

带跳的随机波动模型的参数估计

刘利敏, 万孟然

(河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

摘要: 讨论了带跳的随机波动模型中的参数估计问题, 假设跳过程服从双指数跳, 波动项服从 Heston 模型. 首先借助 Lee-Myland 方法识别跳跃部分, 运用极大似然估计方法对跳跃部分的参数进行估计. 然后将扩散部分离散化之后用极大似然估计方法对扩散项的参数进行估计. 最后, 利用上证综合指数 2015—2018 年的历史数据进行实证分析, 实验结果表明使用该方法能有效估计带跳的随机波动率模型的参数.

关键词: 随机波动率; LM 方法; 极大似然估计

中图分类号: F224

文献标志码: A

自从 1973 年布莱克(BLACK)和舒尔斯(SCHOLES)发表了期权定价公式以来^[1], 特别是 20 世纪 90 年代以来, 期权已成为最有活力的衍生金融产品, 并得到了迅速发展和广泛应用. 关于期权定价理论, 已有很多学者通过放松 Black-Scholes 模型的假定提出了各种拓展的定价模型. 如: 跳-扩散模型、随机波动率模型等.

然而, 大量金融统计数据表明 B-S 模型与实际情形存在系统偏差, 其中主要的两种不一致现象是: (1) 由 B-S 模型确定的资产价格分布过程的峰度过小; (2) 实际观测到的资产价格分布的两条拖尾曲线都比 B-S 模型假设的对数正态分布要宽, 即存在隐含波动率微笑(implied volatility smile)的现象. 为改进 B-S 模型达到与实际相符的目的, 目前文献上提出了许多方法, 主要集中于如下两方面的推广: 一是对于资产价格分布过程引入随机跳得到跳-扩散模型, 见文献[2—3]; 二是假设波动率为随机过程得到随机波动率模型, 即允许资产价格分布过程的波动率表现为某种随机过程, 见文献[4—5].

随机波动率模型^[6]与跳扩散模型各有优缺点: 跳-扩散模型能很好地刻画各种重大突发事件对资产价格的影响, 如新的发明发现、突发战争、自然灾害、新的经济政策的宣布实行以及国际国内形势的突然变化等因素对资产(如股票)价格产生的剧烈影响, 纯粹的随机波动率模型是不能迅速反映这种影响的; 另一方面, 在没有重大事件到来时, 跳-扩散模型中的常值波动率与实际相违背, 这已成为不争的事实, 此时, 随机波动率模型却能较好地解释资产价格的变化. 因此有充足的理由认为, 将跳-扩散模型与随机波动率模型组合得到的模型更能充分地反映资产价格的变化规律.

随机波动率模型是一种典型的非线性、非高斯状态空间模型, 其似然函数为一个极为复杂的高维积分, 这导致随机波动率模型中的参数难以估计. 近几十年来, 在随机波动率模型的参数估计方面已经取得了很大的进展. 为了估计随机波动率模型中的参数, 学者们提出了许多方法, 包括广义矩方法(GMM)^[7]、有效矩方法(EMM)^[8]和马尔可夫链蒙特卡罗方法(MCMC)^[9]等. 文献[10]对随机波动模型的各种参数估计方法进行了综合的比较研究. 在估计随机波动模型的上述方法中, GMM 和 EMM 方法都比较简单, 但研究发现其有限样本性质和估计有效性不如 MCMC. 尽管 MCMC 对随机波动模型的估计比 GMM 和 EMM 都更为有效, 但其在计算上负担较大. 一种有效且计算量较小的估计方法是极大似然估计方法(MLE)^[11—12]. 近几年跳扩散模型参数估计的研究也主要集中在上述的几种估计方法. 本文引入了 Lee-Mykland^[13]方法识别跳跃, 并用极大似然估计方法(MLE)分别对跳跃部分和随机波动部分的参数进行估计.

收稿日期: 2018-09-26; **修回日期:** 2019-05-13.

基金项目: 国家社会科学基金(18BJY247); 河南省科技攻关项目(182102210364).

作者简介(通信作者): 刘利敏(1971—), 女, 河南安阳人, 河南师范大学副教授, 博士, 研究方向为随机分析和金融数学, E-mail: llim2004@163.com.

1 模型建立

假设标的资产的价格过程 S_t 满足如下模型:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma(t)dW(t) + (e^{J_u} - 1)dN_u(\lambda_u) + (e^{-J_d} - 1)dN_d(\lambda_d), \quad (1)$$

其中 $W(t)$ 是 F_t 适应的标准布朗运动, μ 是漂移率, 波动率 $\sigma(t)$ 是随机波动过程, 满足 $d\sigma^2(t) = (\alpha + \beta\sigma^2(t))dt + \omega\sigma(t)dW_\sigma(t)$, 其中 α, β 及 ω 均为常数. J_u 和 J_d 分别表示向上和向下的跳跃幅度, 皆服从指数分布. $dN_u(\lambda_u)(N_d(\lambda_d))$ 表示强度为 $\lambda_u(\lambda_d)$ 的泊松计数过程.

利用伊藤引理对 (1) 式进行对数变换后, 得到如下形式:

$$d\ln S(t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma(t)dW(t) + J_u dN_u(\lambda_u) - J_d dN_d(\lambda_d). \quad (2)$$

2 跳的识别

这部分是利用文献[12]提出的一种跳识别的方法, 即 Lee-Mykland 逐时点检验方法, 此方法能检测某个给定的收益率数据是否服从纯粹连续分布, 从而识别出过程中的跳.

首先构造检验统计量 $\mathcal{L}(i)$ 来检测在 t_i 时刻是否存在从 t_{i-1} 到 t_i 的跳:

$$\mathcal{L}(i) \equiv \frac{\ln S(t_i)/S(t_{i-1})}{\hat{\sigma}(t_i)}, \quad (3)$$

其中

$$\hat{\sigma}(t_i)^2 = \frac{1}{K-2} \sum_{j=i-K+2}^{i-1} |\ln S(t_j)/S(t_{j-1})| |\ln S(t_{j-1})/S(t_{j-2})| \quad (4)$$

为用现实双幂变差估计该点的时点方差, $S(t_i)$ 为 t_i 时刻的价格数据. 统计量 $\mathcal{L}(i)$ 渐近服从均值为 0, 标准差为 $\frac{1}{c}$ 的正态分布, 其中 $c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

视窗大小 K 是一个折中选择, 如果 K 值太小, 统计变量 $\mathcal{L}(i)$ 就很难有效估计跳, 而如果 K 值太大, 又会带来很重的计算负担. 因此, K 需要满足的条件为 $K = O_p(\Delta^\alpha)$, 其中 $-1 < \alpha < -0.5$, O_p 表示对任意的 $\epsilon > 0$ 存在一个有限的常数 M_ϵ , 使得 $P(|K| > M_\epsilon \Delta^\alpha) < \epsilon$.

Lee 和 Mykland 给出了跳识别的拒绝域, 并证明了若在时间间隔 $(t_{i-1}, t_i]$ 内不存在跳, 则在 $\Delta t \rightarrow 0$ 时有:

$$\frac{\max | \mathcal{L}(i) | - C_n}{S_n} \rightarrow \Psi, \quad (5)$$

其中, Ψ 是一个累积分布函数, 满足 $p(\Psi \leq x) = \exp(-e^{-x})$,

$$C_n = \frac{2\ln(n)^{0.5}}{c} - \frac{\ln(\pi) + \ln(\ln n)}{2c(2\ln n)^{0.5}}, S_n = \frac{1}{c(2\ln n)^{0.5}}, \quad (6)$$

其中, $c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, n 是样本容量, K 为视窗大小.

通过构造以上检验统计变量, 在给定显著性水平时就能得到相应的检验结果. 例如, 假设显著性水平 $\alpha = 0.01$, 令 $\beta^* = (|L(i)| - C_n)/S_n$, 可得 $p(\epsilon \leq \beta^*) = \exp(-e^{-\beta^*}) = 0.99$, 即阈值 $\beta^* = -\ln(-\ln(0.99)) = 4.6001$, 由此可以得到判断依据: 若 $(|L(i)| - C_n)/S_n > 4.6001$, 则在 t_i 时刻存在跳.

下面给出股票价格收益率序列的跳跃识别算法:

(1) 对资产价格收益率数据用 (3) 式和 (4) 式计算统计变量 $\mathcal{L}(i)$.

(2) 选择一个显著性水平 α 计算阈值, Ψ 是一个累积分布函数, 满足 $p(\Psi \leq \beta^*) = \exp(-e^{-\beta^*}) = 1 - \alpha$.

(3)如果 $(\mathcal{L}(i) - C_n)/S_n > \beta^*$, 则确定在 $(t_{i-1}, t_i]$ 时间段内存在跳, 否则不存在跳.

对每个点重复以上 3 个步骤直到将所有样本检测完成. 为简单起见, 将检测出的跳变序列记为 S_t^J , 同时分离出来连续部分的时间序列数据, 并记为 S_t^C , 然后分别对这两个序列进行参数估计.

3 参数估计

利用 Lee-Mykland 跳识别方法, 可以识别出收益率序列中的跳跃点和跳跃时刻, 将其从扩散过程中分离出来, 从而得到跳跃序列 S_t^J 和连续序列 S_t^C . 由于 S_t^C 缺失了部分数据导致扩散部分不完整. 为了可以抹平数据, 选用跳跃点前后 6 个时刻的数据均值替换此数据, 使得连续序列更平滑, 得到修正的扩散过程.

3.1 跳跃部分参数估计

3.1.1 跳跃频率的估计

对于强度为 Poisson 计数过程来说, 对其频率的估计可以用极大似然法估计方法: $\hat{\lambda}_l(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$, 其中 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 为样本点.

用本文介绍的跳识别方法检测出样本中跳跃序列 S_t^J , 统计出跳跃幅度大于 0 的个数为 m_1 , 小于 0 的个数为 m_2 , 则向上(下)跳跃频率的估计为: $\hat{\lambda}_u = \frac{m_1}{n}, \hat{\lambda}_d = \frac{m_2}{n}$, 其中 n 为样本点个数.

3.1.2 跳跃幅度的估计

对于服从指数分布的 λ , 由对数似然函数 $\ln L(\hat{\lambda}) = n \ln \hat{\lambda} - \hat{\lambda} n X$ 得到其极大似然估计: $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i}$, 其中 x_1, x_2, \dots, x_n 为样本点.

由上述方法计算可得修正后的连续扩散序列, 记为: $S_t^C = \frac{1}{6}(S_{t-3} + S_{t-2} + S_{t-1} + S_{t+1} + S_{t+2} + S_{t+3})$, 将 S_t^J 依时刻分别与 S_t^C 相减, 即得到上、下跳幅. 大于 0 的个数记为 m_1 , 即为 $J_i^u (i=1, 2, \dots, m_1)$; 小于 0 的个数记为 m_2 , 即为 $J_j^d (j=1, 2, \dots, m_2)$. 向上和向下跳跃幅度的估计值分别为:

$$\hat{\eta}_u = \bar{J}_u = \frac{1}{m_1 \sum_{i=1}^{m_1} J_i^u}; \hat{\eta}_d = \bar{J}_d = \frac{1}{m_2 \sum_{j=1}^{m_2} J_j^d}.$$

3.2 扩散过程的参数估计

假设扩散部分服从 Heston^[14] 模型,

$$\begin{cases} \frac{dS^C(t)}{S^C(t)} = \mu dt + \sigma(t) dW_s(t), \\ d\sigma^2(t) = (\alpha + \beta\sigma^2(t)) dt + \omega\sigma(t) dW_\sigma(t), \end{cases} \quad (7)$$

其中, $W_s(t)$ 和 $W_\sigma(t)$ 是相互独立的布朗运动^[15]. 扩散部分模型的参数为 $\mu, \alpha, \beta, \omega$.

首先将模型离散化, 其形式如下:

$$\begin{cases} S^C(t_{n+1}) - S^C(t_n) = \mu S^C(t_n) \Delta t_n + \sigma(t_n) S^C(t_n) \Delta W_1(t), \\ \sigma^2(t_{n+1}) - \sigma^2(t_n) = (\alpha + \beta\sigma^2(t_n)) \Delta t_n + \omega\sigma(t_n) \Delta W_2(t), \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\Delta W_i(t_n) = W_i(t_{n+1}) - W_i(t_n), i=1, 2$.

记 $Y = (y_1, \dots, y_n)^T, \Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)^T$, 其中, $y_n = \frac{S^C(t_{n+1}) - S^C(t_n)}{S^C(t_n)}$, 而 $\Delta_n = \sigma^2(t_{n+1}) - \sigma^2(t_n)$, 设

$\tilde{z}_n \triangleq (y_n, \Delta_n)^T$ 的条件分布为: $\tilde{z}_n \sim N(\tilde{\mu}_n, \tilde{\Sigma}_n)$ 其中,

$$\tilde{\mu}_n = \begin{pmatrix} \mu \Delta t_n \\ (\alpha + \beta\sigma_n^2) \Delta t_n \end{pmatrix}, \tilde{\Sigma}_n = \begin{pmatrix} \sigma_n^2 \Delta t_n, 0 \\ 0, \omega^2 \sigma_n^2 \Delta t_n \end{pmatrix}.$$

所以,给定的参数 (Y, Δ) 的条件分布为:

$$f(Y, \Delta | \mu, \alpha, \beta, \omega) = \prod_{n=0}^{M-1} \frac{1}{2\pi | \Sigma_n |^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{z}_n - \tilde{\mu}_n)^T \Sigma_n^{-1}(\tilde{z}_n - \tilde{\mu}_n)\right\} \propto \frac{1}{\omega^M} \exp\left\{-\sum_{n=0}^{M-1} \frac{(y_n - \mu \Delta t_n)^2 \omega^2 + [\Delta_n - (\alpha + \beta \sigma_n^2) \Delta t_n]^2}{2\omega^2 \sigma_n^2 \Delta t_n}\right\},$$

因此给定参数 (Y, Δ) 的似然函数为:

$$L(\mu, \alpha, \beta, \omega) \propto \frac{1}{\omega^M} \exp\left\{-\sum_{n=0}^{M-1} \frac{(y_n - \mu \Delta t_n)^2 \omega^2 + [\Delta_n - (\alpha + \beta \sigma_n^2) \Delta t_n]^2}{2\omega^2 \sigma_n^2 \Delta t_n}\right\} = \exp\left\{-\sum_{n=0}^{M-1} \frac{\left(\frac{y_n}{\sigma_n} - \mu \frac{\Delta t_n}{\sigma_n}\right)^2}{2\Delta t_n}\right\} \times \omega^{-M} \exp\left\{-\sum_{n=0}^{M-1} \frac{\left[\frac{\Delta_n}{\sigma_n} - (\alpha + \beta \sigma_n^2) \frac{\Delta t_n}{\sigma_n}\right]^2}{2\omega^2 \Delta t_n}\right\} \triangleq L_1 \times L_2. \tag{9}$$

由于(9)式计算难度较大,其计算过程可参考文献[16].为了极大化函数,首先极大化 L_2 式,此时,假设在 ω 给定的条件下,需要极小化 $\sum_{n=0}^{M-1} \left[\frac{\Delta_n}{\sigma_n} - \alpha \frac{\Delta t_n}{\sigma_n} - \beta \sigma_n \Delta t_n\right]^2$. 于是可以得到参数应满足如下关系式 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (X^T X)^{-1} X^T Z$, 其中:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t_0}{\sigma_0}, \sigma_0 \Delta t_0 \\ \vdots, \vdots \\ \frac{\Delta t_{M-1}}{\sigma_{M-1}}, \sigma_{M-1} \Delta t_{M-1} \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_0}{\sigma_0} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_{M-1}}{\sigma_{M-1}} \end{pmatrix}.$$

于是,极大化 L_2 要求 $\hat{\omega} = \frac{\|Z - X(\hat{\alpha}, \hat{\beta})^T\|}{\sqrt{M\Delta t_n}} = \frac{\|Z - X(X^T X)^{-1} X^T Z\|}{\sqrt{M\Delta t_n}}$; 其次,再极大化 L_1 式,可得参数应

满足 $\hat{\mu} = \left(\sum_{n=0}^{M-1} \frac{y_n}{\sigma_n}\right) / \left(\sum_{n=0}^{M-1} \frac{\Delta t_n}{\sigma_n}\right)$.

综上,当参数满足下式,可使似然函数取得最大值,
$$\begin{cases} (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (X^T X)^{-1} X^T Z, \\ \hat{\omega} = \frac{\|Z - X(X^T X)^{-1} X^T Z\|}{\sqrt{M\Delta t_n}}. \end{cases}$$
 解之即得,各参数的极大

$$\hat{\mu} = \left(\sum_{n=0}^{M-1} \frac{y_n}{\sigma_n}\right) / \left(\sum_{n=0}^{M-1} \frac{\Delta t_n}{\sigma_n}\right),$$

似然估计为:
$$\begin{cases} \hat{\mu} = \left(\sum_{n=0}^{M-1} \frac{y_n}{\sigma_n}\right) / \left(\sum_{n=0}^{M-1} \frac{\Delta t_n}{\sigma_n}\right), \\ \hat{\alpha} = (1, 0)(X^T X)^{-1} X^T Z, \\ \hat{\beta} = (0, 1)(X^T X)^{-1} X^T Z, \\ \hat{\omega} = \frac{\|Z - X(X^T X)^{-1} X^T Z\|}{\sqrt{M\Delta t_n}}. \end{cases}$$

4 实证分析

下面利用上一节的模型对上证综合指数进行实证分析,选取上证综合指数从 2015.08.20 至 2018.08.20 的收盘价为样本,共有 732 个观测值.由于原始数据不够稳定,因此对原始数据取对数,这样既不会改变数据的相关性又能使原始数据变得相对平稳.使用 $y_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$ 可以计算出对数收益率,其中 S_t 是 t 时刻的收盘价.图 1 给出了样本收益率的时间序列图.

从图 1 可以看到,股票收益率的收据并不平稳,存在多个跳跃点.使用 Lee-Mykland 跳识别方法识别出跳跃序列,如图 2 所示.

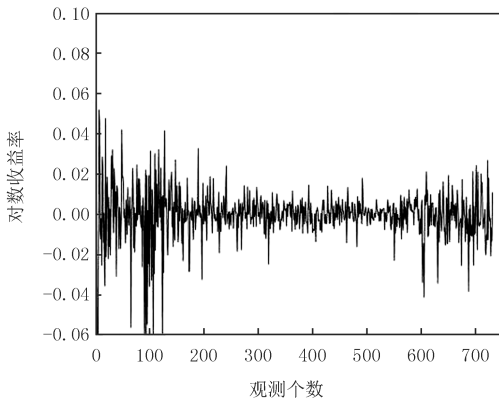


图 1 上证综合指数收益率时间序列图

Fig.1 Shanghai composite index yield time series chart

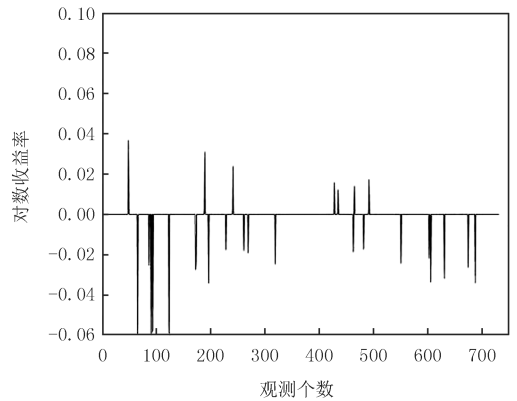


图 2 跳的识别结果

Fig.2 Jump recognition result

从图 2 可以看出,从 2015 年到 2018 年上证指数向上跳跃 7 次,向下跳跃 20 次.

利用跳跃部分的参数估计方法可以估计出该部分的参数估计结果见表 1.

表 1 跳跃部分参数估计结果

Tab.1 Recognition results of jump parameters

参数	$\hat{\lambda}_u$	$\hat{\lambda}_d$	η_u	η_d
估计结果	0.009 6	0.027 3	0.021 7	0.032 7

从参数估计结果可以看出向上和向下跳跃的年频率分别为 0.009 6 和 0.027 3,而跳跃幅度相仿.

将跳跃部分过滤出去,用跳跃点前后 6 个数据的平均值来取代跳跃点的价格,得到修正后的连续扩散过程收益率序列.如图 3 所示.

最后利用离散化的极大似然估计(ML)方法,估计出扩散项和随机波动率部分的参数为见表 2.

表 2 连续部分参数估计结果

Tab.2 Recognition results of continuous partial parameters

参数	μ	α	β	ω
估计结果	2.785 3	23.485 9	-26.554 8	1.373 9

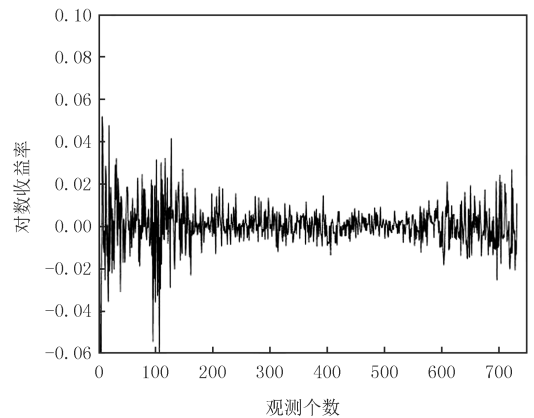


图 3 修正后的收益率序列图

Fig.3 Revised rate of return sequence

5 结束语

本文对带跳的随机波动率模型的参数估计问题

进行了探讨,通过引入 LM 方法,不仅能把跳跃的时间点和参数识别出来,而且能有效地估计出随机过程的参数.实证结果表明:该模型不仅仅可以对资产价格序列数据进行有效的统计分析,而且也更贴合实际数据.

参 考 文 献

- [1] BLACK F,SCHOLES M.The pricing of options and corporate liabilities[J].Journal of Political Economy,1973(2):637-654.
- [2] MERTON R.Option pricing when underlying process of stock returns is discontinuous[J].Journal of Financial Economics,1976,3(1/2): 125-144.
- [3] FREY R.Risk-minimization with incomplete information in a model for high-frequency data[J].Mathematical Finance,2000,10(2):215-225.
- [4] HULL J,WHITE A .The pricing of options on assets with stochastic volatilities[J].Journal of Finance,1987,42(2):281-300.

- [5] MAGHSOODI Y. Closed-form solution of the log-normal stochastic volatility option problem I: martingale volatility [M]. Working paper, 1998.
- [6] 刘利敏, 闫振荣. 随机波动率模型的等价鞅测度 [J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2006, 34(4): 24-27.
LIU L M, YAN Z R. The Equivalent Martingale Measures for the Stochastic Volatility Model [J]. Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition), 2006, 34(4): 24-27.
- [7] 李群峰. 动态面板数据模型的 GMM 估计及其应用 [J]. 统计与决策, 2010(16): 161-163.
LI Q F. GMM estimation of dynamic panel data model and its application [J]. Statistics & Decision, 2010(16): 161-163.
- [8] GALLANT A R, TAUCHEN G. Estimation of continuous-time models for stock returns and interest rates [J]. Macroeconomic Dynamics, 1997, 1: 135-168.
- [9] KIM S, SHEPHERD N, CHIB S. Stochastic volatility: Likelihood inference and comparison with ARCH models [J]. Review of Economic Studies, 1998, 65(3): 361-393.
- [10] BROTO C, RUIZ E. Estimation methods for stochastic volatility models: A survey [J]. Journal of Economic Surveys, 2004, 18(5): 613-649.
- [11] YACINE A-S, ROBERT K. Maximum likelihood estimation of stochastic volatility models [J]. Journal of Financial Economics, 2009, 83: 413-452.
- [12] 王文焕, 杨国生, 周泽昕, 等. 基于随机截尾数据及极大似然估计的继电保护可靠性分布 [J]. 电力系统保护与控制, 2019(12): 125-131.
WANG W H, YANG G S, ZHOU Z X, et al. Reliability distribution of relay protection based on random truncation data and maximum likelihood estimation [J]. Power System Protection and Control, 2019(12): 125-131.
- [13] LEE S S, MYKLAND P A. Jumps in financial markets: A new nonparametric test and jump dynamics [J]. Review of Financial Studies, 2008, 21(6): 2535-2563.
- [14] HESTON S. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bonds and currency options [J]. Review of Financial Studies, 1993, 6: 43-327.
- [15] 肖庆宪, 张建海. Black-Scholes 模型的参数估计 [J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2001, 29(1): 16-19.
XIAO Q X, ZHANG J H. The estimation of parameters for Black-Scholes model [J]. Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition), 2001, 29(1): 16-19.
- [16] 张磊. 随机波动率模型参数估计: 贝叶斯和极大似然方法 [D]. 北京: 清华大学, 2013.
ZHANG L. Estimation of a stochastic volatility model: Bayesian estimation and Maximum likelihood estimation [D]. Beijing: Tsinghua University, 2013.

Parameter estimation of stochastic volatility model with jump

Liu Limin, Wan Mengran

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: This paper discusses the parameter estimation problem in the stochastic volatility model with jumps. It is assumed that the jump process obeys the double exponential jump and the volatility term obeys the Heston model. Firstly, the Lee-Myland method is used to identify the jump part, and the maximum likelihood method is used to estimate the parameters of the jump part. Then the diffusion part is discretized and the parameters of the diffusion term are estimated by the maximum likelihood method. Finally, we use the historical data of the Shanghai Composite Index 2015—2018 years for empirical analysis. The experimental results show that the method can effectively estimate the parameters of the stochastic volatility model with jump.

Keywords: stochastic volatility; LM method; maximum likelihood estimation

[责任编辑 陈留院 赵晓华]