一维扩展玻色-哈伯德模型,通过测量原子密度、光子密度、超流序参量、固体序参量和超固体序参量,发现软核和硬核系统中均有超固体相,并且软核系统的超固体范围比硬核更大.平均场理论是一种近似方法,尤其是会“抹去”系统的量子涨落,所以其结果并不精确.特别的,平均场方法在系统维度趋于无穷大时才是精确的,而对于越低维的系统,结果越不精确.本文通过平均场方法研究了一维系统,为密度矩阵重整化群方法验证超固体是否存在提供了大致的参数范围.

1 研究模型

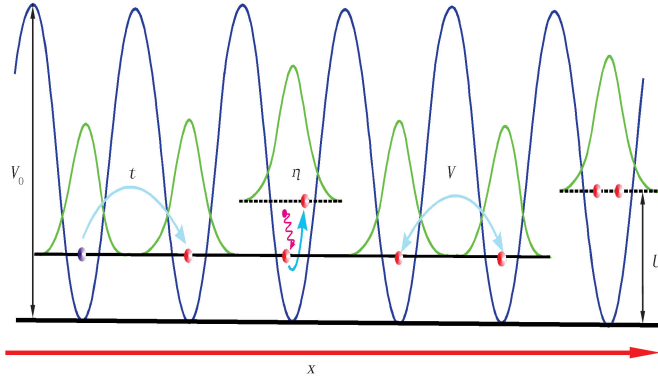
图 1 为腔内扩展玻色-哈伯德模型示意图.考虑到原子之间的排斥相互作用,扩展玻色-哈伯德模型相邻两个格点中系统状态不等价,因此需要用不同的标记 A, B 来进行区分,并且把这两个子格点看作是一个原

收稿日期:2018-03-27;修回日期:2018-05-02.

基金项目:国家自然科学基金(11305113)

作者简介(通信作者):张万舟(1982-),男,安徽六安人,太原理工大学副教授,主要从事关联量子系统的研究,E-mail: zhangwanzhou@tyut.edu.cn.

胞,方便下文进行平均场方法研究.



较大的红色球代表原子,红色弹簧状光线末端连接的红色球代表光子,灰色球表示将要隧穿到相邻格点的原子,蓝色曲线表示光晶格势

图1 一维光腔中玻色-哈伯德模型的示意图

腔内扩展玻色-哈伯德模型的整个系统的哈密顿量 H 由原子项 H_1 , 光子项和原子光子耦合项 H_2 组成, 即: $H = H_1 + H_2$, 其中 H_1 和 H_2 分别为

$$H_1 = -t \sum_{\langle i,j \rangle} (b_i^\dagger b_j + h.c.) + \frac{U}{2} \sum_i n_i^a (n_i^a - 1) - \mu \sum_i n_i^a + V \sum_{\langle i,j \rangle} n_i^a n_j^a, \quad (1)$$

$$H_2 = \eta \sum_i (a_i^\dagger + a_i) (-1)^i n_i^a - \mu_p \sum_i n_i^p. \quad (2)$$

这里 t 是原子隧穿到相邻格点的动能, $\langle i, j \rangle$ 表示最近邻格点, $b_i^\dagger (b_i)$ 是第 i 格点上原子的产生(湮灭)算符, U 表示同一格点内部原子之间的排斥相互作用, μ 为原子化学势, V 是相邻格点间原子之间的相互排斥作用, $n_i^a = b_i^\dagger b_i$ 为第 i 格点原子占据数, η 表示原子-光子间的耦合系数, $a_i^\dagger (a_i)$ 代表第 i 格点上光子的产生(湮灭)算符, $n_i^p = a_i^\dagger a_i$ 为第 i 格点光子占据数, μ_p 为光子化学势, 在实际的光子系统中光子不断产生和湮灭, 没有化学势. 这里为了数值模拟方便, 用光子化学势来调节系统光子数.

2 研究方法

根据系统的平移不变性特征, 平均场方法是通过研究一个或多个原胞的哈密顿量来获得整个系统的物理性质, 并将环境对系统的作用以平均化的序参量代替, 从而人为地降低可能出现的量子涨落. 平均场方法具体细节如下: 一维系统由多个单位原胞构成, 每个原胞内包含 2 个格点. 令 $\Psi_i^a = \langle b_i^\dagger \rangle = \langle b_i \rangle$ 用来表征原子超流序参量, $\rho_i^a = \langle n_i^a \rangle$ 和 $\rho_i^p = \langle n_i^p \rangle$ 分别用来表征原子密度和光子密度. 利用平均场退耦近似公式

$$\begin{aligned} b_i^\dagger b_{i+1} &= \langle b_i^\dagger \rangle b_{i+1} + b_i^\dagger \langle b_{i+1} \rangle - \langle b_i^\dagger \rangle \langle b_{i+1} \rangle, \\ n_i^a n_{i+1}^a &= \langle n_i^a \rangle n_{i+1}^a + n_i^a \langle n_{i+1}^a \rangle - \langle n_i^a \rangle \langle n_{i+1}^a \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

可将总的哈密顿量看作是两套子格点的哈密顿量 H_A 和 H_B 的和

$$H_{\text{MF}} = \sum_{A,B} (H_A + H_B), \quad (4)$$

其中, A 格点系统的哈密顿量 H_A 可表示为

$$\begin{aligned} H_A &= (U/2) n_A^a (n_A^a - 1) - \eta (a^\dagger + a) n_A^a - \mu n_A^a - \mu_p n_A^p + z t \Psi_A^a \Psi_B^a + \\ &\quad z V (n_A^a \rho_B^a - (1/2) \rho_A^a \rho_B^a) - z t \Psi_A^a (b_B^\dagger + b_B), \end{aligned} \quad (5)$$

z 为格点的配位数. 格点 B 上系统的哈密顿量 H_B 可表示为

$$\begin{aligned} H_B &= (U/2) n_B^a (n_B^a - 1) - \eta (a^\dagger + a) n_B^a - \mu n_B^a - \mu_p n_B^p + z t \Psi_A^a \Psi_B^a + \\ &\quad z V (n_B^a \rho_A^a - (1/2) \rho_A^a \rho_B^a) - z t \Psi_B^a (b_A^\dagger + b_A), \end{aligned} \quad (6)$$

通过自洽求解 H_A 和 H_B 可以得到系统的基态波函数. 通过测量固体序参量 $\Delta \rho_a$, 超流序参量 Ψ_a , 超固体序参量 $\Psi_a \Delta \rho_a$, 其中

$$\Psi_a = \frac{1}{2}(\Psi_A^a + \Psi_B^a), \tag{7}$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_A^a + \rho_B^a), \tag{8}$$

$$\Delta\rho_a = \frac{1}{2}[(\rho_A^a - \bar{\rho}) + (\rho_B^a - \bar{\rho})], \tag{9}$$

得到系统的基态相图.基态相图包括密度波相(可用 CDW 或固体相标记),超流相(SF),超固体相(SS),绝缘体相(MI),表 1 给出这些相的判断标准.

表 1 典型相的序参量值

参量	CDW	SF	SS	MI
Ψ_a	0	$\neq 0$	$\neq 0$	0
$\Delta\rho_a$	$\neq 0$	0	$\neq 0$	0
$\Psi_a\Delta\rho_a$	0	0	$\neq 0$	0

3 数值结果与讨论

分别选取了光腔内一维硬核扩展玻色-哈伯德模型和一维软核模型进行研究.一维硬核即每个格点原子和光子的最大占据数均为 1,对于软核系统选取每个格点原子和光子的最大占据数均为 7.

3.1 一维硬核

图 2(a-c)分别给出在 $(t/V, \mu_p/V)$ 平面上的 $\Psi_a, \Delta\rho_a$ 和 $\Psi_a\Delta\rho_a$ 的分布图, t/V 和 μ_p/V 都是无量纲参数.图 2(a)中可以看出系统有 3 个相,分别为在 t/V 比较小的区域为 CDW(0,1)以及 MI($\rho=1$)相,在 t/V 比较大时系统可能有超流和超固体 2 个相.当然,仅仅用 Ψ_a 无法区分出超流和超固体相,需要参考另外两个序参量 $\Delta\rho_a$ 和 $\Psi_a\Delta\rho_a$.

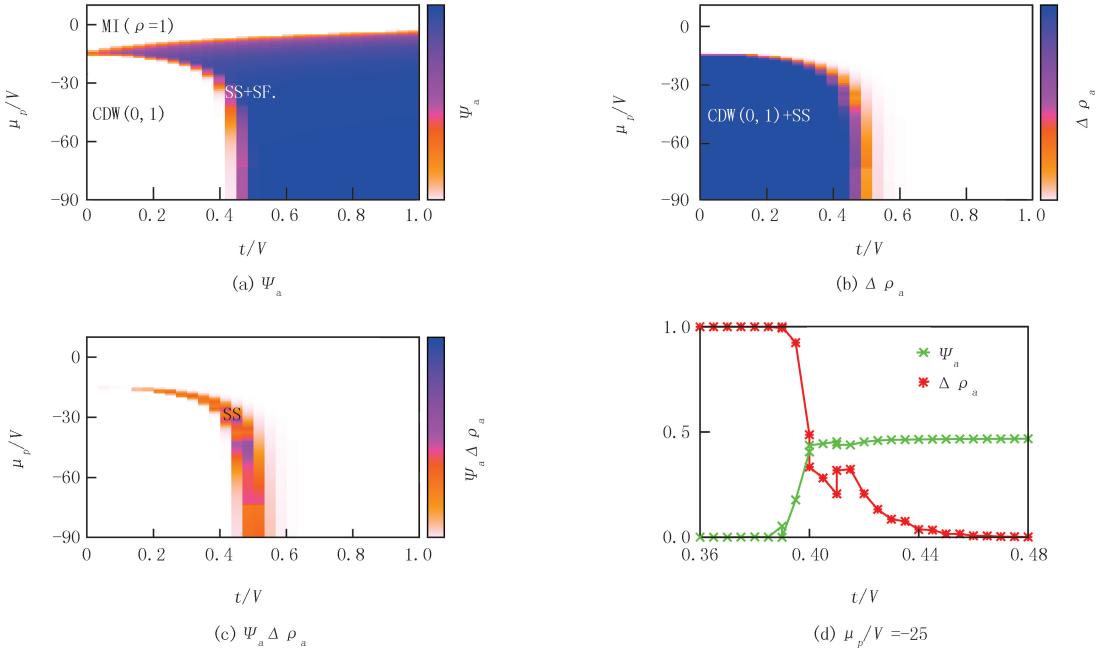


图 2 光腔内一维硬核扩展玻色-哈伯德模型的整体相图

在图 2(b)中 $\Delta\rho_a \neq 0$ 的区域,当 $\mu_p/V < -15$ 时,系统要么处于 CDW(0,1) 相,要么处于超固体相.而在此以外的其他参数区域,如超流相和绝缘体相中 $\Delta\rho_a$ 都等于零.在图 2(c) 中,用 Ψ_a 和 $\Delta\rho_a$ 的乘积来表示这 2 个超流序参量都不等于零的参数区域,清楚地看到一条狭窄的带状参数区域,这是非常明显的超固体参数区

间.在图 2(d)中,选取 $\mu_p/V = -25$ 的情况进行研究整体相图的细节,发现系统大约在 $t/V = 0.385$ 到 $t/V = 0.45$, $\Delta\rho_a \neq 0$, $\Psi_a \neq 0$ 代表系统处在超固体相,这与整体相图是完全吻合的.

对于光腔内的硬核扩展玻色-哈伯德模型,图 3(a)和(b)给出了固定 $t/V = 0.4$ 扫描 μ_p/V 得到的一些细节图.由图 3(a)和(b)可知,在 $-45 < \mu_p/V < -26.7$ 的区域,原子密度 $\rho_a = 0.5$ 光子密度 $\rho_p = 0$,且 $\Delta\rho_a = 1$, $\Psi_a = 0$ 说明系统处于 CDW(0,1)相.在 $-26.7 < \mu_p/V < -22.5$ 的区域, ρ_a 连续变化且不等于零, $\Delta\rho_a \neq 0$, $\Psi_a \neq 0$ 说明系统处于超固体相.在 $-22.5 < \mu_p/V < -8$ 的区域,光子密度和原子密度均连续变化且不为零,此时 $\Psi_a \neq 0$, $\Delta\rho_a = 0$ 说明系统处于超流相.在 $-8 < \mu_p/V < 0$ 的区域,光子密度依然不为零,原子密度恒等于 1,说明系统可能处于 CDW(0,2)相或密度为 1 的绝缘体相,而由(b)中对应的 $\Psi_a = 0$, $\Delta\rho_a = 0$ 说明系统处于 MI 相.同时,从图 3(a)(b)可以看出,在 CDW(0,1)区域光子密度 ρ_p 和超流序参量 Ψ_p 都很小,说明系统的超辐射特征很弱.在 SF,SS,MI 区域,这 2 个参量也比较小但明显不等于零,说明此时系统都具有明显的超辐射特征.

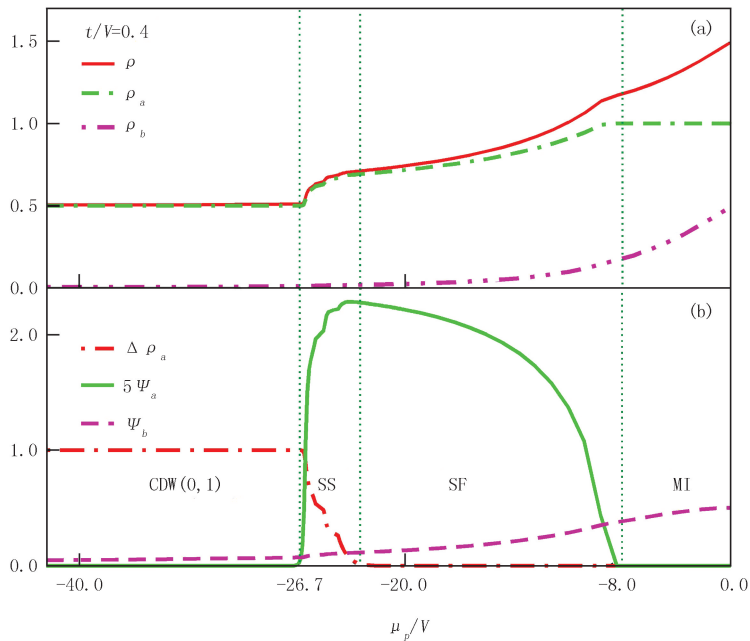


图 3 光腔内一维硬核扩展玻色-哈伯德模型上的平均场细节图

3.2 一维软核

通常光腔中不止一个光子,系统不满足硬核限制条件,为了检验超固体相在没有硬核限制的情况下是否存在,本节研究一维软核扩展玻色-哈伯德模型,并且限制每个格点的光子和原子的最大占据数均为 7,得到如图 4(a-d)所示的平均场结果.与硬核结果相比,不再有绝缘体相 MI($\rho = 1$),而是有新的超流相和更大范围的超固体相出现.

如图 4(c)所示,在系统内出现一个大范围的超固体相.图 4(d)给出 $\mu_p/V = -25$ 时 Ψ_a 和 $\Delta\rho_a$ 的细节图.在 $1.5 < t/V < 3$, $\Delta\rho_a \Psi_a \neq 0$ 的范围比硬核范围 0.065 大得多,这表明在软核条件下更容易找到超固体相.

图 4(a)给出的是整体相图,在 $t/V = 0$ 时,相的分布不是特别清晰.图 5 给出固定 $t/V = 0$ 沿着 μ_p/V 扫描软核模型的序参量 ρ , ρ_a , ρ_p 和 $\Delta\rho_a$, $5\Psi_a$, Ψ_p 细节.为了清楚地观察和判断数据,将 Ψ_a 放大 5 倍.由图 5 可知,在整个参数区域 $\Psi_a = 0$,说明系统没有超流相.此外,系统原子密度 $\rho_a = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5$, 对应 $\Delta\rho_a = 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0$,表明系统形成占据数为 (0,2), (0,3), (0,4), (0,5), (0,6), (0,7) 的固体相.系统会形成更多具有不同占据数排布的固体相.这表明对于一维软核扩展玻色哈伯德模型,系统有多种可能排布的固体,以此为基础,若增加隧穿动能系统更容易形成超固体相.

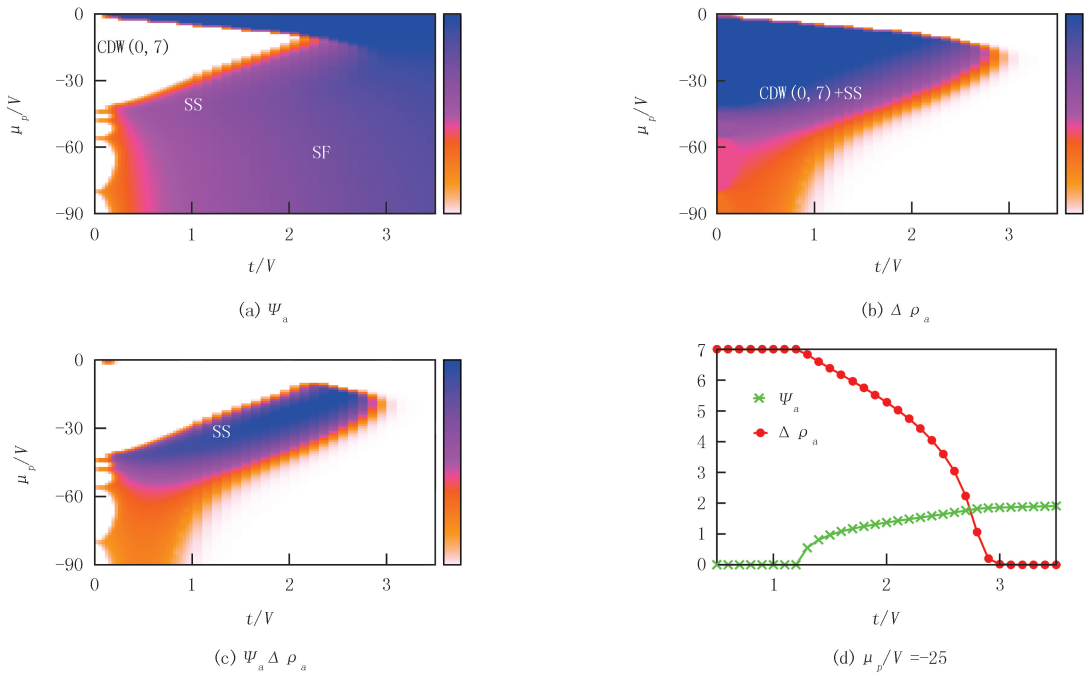


图 4 光腔内一维软核扩展玻色-哈伯德模型的相图

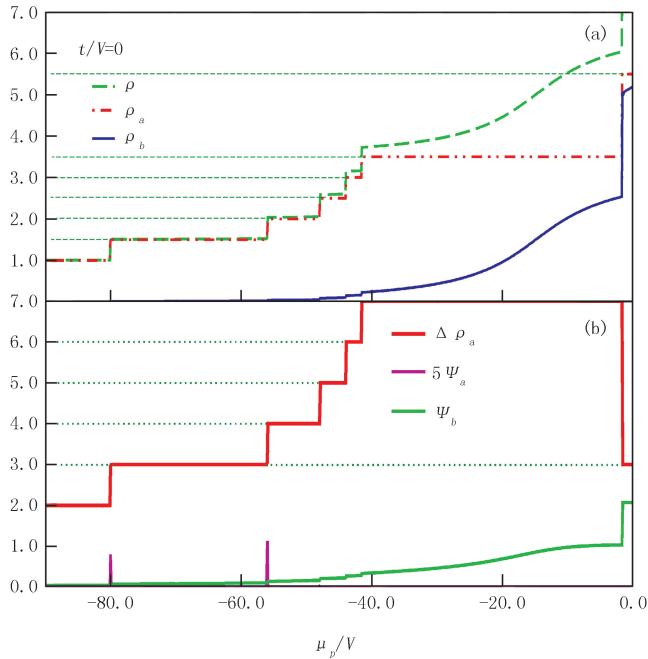


图 5 光腔内一维软核扩展玻色-哈伯德模型在 $t/V=0$ 上的平均场细节图

4 结 论

对于玻色系统,粒子之间的相互作用是形成超固体相的关键.受文献[8-9]的启发,将原子间的排斥相互作用和光子原子间的耦合相互作用都考虑在内研究了光腔内的扩展玻色-哈伯德模型.

为了寻找该模型在一维光晶格上是否有超固体相,首先选取每个格点的光子和原子最大占据数均为 1 的硬核系统进行研究,通过测量各参量随 t/V 以及 μ_p/V 的变化,从而寻找出超固体以及其存在时各参量的范围.在相图上超固体的范围比较狭窄,于是解除硬核限制,选取每个格点的光子和原子的最大占据数均为 7

的软核系统进行研究,发现了更大范围的超固体相.

本文的研究结果有助于指导冷原子实验寻找新的量子相,并且可为研究光腔内扩展玻色-哈伯德模型所需的大规模计算提供参考.

参 考 文 献

- [1] Penrose O, Onsager L. Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium[J]. Phys Rev, 1956, 104(3): 576-584.
- [2] Andreev A F, Lifshitz I M. Quantum Theory of Defects in Crystals[J]. Phys JETP, 1969, 29(6): 1107-1113.
- [3] Chester G V. Speculations on Bose-Einstein Condensation and Quantum Crystals [J]. Phys Rev A, 1970, 2(1): 256-258.
- [4] Leggett A J. Can a Solid Be "Superfluid"? [J]. Phys Rev Lett, 1970, 25(22): 1543-1546.
- [5] 冯乐, 张万舟. 三腿梯子上硬核玻色-哈伯德模型的量子蒙特卡罗研究[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2017, 45(2): 23-28.
- [6] Landig R, Hruby L, Dogra N, et al. Quantum phases from competing short- and long-range interactions in an optical lattice[J]. Nature, 2016(532): 476-479.
- [7] Klinder J, Keßler H, Bakhtiari M R, et al. Observation of a Superradiant Mott Insulator in the Dicke-Hubbard Model[J]. Phys Rev Lett, 2015, 115(23): 230403.
- [8] Chen Y, Yu Z, Zhai H. Quantum phase transitions of the Bose-Hubbard model inside a cavity[J]. Phys Rev A, 2016, 93(4): 041601.
- [9] Flottat T, de Forges de Parny L, Hébert F. Phase diagram of bosons in a two-dimensional optical lattice with infinite-range cavity-mediated interactions[J]. Phys Rev B, 2017, 95(14): 144501.
- [10] Pai R V, Sheshadri K, Pandit R. Phases and Transitions in the Spin-1 Bose-Hubbard Model: Systematics of a Mean-field Theory[J]. Phys Rev B, 2008, 77(1): 014503.
- [11] Dhar A, Singh M, Pai R V, et al. Mean-field analysis of quantum phase transitions in a periodic optical superlattice[J]. Phys Rev A, 2011, 84(3): 033631.
- [12] Lühmann D, Jürgensen O, Weinberg M, et al. Quantum phases in tunable state-dependent hexagonal optical lattices[J]. Phys Rev A, 2014, 90(1): 013614.

Quantum phase transitions of one-dimensional extended Bose-Hubbard model in an optical cavity

Gao Xuyan, Zhang Wanzhou

(College of Physics and Optoelectronics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract: The optical lattice provides a very clean and controllable experimental platform for the study of cold atoms. The loading of cold atoms on the optical lattice in an optical cavity is able to introduce the coupling interaction between photons and atoms, which helps us to study the superradiant transition and the quantum phases such as superfluid and supersolid. Besides the supersolid driven by the nearest-neighbor interactions, the positive and negative signs of the atom-photon coupling alternate with the position and they could also lead to the supersolid. In this paper, two kinds of interactions are considered in the Bose-Hubbard model in an optical cavity, and the ground state phase-diagram is obtained by mean-field method through measuring the atomic density, photon density, the superfluid order parameter, solid order parameter and supersolid order parameter. Compared with the hard-core system, the supersolid of the soft-core system emerges in a larger range and is easier to be found. The results of our study are helpful to guide the cold atom experiment in a cavity to search for new quantum phases.

Keywords: extended Bose-Hubbard model; mean-field method; optical cavity; super-solid

[责任编辑 杨浦]