

具有 Crowley-Martin 型功能性反应的随机非自治捕食模型的持续与灭绝

赵治涛, 邓晓宇

(黑龙江大学 数学科学学院, 哈尔滨 150080)

摘要:主要研究了一类具有 Crowley-Martin 型功能性反应的随机非自治捕食模型的持续性与灭绝性. 种群灭绝、平均意义下非持续以及平均意义下弱持续的充分性判据被建立. 此外, 利用数值模拟验证了所得理论结果的有效性.

关键词:随机非自治捕食模型; Crowley-Martin 功能性反应; 持续; 灭绝

中图分类号: O29

文献标志码: A

种群动力学是生物数学中的一个重要分支, 主要研究种群与种群、种群与环境之间的相互作用关系. 由于捕食食饵关系的重要性和普遍存在性, 捕食者-食饵模型已经受到国内外数学家与生物学家的极大关注^[1-4]. 此外, 在捕食者-食饵模型的研究中, 功能性反应占有非常重要的地位. 常见的功能性反应有: Holling 型功能性反应、Beddington-DeAngelis 型功能性反应、Hassell-Varley 型功能性反应、Crowley-Martin 型功能性反应等. 1975 年, Crowley 和 Martin 提出了 Crowley-Martin 型功能性反应函数. 它是一类既依赖于食饵又依赖于捕食者的功能性反应函数, 考虑了捕食者之间的相互作用, 并且假设即使食饵的种群密度很大, 捕获量依然随着捕食者密度的增加而递减. 此外, 不论某个捕食者是否寻找食饵, 捕食者之间的相互干扰始终存在, 从这一点来看, 它更加符合自然界中的生物现象. 经典的具有 Crowley-Martin 型功能性反应的非自治捕食模型可以表示为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(t) \left[a(t) - b(t)x(t) - \frac{c(t)y(t)}{(1 + \alpha(t)x(t))(1 + \beta(t)y(t))} \right], \\ \frac{dy}{dt} = y(t) \left[-d(t) + \frac{e(t)c(t)x(t)}{(1 + \alpha(t)x(t))(1 + \beta(t)y(t))} \right], \end{cases} \quad (1)$$

其中模型中所有参数均是 $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$ 上连续有界函数, $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别表示 t 时刻食饵和捕食者的种群密度, $a(t)$ 表示食饵内禀增长率, $d(t)$ 表示捕食者死亡率, $c(t)$ 表示捕食者的捕获率, $e(t)$ 表示营养转化率, a/b 表示食饵的环境最大容纳量, $\alpha(t), \beta(t) > 0$.

然而, 由于生物种群在自然界中容易受到外界环境因素的干扰, 如洪水、地震、海啸以及人为干预等, 从而使得模型(1)中的参数发生随机的波动. 因此, 研究随机环境下的种群动力系统的动力学行为, 已经成为现代生物数学的一个主要研究课题^[5-10]. 考虑到环境噪声的影响, 在确定性模型(1)的方程中引入白噪声. 假设模型(1)中的参数 $a(t)$ 和 $d(t)$ 受到环境噪声的影响, 即

$$a(t) \rightarrow a(t) + \sigma_1(t)B_1(t), \quad -d(t) \rightarrow -d(t) + \sigma_2(t)B_2(t),$$

其中 $(B_1(t), B_2(t))$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathcal{P})$ 上的二维相互独立的标准 Brownian 运动, $\sigma_i^2(t) (i = 1, 2)$ 表示白噪声的强度. 于是, 相应于确定性模型(1), 可以得到如下具有 Crowley-Martin 型功能

收稿日期:2016-06-07; 修回日期:2016-12-22.

基金项目:国家自然科学基金(11201128); 黑龙江省教育厅项目(12541621).

作者简介(通信作者):赵治涛(1981-), 男, 山东平邑人, 黑龙江大学副教授, 博士, 研究方向为微分方程及生物数学, E-mail: zhitaozhao0808@126.com

性反应的随机非自治捕食模型

$$\begin{cases} dx = x(t) \left[a(t) - b(t)x(t) - \frac{c(t)y(t)}{(1 + \alpha(t)x(t))(1 + \beta(t)y(t))} \right] dt + \sigma_1(t)x(t)dB_1(t), \\ dy = y(t) \left[-d(t) + \frac{e(t)c(t)x(t)}{(1 + \alpha(t)x(t))(1 + \beta(t)y(t))} - g(t)y(t) \right] dt + \sigma_2(t)y(t)dB_2(t), \end{cases} \quad (2)$$

其中初始条件 $x(0) = x_0 > 0, y(0) = y_0 > 0$. 本文将主要研究模型(2)中种群的持续性与灭绝性问题,建立种群灭绝、平均意义下非持续以及平均意义下弱持续的充分性判据,并利用数值模拟验证本文的理论结果.

1 预备知识

为方便起见,引进以下记号. 设 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$ 上连续有界,那么记

$$f^u = \sup_{t \in \mathbf{R}_+} f(t), f^l = \inf_{t \in \mathbf{R}_+} f(t),$$

并假设 $a^l, b^l, c^l, d^l, e^l, g^l > 0$. 此外,记

$$\langle f \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds, f^* = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup f(t), f_* = \lim_{t \rightarrow +\infty} \inf f(t).$$

接下来,给出一个定义和两个重要的引理,它们在本文主要结论的证明中是非常有用的.

定义 1^[11] (1) 如果 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ a. s., 则称物种 $x(t)$ 灭绝.

(2) 如果 $\langle x \rangle^* = 0$ a. s., 则称物种 $x(t)$ 在平均意义下是非持续的.

(3) 如果 $\langle x \rangle^* > 0$ a. s., 则称物种 $x(t)$ 在平均意义下是弱持续的.

引理 1 对于任意初始值 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}_+^2 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_i > 0, i = 1, 2\}$, 当 $t \geq 0$ 时, 模型(2) 存在唯一解 $(x(t), y(t)) \in \mathbf{R}_+^2$ (a. s.). 此外, 模型(2) 的解 $(x(t), y(t))$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \ln x(t)/t \leq 0 \text{ a. s.}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \ln y(t)/t \leq 0 \text{ a. s.} \quad (3)$$

证明 关于模型(2)解的存在与唯一性的证明,与文献[12]完全类似,此处省略. 因此,仅给出引理后半部分的证明. 根据模型(2),可以得到

$$\begin{cases} dx \leq x(t) [a(t) - b(t)x(t)] dt + \sigma_1(t)x(t)dB_1(t), \\ dy \leq y(t) \left[\frac{e(t)c(t)}{\alpha(t)} - g(t)y(t) \right] dt + \sigma_2(t)y(t)dB_2(t), \end{cases} \quad (4)$$

令

$$\begin{cases} d\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t) [a(t) - b(t)\tilde{x}(t)] dt + \sigma_1(t)\tilde{x}(t)dB_1(t), \\ d\tilde{y}(t) = \tilde{y}(t) \left[\frac{e(t)c(t)}{\alpha(t)} - g(t)\tilde{y}(t) \right] dt + \sigma_2(t)\tilde{y}(t)dB_2(t), \end{cases} \quad (5)$$

其中 $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ 是系统(5)的解,且初始值 $x_0 > 0, y_0 > 0$. 根据随机微分方程的比较定理,可得

$$x(t) \leq \tilde{x}(t), y(t) \leq \tilde{y}(t) \text{ a. s.}, t \in [0, +\infty). \quad (6)$$

根据文献[7]中引理 3.4,可以得到 $dx(t) = x(t) [b(t) - a_{11}(t)x(t)] dt + \sigma(t)x(t)dB(t)$, 其中 $b(t), a_{11}(t), \sigma(t)$ 都是定义在 \mathbf{R}_+ 上的非负函数,如果 $a_{11}^l > 0$, 那么 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \ln x(t)/\ln t \leq 1$ a. s.. 因 $b(t), g(t) > 0$, 故根据(5)和(6)式可以得到

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln x(t)}{\ln t} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln \tilde{x}(t)}{\ln t} \leq 1 \text{ a. s.}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln y(t)}{\ln t} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln \tilde{y}(t)}{\ln t} \leq 1 \text{ a. s.}$$

此外,又由于

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln x(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln x(t)}{\ln t} \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln t}{t} \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln t}{t} = 0,$$

因此,可以推得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \ln x(t)/t \leq 0$ a. s.. 同理,可以得到 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \ln y(t)/t \leq 0$ a. s..

引理 2^[9] 设 $x(\omega, t) \in C[\Omega \times [0, +\infty), \mathbf{R}_+]$. 若存在 3 个常数 $\lambda \in \mathbf{R}$ 和 $T, \lambda_0 > 0$, 使得当 $t \geq T$ 时,

$$\ln x(t) \leq \lambda t - \lambda_0 \int_0^t x(s) ds + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t) B_i(t),$$

其中 $B_i(t)$ ($1 \leq i \leq n$) 是相互独立的标准 Brownian 运动, $\sigma_i(t)$ ($1 \leq i \leq n$) 是 \mathbf{R}_+ 上的连续有界函数, 那么当 $\lambda \geq 0$ 时, 有 $\langle x \rangle^* \leq \lambda/\lambda_0$ a. s.; 当 $\lambda < 0$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ a. s..

2 主要结论

在本节中, 将给出本文的主要结果.

定理 1 对于模型(2)中的物种 $x(t)$, 有

- (i) 若 $\langle f_1(t) \rangle^* < 0$, 那么物种 $x(t)$ 灭绝, 其中 $f_1(t) = a(t) - 0.5\sigma_1^2(t)$;
- (ii) 若 $\langle f_1(t) \rangle^* = 0$, 那么物种 $x(t)$ 在平均意义下是非持续的;
- (iii) 若 $\langle f_1(t) \rangle^* > 0$, 那么物种 $x(t)$ 在平均意义下是弱持续的.

证明 对模型(2)中的第一个方程, 应用伊藤公式可得

$$d \ln x = \frac{dx}{x} - \frac{(dx)^2}{2x^2} = \left[a(t) - b(t)x - \frac{c(t)y}{(1 + \alpha(t)x)(1 + \beta(t)y)} - \frac{\sigma_1^2(t)}{2} \right] dt + \sigma_1(t) dB_1(t),$$

两边从 0 到 t 积分并且同时除以 t , 得到

$$\frac{1}{t} \ln \left[\frac{x(t)}{x_0} \right] = \langle f_1(t) \rangle - \langle b(t)x(t) \rangle - \left\langle \frac{c(t)y(t)}{(1 + \alpha(t)x(t))(1 + \beta(t)y(t))} \right\rangle + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_1(s) dB_1(s), \quad (7)$$

同理, 可得

$$\frac{1}{t} \ln \left[\frac{y(t)}{y_0} \right] = \langle -f_2(t) \rangle + \left\langle \frac{e(t)c(t)x(t)}{(1 + \alpha(t)x(t))(1 + \beta(t)y(t))} \right\rangle - \langle g(t)y(t) \rangle + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2(s) dB_2(s). \quad (8)$$

定义 $M_i(t) = \int_0^t \sigma_i(s) dB_i(s)$, $i = 1, 2$, 那么, $M_i(t)$ 是一个局部鞅, 其二次变差为

$$\langle M_i, M_i \rangle_t = \int_0^t \sigma_i^2(s) ds \leq (\sigma_i^2)^u t,$$

根据鞅的强大数定律^[13]可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M_i(t)}{t} = 0 \quad a. s., \quad i = 1, 2.$$

(i) 在(7)式两端同时取上极限, 并且利用(9)式可得

$$\left[\frac{\ln x(t)}{t} \right]^* \leq \langle f_1(t) \rangle^* - \langle b(t)x(t) \rangle_* - \left\langle \frac{c(t)y(t)}{(1 + \alpha(t)x(t))(1 + \beta(t)y(t))} \right\rangle_* \leq \langle f_1(t) \rangle^* < 0,$$

因此, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ a. s., 即物种 $x(t)$ 灭绝.

(ii) 根据上极限的性质, 对于任意充分小的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 当 $t > T$ 时有 $\langle f_1(t) \rangle < \langle f_1(t) \rangle^* + \varepsilon/2$. 再由(9)式可得, 当 $t > T$ 时, $M_1(t)/t \leq \varepsilon/2$. 将上述两个不等式代入(7)式可得

$$\frac{1}{t} \ln \left[\frac{x(t)}{x_0} \right] \leq \langle f_1(t) \rangle^* + \frac{\varepsilon}{2} - \langle b(t)x(t) \rangle + \frac{\varepsilon}{2} \leq \langle f_1(t) \rangle^* + \varepsilon - b^l \langle x(t) \rangle = \varepsilon - b^l \langle x(t) \rangle,$$

于是, 根据引理 2 可以得到 $\langle x \rangle^* \leq \varepsilon/b^l$, 再利用 ε 的任意性即可得证.

(iii) 在(7)式两端同时取上极限, 并利用(3)式和(9)式可得

$$\begin{aligned} b^u \langle x \rangle^* + c^u \langle y \rangle^* &\geq \left[\frac{\ln x(t)}{t} \right]^* + \langle b(t)x(t) \rangle_* + \left\langle \frac{c(t)y(t)}{(1 + \alpha(t)x(t))(1 + \beta(t)y(t))} \right\rangle_* - \\ &\langle \frac{M_1(t)}{t} \rangle_* \geq \langle f_1(t) \rangle^* > 0. \end{aligned} \quad (10)$$

因此, 必有 $\langle x \rangle^* > 0$ a. s. 若不然, 对于任意的 $\omega \in \{ \langle x(t, \omega) \rangle^* = 0 \}$, 由(10)式可知, 必有 $\langle y(t, \omega) \rangle^* > 0$. 另一方面, 在(8)式两端同时取上极限, 并利用(9)式及 $\langle x(t, \omega) \rangle^* = 0$, 可得

$$\left[\frac{\ln y(t, \omega)}{t} \right]^* \leq - \langle f_2(t) \rangle_* - g^l \langle y(t, \omega) \rangle_* \leq - \langle f_2(t) \rangle_* < 0.$$

这就说明 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ a. s., 此与 $\langle y(t, \omega) \rangle^* > 0$ 矛盾, 因此 $\langle x(t) \rangle^* > 0$ a. s..

定理 2 对于模型(2)中的物种 $y(t)$, 有

(I) 若 $\langle b(t) \rangle_* \langle -f_2(t) \rangle^* + \langle e(t)c(t) \rangle^* \langle f_1(t) \rangle^* < 0$, 那么物种 $y(t)$ 灭绝, 这里 $f_2(t) = d(t) + 0.5\sigma_2^2(t)$.

(II) 若 $\langle b(t) \rangle_* \langle -f_2(t) \rangle^* + \langle e(t)c(t) \rangle^* \langle f_1(t) \rangle^* = 0$, 那么物种 $y(t)$ 在平均意义下是非持续的.

(III) 若 $\langle -f_2(t) \rangle^* + \langle \frac{e(t)c(t)\bar{x}(t)}{(1+\alpha(t)\bar{x}(t))(1+\beta(t)\bar{y}(t))} \rangle^* > 0$ 成立, 那么物种 $y(t)$ 在平均意义下是弱持续的, 其中 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 是系统(5)的解, 且初始值 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}_+^2$.

证明 (I) 如果 $\langle f_1(t) \rangle^* \leq 0$, 那么根据定理1(i)可知 $\langle x \rangle^* = 0$. 另一方面, 根据上极限的性质, 对于任意充分小且满足 $\langle -f_2(t) \rangle^* + \varepsilon < 0$ 的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 当 $t > T$ 时, 有 $\langle -f_2(t) \rangle < \langle -f_2(t) \rangle^* + \varepsilon/3$, $\langle x(t) \rangle < \langle x(t) \rangle^* + \varepsilon/(3e^u c^u) = \varepsilon/(3e^u c^u)$. 再由(9)式可得, 当 $t > T$ 时, $M_2(t)/t \leq \varepsilon/3$. 将上述3个不等式代入(8)式可以得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \ln \left[\frac{y(t)}{y_0} \right] &\leq \langle -f_2(t) \rangle + e^u c^u \langle x(t) \rangle - g^l \langle y(t) \rangle + \frac{M_2(t)}{t} \leq \langle -f_2(t) \rangle^* + \frac{\varepsilon}{3} + \\ &e^u c^u \cdot \frac{\varepsilon}{3e^u c^u} - g^l \langle y(t) \rangle + \frac{\varepsilon}{3} = \langle -f_2(t) \rangle^* + \varepsilon - g^l \langle y(t) \rangle < 0, \end{aligned}$$

于是, 得到 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ a. s..

如果 $\langle f_1(t) \rangle^* > 0$, 那么根据(7)式和(9)式可得

$$\frac{1}{t} \left[\ln \frac{x(t)}{x_0} \right] \leq \langle f_1(t) \rangle^* + \frac{\varepsilon}{2} - [\langle b(t) \rangle_* - \varepsilon] \langle x(t) \rangle + \frac{\varepsilon}{2},$$

根据引理2以及 ε 的任意性, 可以推得

$$\langle x(t) \rangle^* \leq \frac{\langle f_1(t) \rangle^*}{\langle b(t) \rangle_*}. \quad (11)$$

将这些不等式代入(8)式并利用 ε 的任意性, 可以得到

$$\begin{aligned} \left[\frac{\ln y(t)}{t} \right]^* &\leq \langle -f_2(t) \rangle^* + \langle \frac{e(t)c(t)x(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))} \rangle^* \leq \langle -f_2(t) \rangle^* + [\langle e(t)c(t) \rangle^* + \\ &\varepsilon] \langle x(t) \rangle^* \leq \frac{\langle b(t) \rangle_* \langle -f_2(t) \rangle^* + [\langle e(t)c(t) \rangle^* + \varepsilon] \langle f_1(t) \rangle^*}{\langle b(t) \rangle_*} < 0, \end{aligned}$$

因此, 可以推得 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ a. s..

(II) 根据(I)的证明可知, 如果 $\langle f_1(t) \rangle^* \leq 0$, 那么 $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ a. s., 于是 $\langle y(t) \rangle^* = 0$. 现在假设 $\langle f_1(t) \rangle^* > 0$, 将通过反证法来证明(II). 若 $\langle y(t) \rangle^* > 0$, 那么根据(3)式可知 $[t^{-1} \ln y(t)]^* = 0$, 然后利用(8)式, 可以推得

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\ln y(t)}{t} \right]^* \leq \langle -f_2(t) \rangle^* + \langle \frac{e(t)c(t)x(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))} \rangle^* \leq \\ &\langle -f_2(t) \rangle^* + \langle e(t)c(t) \rangle^* \langle x(t) \rangle^*, \end{aligned}$$

另一方面, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $T > 0$, 当 $t > T$ 时, 使得

$$\begin{aligned} \langle -f_2(t) \rangle &< \langle -f_2(t) \rangle^* + \frac{\varepsilon}{3}, \langle \frac{e(t)c(t)x(t)}{(1+\alpha(t)x(t))(1+\beta(t)y(t))} \rangle < \\ &\langle e(t)c(t) \rangle^* \langle x(t) \rangle^* + \frac{\varepsilon}{3}, \frac{M_2(t)}{t} < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

将上述3个不等式代入(8)式, 立即可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \ln \left[\frac{y(t)}{y_0} \right] &\leq \langle -f_2(t) \rangle^* + \frac{\varepsilon}{3} + \langle e(t)c(t) \rangle^* \langle x(t) \rangle^* + \frac{\varepsilon}{3} - [\langle g(t) \rangle_* - \varepsilon] \langle y(t) \rangle + \frac{\varepsilon}{3} = \\ &\langle -f_2(t) \rangle^* + \langle e(t)c(t) \rangle^* \langle x(t) \rangle^* + \varepsilon - [\langle g(t) \rangle_* - \varepsilon] \langle y(t) \rangle. \end{aligned}$$

根据引理2和 ε 的任意性, 可以得到

$$\langle y(t) \rangle^* \leq \frac{\langle -f_2(t) \rangle^* + \langle e(t)c(t) \rangle^* \langle x(t) \rangle^*}{\langle g(t) \rangle^*},$$

将(11)式代入上面等式,可以得出

$$\langle y(t) \rangle^* \leq \frac{\langle b(t) \rangle^* \langle -f_2(t) \rangle^* + \langle e(t)c(t) \rangle^* \langle f_1(t) \rangle^*}{\langle b(t) \rangle^* \langle g(t) \rangle^*} = 0,$$

此与假设矛盾,因此得到 $\langle y(t) \rangle^* = 0$ a. s. .

(III) 接下来,证明 $\langle y(t) \rangle^* > 0$ a. s. . 否则,对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在模型(2)的一个解 $(x(t), y(t))$,并且满足正初始值条件 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}_+^2$,使得 $\mathcal{P}\{\langle y(t) \rangle^* < \varepsilon\} > 0$. 取 ε 足够小,以使得

$$\langle -f_2(t) \rangle^* + \left\langle \frac{e(t)c(t)\hat{x}(t)}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))} \right\rangle^* > \left(g^u + \frac{2e^u(c^u)^2}{b^l} \right) \varepsilon. \tag{12}$$

根据(8)式可以推得

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \ln \left[\frac{\hat{y}(t)}{y_0} \right] &= \langle -f_2(t) \rangle + \left\langle \frac{e(t)c(t)\hat{x}(t)}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))} \right\rangle - \langle g(t)\hat{y}(t) \rangle + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2(s) dB_2(s) + \\ &\left\langle \frac{e(t)c(t)\hat{x}(t)}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))} - \frac{e(t)c(t)\bar{x}(t)}{(1+\alpha(t)\bar{x}(t))(1+\beta(t)\bar{y}(t))} \right\rangle, \end{aligned}$$

这里 $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ 是系统(5) 满足初始条件 $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}_+^2$ 的解,并且由随机微分方程的比较定理还有

$$\hat{x}(t) \leq \bar{x}(t), \hat{y}(t) \leq \bar{y}(t) \quad \text{a. s.}, \quad t \in [0, +\infty).$$

由于

$$\begin{aligned} &\frac{e(t)c(t)\hat{x}(t)}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))} - \frac{e(t)c(t)\bar{x}(t)}{(1+\alpha(t)\bar{x}(t))(1+\beta(t)\bar{y}(t))} = \\ &\frac{e(t)c(t)\beta(t)\bar{x}(t)(\bar{y}(t) - \hat{y}(t))}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))(1+\alpha(t)\bar{x}(t))(1+\beta(t)\bar{y}(t))} + \\ &\frac{e(t)c(t)\alpha(t)\beta(t)\bar{x}(t)\hat{x}(t)(\bar{y}(t) - \hat{y}(t))}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))(1+\alpha(t)\bar{x}(t))(1+\beta(t)\bar{y}(t))} - \\ &\frac{e(t)c(t)(\bar{x}(t) - \hat{x}(t))}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))(1+\alpha(t)\bar{x}(t))(1+\beta(t)\bar{y}(t))} - \\ &\frac{e(t)c(t)\beta(t)\bar{y}(t)(\bar{x}(t) - \hat{x}(t))}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))(1+\alpha(t)\bar{x}(t))(1+\beta(t)\bar{y}(t))} \geq \\ &\frac{e(t)c(t)\beta(t)\bar{x}(t)(\bar{y}(t) - \hat{y}(t))}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))(1+\alpha(t)\bar{x}(t))(1+\beta(t)\bar{y}(t))} + \\ &\frac{e(t)c(t)\alpha(t)\beta(t)\bar{x}(t)\hat{x}(t)(\bar{y}(t) - \hat{y}(t))}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))(1+\alpha(t)\bar{x}(t))(1+\beta(t)\bar{y}(t))} - \\ &e(t)c(t)(\bar{x}(t) - \hat{x}(t)) - e(t)c(t)(\bar{x}(t) - \hat{x}(t)) \geq \\ &-2e(t)c(t)(\bar{x}(t) - \hat{x}(t)), \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \ln \left[\frac{\hat{y}(t)}{y_0} \right] &\geq \langle -f_2(t) \rangle + \left\langle \frac{e(t)c(t)\bar{x}(t)}{(1+\alpha(t)\bar{x}(t))(1+\beta(t)\bar{y}(t))} \right\rangle - \langle g(t)\hat{y}(t) \rangle + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2(s) dB_2(s) - \\ &2\langle e(t)c(t)(\bar{x}(t) - \hat{x}(t)) \rangle \geq \langle -f_2(t) \rangle + \left\langle \frac{e(t)c(t)\bar{x}(t)}{(1+\alpha(t)\bar{x}(t))(1+\beta(t)\bar{y}(t))} \right\rangle - \\ &\langle g(t)\hat{y}(t) \rangle + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2(s) dB_2(s) - 2e^u c^u \langle \bar{x}(t) - \hat{x}(t) \rangle. \tag{13} \end{aligned}$$

定义 $V_1(t) = |\ln \bar{x}(t) - \ln \hat{x}(t)|$, 则当 $t \geq 0$ 时, $V_1(t)$ 是一个正值连续函数. 计算 $V_1(t)$ 的右上导数, 然后利用伊藤公式, 可以推得

$$\begin{aligned} D^+ V_1(t) &= \text{sgn}(\bar{x}(t) - \hat{x}(t)) \left\{ \left[\frac{d\bar{x}(t)}{\bar{x}(t)} - \frac{(d\bar{x}(t))^2}{2\bar{x}^2(t)} \right] - \left[\frac{d\hat{x}(t)}{\hat{x}(t)} - \frac{(d\hat{x}(t))^2}{2\hat{x}^2(t)} \right] \right\} = \\ &\text{sgn}(\bar{x}(t) - \hat{x}(t)) \left\{ -b(t)(\bar{x}(t) - \hat{x}(t)) + \frac{c(t)\hat{y}(t)}{(1+\alpha(t)\hat{x}(t))(1+\beta(t)\hat{y}(t))} \right\} dt = \end{aligned}$$

$$\left[-b(t)(\bar{x}(t) - \hat{x}(t)) + \frac{c(t)\hat{y}(t)}{(1 + \alpha(t)\hat{x}(t))(1 + \beta(t)\hat{y}(t))} \right] dt \leq \\ [-b'(\bar{x}(t) - \hat{x}(t)) + c^u \hat{y}(t)] dt,$$

两边同时从 0 到 t 积分再同时除以 t , 得到 $\frac{V_1(t) - V_1(0)}{t} \leq c^u \langle \hat{y}(t) \rangle - b' \langle \bar{x}(t) - \hat{x}(t) \rangle$. 由于 $\frac{V_1(t)}{t} \geq 0$, 所

以, 根据上式可以推得 $b' \langle \bar{x}(t) - \hat{x}(t) \rangle \leq c^u \langle \hat{y}(t) \rangle + \frac{V_1(0)}{t}$.

因为 $V_1(0) = 0$, 故 $\langle \bar{x}(t) - \hat{x}(t) \rangle \leq \frac{c^u}{b'} \langle \hat{y}(t) \rangle$, 将此式代入(13)式中, 可以得出

$$\frac{1}{t} \ln \left[\frac{\hat{y}(t)}{y_0} \right] \geq \langle -f_2(t) \rangle + \left\langle \frac{e(t)c(t)\bar{x}(t)}{(1 + \alpha(t)\bar{x}(t))(1 + \beta(t)\bar{y}(t))} \right\rangle - \\ \langle g(t)\hat{y}(t) \rangle + \frac{1}{t} \int_0^t \sigma_2(s) dB_2(s) - 2 \frac{e^u (c^u)^2}{b'} \langle \hat{y}(t) \rangle. \quad (14)$$

在(14)式两边同时取上极限, 可得

$$\left[\frac{\ln \hat{y}(t)}{t} \right]^* \geq \langle -f_2(t) \rangle^* + \left\langle \frac{e(t)c(t)\bar{x}(t)}{(1 + \alpha(t)\bar{x}(t))(1 + \beta(t)\bar{y}(t))} \right\rangle^* - \left(g^u + \frac{2e^u (c^u)^2}{b'} \right) \varepsilon > 0,$$

此与引理 1 矛盾.

3 数值模拟

在本节, 将利用 Milstein 方法^[14] 进行数值模拟, 以验证和补充上述主要结果的有效性. 考虑下面的离散化方程:

$$x_{k+1} = x_k + x_k \left[a(k\Delta t) - b(k\Delta t)x_k - \frac{c(k\Delta t)y_k}{(1 + \alpha(k\Delta t)x_k)(1 + \beta(k\Delta t)y_k)} \right] \Delta t + \\ \sigma_1(k\Delta t)x_k \sqrt{\Delta t} \xi_k + \frac{\sigma_1^2(k\Delta t)}{2} x_k (\xi_k^2 - 1) \Delta t, \\ y_{k+1} = y_k + y_k \left[-d(k\Delta t) + \frac{e(k\Delta t)c(k\Delta t)x_k}{(1 + \alpha(k\Delta t)x_k)(1 + \beta(k\Delta t)y_k)} - g(k\Delta t)y_k \right] \Delta t + \\ \sigma_2(k\Delta t)y_k \sqrt{\Delta t} \eta_k + \frac{\sigma_2^2(k\Delta t)}{2} y_k (\eta_k^2 - 1) \Delta t,$$

其中 ξ_k 和 $\eta_k, k = 1, 2, \dots, n$, 是服从正态分布 $N(0, 1)$ 的高斯随机变量.

在图 1 中, 取 $a(t) = 0.7 + 0.1 \sin t, d(t) = 0.1 - 0.04 \sin t, b(t) = g(t) = 2 + 0.01 \sin t, c(t) = e(t) = 1.4 + 0.1 \sin t, \alpha(t) = \beta(t) = 1, \sigma_1(t) = 1.25 + 0.1 \sin t, \sigma_2^2(t)/2 = 0.1 + 0.04 \sin t$, 那么 $\langle f_1(t) \rangle^* = -0.055 < 0$, 由定理 1 和定理 2 可知, 物种 $x(t), y(t)$ 均灭绝.

在图 2 中, 取 $a(t) = 0.7 + 0.1 \sin t, d(t) = 0.1 - 0.04 \sin t, b(t) = g(t) = 2 + 0.01 \sin t, c(t) = e(t) = 1.4 + 0.1 \sin t, \alpha(t) = \beta(t) = 1, \sigma_1(t) = 1 + 0.1 \sin t, \sigma_2^2(t)/2 = 0.24 + 0.04 \sin t$, 那么 $\langle f_1(t) \rangle^* = 0.2 > 0, \langle b(t) \rangle^*, \langle -f_2(t) \rangle^* + \langle e(t)c(t) \rangle^* \langle f_1(t) \rangle^* = 1.99 \times -0.34 + 1.5 \times 1.5 \times 0.2 = -0.23 < 0$. 根据定理 1 与定理 2 可知, 物种 $x(t)$ 在平均意义下弱持续而 $y(t)$ 灭绝.

在图 3 中, 取 $a(t) = 0.7 + 0.1 \sin t, d(t) = 0.1 - 0.04 \sin t, b(t) = g(t) = 2 + 0.01 \sin t, c(t) = e(t) = 1.4 + 0.1 \sin t, \alpha(t) = \beta(t) = 1, \sigma_1(t) = 1 + 0.1 \sin t, \sigma_2^2(t)/2 = 0.02 + 0.04 \sin t$, 那么 $\langle f_1(t) \rangle^* = 0.2 > 0$, 但是 $\langle -f_2(t) \rangle^* + \left\langle \frac{e(t)c(t)\bar{x}(t)}{(1 + \alpha(t)\bar{x}(t))(1 + \beta(t)\bar{y}(t))} \right\rangle^* > 0$ 很难验证. 图 3 说明物种 $x(t), y(t)$ 在平均意义下都是弱持续的.

4 结束语

基于理论和实际的重要性, 具有 Crowley-Martin 型功能性反应的捕食模型已经引起了生态学家与数学家

的极大关注,并被广泛地研究.然而,对于随机非自治情形至今还没有被研究.因此,本文主要考虑了具有 Crowley-Martin 型功能性反应的随机非自治捕食模型的持续性与灭绝性.根据伊藤公式并通过构造 Lyapunov 函数给出了物种灭绝、平均意义下非持续以及平均意义下弱持续的充分条件,得到了食饵种群在平均意义下弱持续与灭绝的阈值,最后通过数值模拟验证了结论的有效性.

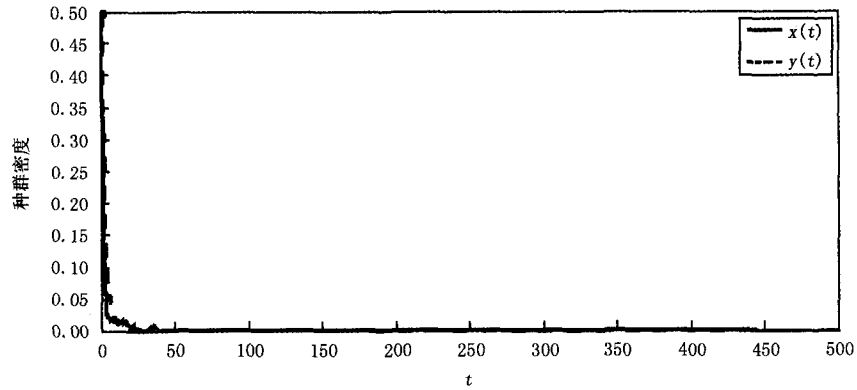


图1 食饵 $x(t)$ 与捕食者 $y(t)$ 均灭绝

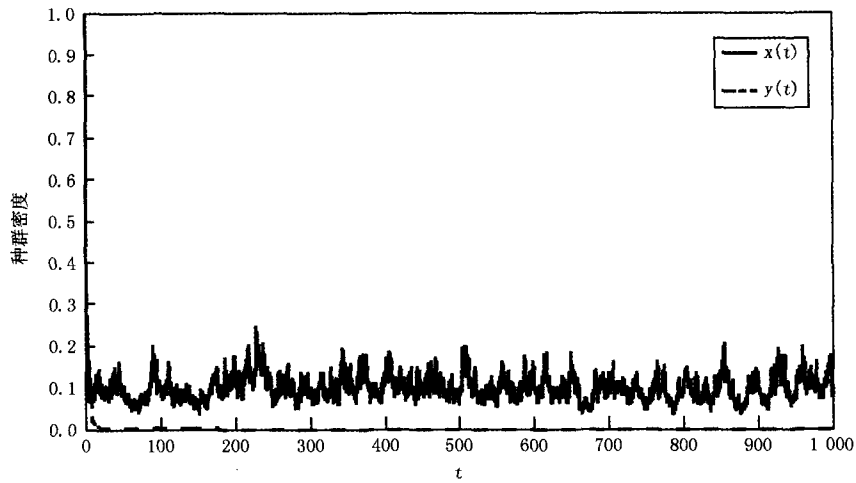


图2 食饵 $x(t)$ 弱持续,捕食者 $y(t)$ 灭绝

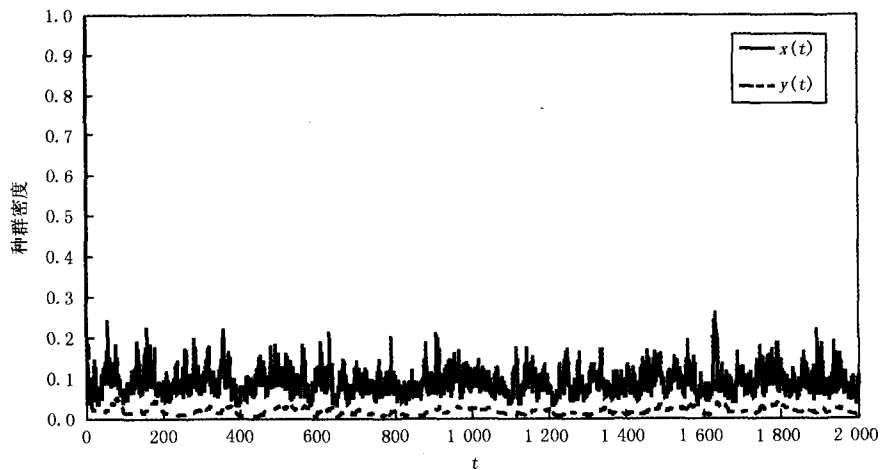


图3 食饵 $x(t)$ 与捕食者 $y(t)$ 均弱持续

然而,仍有一些有趣的问题值得进一步研究.例如,本文仅仅得到了捕食者种群在平均意义下弱持续的充分条件,而这个条件并不是很理想,也许可以得到捕食者种群在平均意义下弱持续与灭绝的阈值.此外,还可以研究该模型在平均意义下强持续与全局吸引性等.

参 考 文 献

- [1] Rai B, Freedman H, Addicott J. Analysis of three-species models of mutualism in predator-prey and competitive systems[J]. *Math Biosci*, 1983, 65(1):13-50.
- [2] Gan W, Lin Z. Coexistence and asymptotic periodicity in a competitor-competitor-mutualist model[J]. *J Math Anal Appl*, 2008, 337(2): 1089-1099.
- [3] Aguirre P, González-Olivares E, Torres S. Stochastic predator-prey model with Allee effect on prey [J]. *Nonlinear Anal-Real*, 2013, 14(1): 768-779.
- [4] 李畅通,唐三一. 具有季节性变参数和脉冲的捕食系统的动态行为[J]. *生物数学学报*, 2013, 28(3):499-504.
- [5] Golec J, Sathanathan S. Stability analysis of a stochastic logistic model[J]. *Math Comput Model*, 2003, 38(5/6):585-593.
- [6] Zhu C, Yin G. On competitive Lotka-Volterra model in random environments[J]. *J Math Anal Appl*, 2009, 357(1):154-170.
- [7] Mao X, Li X. Population dynamical behavior of non-autonomous Lotka-Volterra competitive system with random perturbation[J]. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2009, 24(2):523-545.
- [8] Saha T, Chakrabarti C. Stochastic analysis of prey-predator model with stage structure for prey[J]. *J Appl Math Comput*, 2011, 35(1):195-209.
- [9] Liu M, Wang K, Wu Q. Survival analysis of stochastic competitive models in a polluted environment and stochastic competitive exclusion principle [J]. *Bull Math Biol*, 2011, 73(9):1969-2012.
- [10] Liu M, Wang K. Dynamics of a two-prey one-predator system in random environments[J]. *J Nonlinear Sci*, 2013, 23(5):751-775.
- [11] Ma Z, Cui G, Wang W. Persistence and extinction of a population in a polluted environment[J]. *Math Biosci*, 1990, 101:75-97.
- [12] Cheng S R. Stochastic population systems[J]. *Stoch Anal Appl*, 2009, 27:854-874.
- [13] Mao X. *Stochastic Differential Equations and Applications* [M]. Chichester:Horwood Publishing, 1997.
- [14] Higham D. An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations[J]. *SIAM Rev*, 2001, 43:525-546.

Persistence and Extinction for a Stochastic Non-autonomous Predation Model with Crowley-Martin Functional Response

Zhao Zhitao, Deng Xiaoyu

(School of Mathematical Sciences, Heilongjiang University, Harbin 150086, China)

Abstract: In this paper, we mainly study the persistence and extinction of a stochastic non-autonomous predation model with Crowley-Martin functional response. Sufficient criteria for extinction, non-persistence in the mean and weak persistence in the mean are established. In addition, some numerical simulations are carried out to support our theoretical results.

Keywords: stochastic non-autonomous predation model; Crowley-Martin functional response; persistence; extinction