文章编号:1000-2367(2016)02-0053-04 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.02.010

场论中的离散积分理论研究

刘长欣,夏丽莉

(河南教育学院 物理与电子工程学院,郑州 450046)

摘 要:将差分视作一个几何变量,通过离散差分变分原理,得到场论中的 Noether 等式的离散形式. 给出场论中的离散 Noether 定理. 得到场论中存在离散的 Noether 守恒量的条件. 引入非线性 Schrödinger 方程的算例说明理论的应用.

关键词:离散 Noether 定理;变分积分子;场论

中图分类号:O316 **文献标志码**:A

差分方程的积分理论在求解离散力学系统方程时起到非常重要的作用. 离散 Noether 定理是通过系统对称性理论得到第一积分的方法. 这是求解差分方程的一种重要的路径. Birkhoff 在 1913 年首次讨论了差分方程[1]. Cadzow 给出了离散变分原理和离散的 Euler-Lagrange[2],Noether 定理揭示了守恒量和 Noether 对称性的一一对应关系[3]. 离散的 Noether 定理为差分方程的第一积分提供了简洁的途径.

Noether 对称性理论被广泛应用于经典力学中[4-6]. 近年来,Noether 对称性理论在场论中也有了一定的应用[7]. 李子平将 Noether 第一定理推广到相空间中,得到了相空间中 Noether 第二定理[8]. Arens 基于场空间的变换理论,通过 Noether 理论得到了电流守恒量的结论,而这些守恒的电流是麦克斯韦电磁场理论所没有探究得到的[9]. 然而,以往的文献只是研究了场论中连续系统的 Noether 定理,还没有文献涉及离散场论的 Noether 定理. 在离散场论的研究中涉及与 Noether 定理紧密相关的变分原理的离散格式. 郭汉英首先给出了场论中的差分离散变分原理,得到了差分离散 Euler-Lagrange 方程和正则方程[10]. 陈景波发展了多辛场论中的全变分原理,得到了多辛-能量-动量积分子[11]. 这些离散的变分原理为探究场论中的 Noether 对称性理论奠定了理论基础.

变分积分子是基于离散变分原理的系统的动力学方程形式. 对于保守系统或受到完整约束的动力学系统,离散变分算法具有较好的保系统的几何结构(辛结构)和保系统的守恒量(动量、能量、约束等)的特性[12-13]. 而且,相对于传统算法(4-RK),在计算的精确性和对动力学行为的长期跟踪性方面具有更为明显的优势[14].

本文基于差分变分原理,研究场论中的 Noether 定理和变分积分子,给出场论中的离散能量方程和动量方程形式. 给出 Noether 对称性的定义. 根据 Hamilton 作用量的不变性理论,得到 Noether 等式的离散形式,进而给出场论中离散版本的 Noether 定理.

1 场论中保守系统的离散方程

$X^{1,1}$ 是 2 维闵可夫斯基空间,独立场变量为 x 和 t,系统的态函数 u. $X=(x,t)$ 和 $X\times U=(x,t,u)$ 对应的离散表达式为 $X=Z\times Z=\{(x_i,x_j)\}$ 和 $X\times U=(x_i,x_j,u_{ij})$. 相对于连续系统的 Lagrange 函数在一

收稿日期:2015-11-21;**修回日期**:2016-03-04.

基金项目:国家自然科学基金(11502071);河南省自然科学基金(132300410051);河南省教育厅基础研究项目(13A140224).

第 1 作者简介:刘长欣(1966-),男,河南社旗人,河南教育学院副教授,主要从事动力学系统方程的可积性研究,E-mail:Lcx19662008@163.com.

通信作者:夏丽莉(1980-),女,河南教育学院讲师,博士,主要从事物理和力学中的数学方法研究,E-mail:xll2004@126.com.

段时间上的积分形式,离散的 Hamilton 作用量 $L(x,t,u,u_x,u_t)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t$ 的离散形式可表示为

$$L(x_i,t_j,u_{ij},\Delta_x u_{ij},\Delta_t u_{ij})\Delta_x\Delta_t, \tag{1}$$

其中 $\Delta_x u_{ij}=\dfrac{u_{i+1j}-u_{ij}}{x_{i+1}-x_i}$,$\Delta_t u_{ij}=\dfrac{u_{ij+1}-u_{ij}}{t_{j+1}-t_j}$,$\Delta_x=x_{i+1}-x_i$,$\Delta_t=t_{i+1}-t_i$.

场论中保守 Lagrange 系统的离散 Euler-Lagrange 方程,离散能量方程和动量方程为[10]

$$\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial u_{ij}}-\Delta_x\left(\frac{\partial L_D^{i-1j}}{\partial(\Delta_x u_{i-1j})}\right)-\Delta_t\left(\frac{\partial L_D^{ij-1}}{\partial(\Delta_t u_{ij-1})}\right)=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial t_j}+\Delta_t\left(\frac{\partial L_D^{ij-1}}{\partial(\Delta_t u_{ij-1})}\Delta_t u_{ij-1}-L_D^{ij-1}\right)=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial x_i}+\Delta_x\left(\frac{\partial L_D^{i-1j}}{\partial(\Delta_x u_{i-1j})}\Delta_x u_{i-1j}-L_D^{i-1j}\right)=0. \tag{4}$$

其中,能量方程(3)为离散能量守恒率方程.方程(4)被称为动量守恒方程.耦合算子(2)~(4)被称为多辛-能量-动量积分子.

2 场论中的 Noether 定理

在连续场论的对称性研究中,研究了 Yang-Mill 场[8]和电磁场论的 Noether 对称性和守恒量理论[9].对于离散场论,独立变量 t_j,x_i 和非独立变量 u_{ij} 作如下无限小变换

$$t_i^*=t_i+\delta t_i,x_j^*=x_j+\delta x_j,\ u_{ij}^*=u_{ij}+\delta u_{ij}, \tag{5}$$

其中 $\delta t_i=\varepsilon\tau_i$,$\delta x_j=\varepsilon\xi_j$,$\delta u_{ij}=\varepsilon\eta_{ij}$,$\varepsilon$ 为无限小参数,无限小生成元 $\tau_i=\tau_i(x_i,t_j,u_{ij},\Delta_x u_{ij},\Delta_t u_{ij})$,$\xi_j=\xi_j(x_i,t_j,u_{ij},\Delta_x u_{ij},\Delta_t u_{ij})$ 和 $\eta_{ij}=\eta_{ij}(x_i,t_j,u_{ij},\Delta_x u_{ij},\Delta_t u_{ij})$ 为 Lie 群的无线小生成元.基于这种离散的无限小变换理论被广泛应用到 Lagrange 系统[13],Hamilton 系统[6],非保守动力学系统[15]和场论[7]中.

定义 1 如果离散 Hamilton 作用量(1)是无限小变换群(5)的不变量,始终成立

$$\Delta_x x_i\Delta_t t_j\{\Delta_x\delta x_i\cdot L_D^{ij}+\Delta_t\delta t_j\cdot L_D^{ij}+\delta L_D^{ij}\}=0, \tag{6}$$

则称无限小变换是 Noether 意义下的对称变换.

判据 1 对于无限小变换群(5),如果满足条件

$$\begin{aligned}&-\Delta_x\delta x_i\cdot H_{xD}^{ij}-\Delta_t\delta t_j\cdot H_{tD}^{ij}+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial t_j}\delta t_j+\\&\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial u_{ij}}\delta u_{ij}+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial(\Delta_x u_{ij})}\Delta_x\delta u_{ij}+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial(\Delta_t u_{ij})}\Delta_t\delta u_{ij}=0\end{aligned} \tag{7}$$

则变换式(5)为给定系统的 Noether 对称性变换.

定理 1 如果无限小变换(5)是 Noether 对称性变换,则系统(2)~(4)有守恒量

$$\begin{aligned}I_{ij}=&\frac{\partial L_D^{i-1j}}{\partial(\Delta_x u_{i-1j})}\delta u_{ij}+\left(L_D^{i-1j}-\frac{\partial L_D^{i-1j}}{\partial(\Delta_x u_{i-1j})}\Delta_x u_{i-1j}\right)\delta x_i+\\&\frac{\partial L_D^{ij-1}}{\partial(\Delta_t u_{ij-1})}\delta u_{ij}+\left(L_D^{ij-1}-\frac{\partial L_D^{ij-1}}{\partial(\Delta_t u_{ij-1})}\Delta_t u_{ij-1}\right)\delta t_j=\mathrm{const}.\end{aligned} \tag{8}$$

证明 离散 Hamilton 函数

$$H_{xD}^{ij}=\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial(\Delta_x u_{ij})}\Delta_x u_{ij}-L_D^{ij},H_{tD}^{ij}=\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial(\Delta_t u_{ij})}\Delta_t u_{ij}-L_D^{ij}.$$

等式(7)可表示为

$$\begin{aligned}&-\Delta_x\delta x_i\cdot H_{xD}^{ij}-\Delta_t\delta t_j\cdot H_{tD}^{ij}+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial t_j}\delta t_j+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial u_{ij}}\delta u_{ij}+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial(\Delta_x u_{ij})}\Delta_x\delta u_{ij}+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial(\Delta_t u_{ij})}\Delta_t\delta u_{ij}=\\&\Delta_x\delta x_i\cdot L_D^{ij}+\Delta_t\delta t_j\cdot L_D^{ij}+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial t_j}\delta t_j+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial u_{ij}}\delta u_{ij}+\\&\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial(\Delta_x u_{ij})}(\Delta_x\delta u_{ij}-(\Delta_x\delta x_i)\cdot\Delta_x u_{ij})+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial(\Delta_t u_{ij})}(\Delta_t\delta u_{ij}-(\Delta_t\delta t_j)\cdot\Delta_t u_{ij})=\end{aligned}$$

$$\left[\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial x_i}+\Delta_x\left(\frac{\partial L_D^{i-1j}}{\partial(\Delta_x u_{i-1j})}\Delta_x u_{i-1j}-L_D^{i-1j}\right)\right]\delta x_i+\left[\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial t_j}+\Delta_t\left(\frac{\partial L_D^{ij-1}}{\partial(\Delta_t u_{ij-1})}\Delta_t u_{ij-1}-L_D^{ij-1}\right)\right]\delta t_j+$$
$$\left[\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial u_{ij}}-\Delta_x\left(\frac{\partial L_D^{i-1j}}{\partial(\Delta_x u_{i-1j})}\right)-\Delta_t\left(\frac{\partial L_D^{ij-1}}{\partial(\Delta_t u_{i,j-1})}\right)\right]\delta u_{ij}+$$
$$\Delta_x\left(\frac{\partial L_D^{i-1j}}{\partial(\Delta_x u_{i-1j})}\delta u_{ij}+\left(L_D^{i-1j}-\frac{\partial L_D^{i-1j}}{\partial(\Delta_x u_{i-1j})}\Delta_x u_{i-1j}\right)\delta x_i\right)+$$
$$\Delta_t\left(\frac{\partial L_D^{ij-1}}{\partial(\Delta_t u_{ij-1})}\delta u_{ij}+\left(L_D^{ij-1}-\frac{\partial L_D^{ij-1}}{\partial(\Delta_t u_{ij-1})}\Delta_t u_{ij-1}\right)\delta t_j\right)=0. \tag{9}$$

将式(2) ～ (4) 代入式 (9)，可得

$$\Delta_x\left(\frac{\partial L_D^{i-1j}}{\partial(\Delta_x u_{i-1j})}\delta u_{ij}+\left(L_D^{i-1j}-\frac{\partial L_D^{i-1j}}{\partial(\Delta_x u_{i-1j})}\Delta_x u_{i-1j}\right)\delta x_i\right)+$$
$$\Delta_t\left(\frac{\partial L_D^{ij-1}}{\partial(\Delta_t u_{ij-1})}\delta u_{ij}+\left(L_D^{ij-1}-\frac{\partial L_D^{ij-1}}{\partial(\Delta_t u_{ij-1})}\Delta_t u_{ij-1}\right)\delta t_j\right)=0,$$

即有关系式 $\Delta I_{ij}=\Delta_x I_{ij}+\Delta_t I_{ij}=0$，得式(8) 是守恒量.

定义 2　如果存在规范函数 $G_{ij}=G_{ij}(x_i,t_j,u_{ij},\Delta_x u_{ij},\Delta_t u_{ij})$ 使得无限下变换 (5) 满足

$$\delta S_D=-(x_{i+1}-x_i)(t_{j+1}-t_j)\Delta(\varepsilon G_{ij}), \tag{10}$$

其中 $\Delta(\varepsilon G_{ij})=\Delta_x(\varepsilon G_{ij})+\Delta_t(\varepsilon G_{ij})$，则无限小变换式 Noether 准对称变换.

判据 2 在无限小变换(5) 下，如果满足等式

$$\Delta_x\delta x_i\cdot H_D^{ij}+\Delta_t\delta t_j\cdot H_D^{ij}+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial t_j}\delta t_j+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial u_{ij}}\delta u_{ij}+$$
$$\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial(\Delta_x u_{ij})}\Delta_t\delta u_{ij}+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial(\Delta_t u_{ij})}\Delta_x\delta u_{ij}=-\Delta(\varepsilon G_{ij}) \tag{11}$$

成立，则变换(5) 是准对称变换..

定理 2　如果无限小变换(5) 是系统准 Noether 对称变换的，则场论中 Lagrange 系统有如下守恒量

$$I_{ij}=\frac{\partial L_D^{i-1j}}{\partial(\Delta_x u_{i-1j})}\delta u_{ij}+\left(L_D^{i-1j}-\frac{\partial L_D^{i-1j}}{\partial(\Delta_x u_{i-1j})}\Delta_x u_{i-1j}\right)\delta x_i+$$
$$\frac{\partial L_D^{ij-1}}{\partial(\Delta_t u_{ij-1})}\delta u_{ij}+\left(L_D^{ij-1}-\frac{\partial L_D^{ij-1}}{\partial(\Delta_t u_{ij-1})}\Delta_t u_{ij-1}\right)\delta t_j+\varepsilon G_{ij}=\text{const}. \tag{12}$$

证明　根据定义 2，等式(11) 可写为

$$-\Delta_x\delta x_i\cdot H_{xD}^{ij}-\Delta_t\delta t_j\cdot H_{tD}^{ij}+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial t_j}\delta t_j+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial u_{ij}}\delta u_{ij}+$$
$$\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial(\Delta_x u_{ij})}\Delta_x\delta u_{ij}+\frac{\partial L_D^{ij}}{\partial(\Delta_t u_{ij})}\Delta_t\delta u_{ij}+\Delta(\varepsilon G_{ij})=0. \tag{13}$$

类似于定理 1 的证明，可得 $\Delta I_{ij}=0$. 利用 Leibnitz 法则和等式(2) ～ (4) 可得 I_{ij} 守恒.

3　例　子

非线性 Schrödinger 方程表示为[11]

$$\mathrm{i}\psi_t+\psi_{xx}+2|\psi|^2\psi=0. \tag{14}$$

设 $\psi=p+\mathrm{i}q$，式 (14) 的离散 Lagrange 形式为

$$L_D^{ij}=\frac{1}{2}[(\Delta_x p_{ij})^2+(\Delta_x q_{ij})^2+p_{ij}\Delta_t q_{ij}-q_{ij}\Delta_t p_{ij}-(p_{ij}^2+q_{ij}^2)^2]. \tag{15}$$

由积分子(2) ～ (4)，离散 Euler-Lagrange 方程为

$$\frac{1}{2}(\Delta_t p_{ij}+\Delta_t p_{ij-1})+\Delta_x(\Delta_x q_{i-1j})+2(p_{ij}^2+q_{ij}^2)q_{ij}=0, \tag{16}$$

$$\frac{1}{2}(\Delta_t q_{ij}+\Delta_t q_{ij-1})-\Delta_x(\Delta_x p_{i-1j})-2(p_{ij}^2+q_{ij}^2)p_{ij}=0. \tag{17}$$

离散能量方程为

$$\sum_{i=0}^{M-1}\Delta_t[(p_{ij-1}^2+q_{ij-1}^2)^2-(\Delta_x p_{ij-1})^2-(\Delta_x q_{ij-1})^2]=0. \tag{18}$$

离散动量方程为

$$\sum_{j=0}^{N-1}\Delta_x[(p_{i-1j}^2+q_{i-1j}^2)^2+(\Delta_x p_{i-1j})^2+(\Delta_x q_{i-1j})^2-p_{i-1j}\Delta_t q_{i-1j}+q_{i-1j}\Delta_x p_{i-1j}]=0. \tag{19}$$

通过计算可得方程(7)(7) 在无限小变换式

$$t_j^*=t_j+\varepsilon, x_i^*=x_i+\varepsilon,\ u_{ij}^*=u_{ij}. \tag{20}$$

保持不变性. 根据判据 1 可知,此无限小变换是 Noether 对称的. 由 Noether 定理可得,场论中的离散 Lagrange 系统的 Noether 对称性可直接导致守恒量

$$I_{ij}=L_D^{i-1j}-\frac{\partial L_D^{i-1j}}{\partial(\Delta_x u_{i-1j})}\Delta_x u_{i-1j}+L_D^{ij-1}-\frac{\partial L_D^{ij-1}}{\partial(\Delta_t u_{ij-1})}\Delta_t u_{ij-1}=\text{常数}. \tag{21}$$

守恒量(21) 是系统的能量守恒式.

满足等式(7)(7) 的无限变换生成元和规范函数为

$$t_i^*=t_i+\varepsilon, x_j^*=x_j-\varepsilon,\ u_{ij}^*=u_{ij}, G_{ij}=(p_{ij-1}^2+q_{ij-1}^2)^2-(\Delta_x p_{ij-1})^2-(\Delta_x q_{ij-1})^2. \tag{22}$$

根据定理 2,可得守恒量

$$I_{ij}=(p_{ij-1}^2+q_{ij-1}^2)^2-(\Delta_x p_{ij-1})^2-(\Delta_x q_{ij-1})^2=\text{常数}. \tag{23}$$

考虑到能量守恒方程(18),(23) 式是能量守恒式. 文献[16]将在位势的概念应用到非线性薛定谔方程的离散格点上,利用简单孤立子的变量逼近的方法,得到了非线性薛定谔方程的能量守恒,本文由定理 2 得到的守恒量(23)的物理意义和文献[16]能量守恒的结论是一致的. 所以,利用离散场论的积分理论能够更方便地得到系统的物理性质.

4 结 论

本文研究场论中离散 Lagrange 系统的 Noether 定理和变分积分子. 主要结论是积分子式(2)～(4),判定方程 (7)、(11) 和守恒量(8)、(12). 非线性 Schrödinger 方程的例子表明通过寻找合适的对称性可以得到系统的守恒量. 困难在于如何找到同时满足确定方程和 Noether 等式的离散的无限小变换生成元和规范函数. 本文为探讨场论的物理性质提供了一条更加简洁的途径.

参 考 文 献

[1] BIRKHOFF G D. The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations[J]. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences,1913,49(9):521-568.

[2] CADZOW J A. Discrete calculus of variations[J]. Int J Control,1970,11(3):393-407.

[3] NOETHER E. Invariante variationsprobleme[J]. Math Phys KI,1918,2:235-257.

[4] DJUKIC D D S, VUJANOVIC B D. Noether's theory in classical nonconservative mechanics[J]. Acta Mech,1975,23(1/2):17-27.

[5] SARLET W, CANTRIJIN F. Generalizations of Noether's theorem in classical mechanics[J]. Siam Rev,1981,23(4):467-494.

[6] MEI F X. Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems[M]. Beijing: Science Press,1999.

[7] LI Z P. Symmetries in constrained canonical systems[M]. Beijing: Science Press,2002.

[8] LI Z P. Generalized Noether theorems in canonical formalism for field theories and their applications[J]. Int J Theor Phys,1993,32(1):201-215.

[9] ARENS R. The conserved currents for the Maxwellian field[J]. Comm Math Phys,1983,90(4):527-544.

[10] GUO H Y, LI Y Q, WU K. Difference discrete variational principles, Euler-Lagrange cohomology and symplectic, multisymplectic structures I: Difference discrete variational principle[J]. Comm Theor Phys,2002,37(1):1-10.

[11] CHENn J B. Total variation in discrete multisymplectic field theory and multisymplectic-energy-momentum integrators[J]. Lett Math Phys,2002,61(1):63-73.

[12] 刘世兴,刘 畅,郭永新. Birkhoffian 意义下 Hénon-Heiles 方程的离散变分计算[J]. 物理学报,2011,60(6):064501.

[13] DORODNITSYN V, Applications of Lie groups to difference equations[M]. Boca Raton: CRC Press,2011.

(下转第 65 页)

[14] 李宗谦，佘京兆，高葆新. 微波工程基础[M]. 北京：清华大学出版社，2004.

Design and Simulation of a 3 VHF＋1UHF Band LC Combiner

WANG Youbao, WU Shijie, WANG Xiang

(College of Electronic&Information Engineering, Nanjing University of Information Science&Technology, Nanjing 210044, China)

Abstract: Based on the design of bandpass filter and the same frequency combiner, a miniaturized LC combiner with the common resonator is designed, which is made up of three same VHF bands and one UHF band circuits. The combiner's circuit model is simulated and optimized by the ADS software of the Agilent corporation. The result shows that the combiner's each port has the good matching, low insertion loss, and high isolation. Moreover, the combiner meets the requirement of engineering design and has the small dimension, simple structure and high practical value.

Keywords: filter; combiner; matching

(上接第 56 页)

[14] XIA L L, CHEN L Q, FU J L, et al. Symmetries and variational caculation of discrete Hamiltonian systems[J]. Chinese Physics B, 2014, 23(7): 070201.

[15] FERRARO S, JIMÉNEZ F, DIEGO D M. New developments on the geometric non-holonomic integrator[J]. Nonlinearity, 2015, 28(4): 871-900.

[16] SCHARF R, BISHOP A. Properties of the nonlinear Schrödinger equation on a lattice[J]. Phys Rev A, 1991, 43(12): 6535-6544.

Discrete Integration Theory in Field Theory

LIU Changxin, XIA Lili

(College of Physics and Electronic Engineering, Henan Institute of Education, Zhengzhou 450046, China)

Abstract: The discrete analogue of Noether-type identities in field theory is investigated by means of difference discrete variational principle with the difference being regarded as an entire geometric object. The discrete analogue of Noether theorems is obtained. The conditions of existing the discrete analogue of Noether conservation law in field theory are proposed. The discretization for the nonlinear Schrödinger equation is presented to illustrate the results.

Keywords: discrete Noether theorem; variational integrators; field theory