

一类受分数 Brown 运动影响的资源竞争种群系统的渐近行为

袁怀民^a, 张启敏^b

(宁夏大学 a.信息工程学院;b.数学统计学院,银川 750021)

摘要:对一类 n 个种群, k 个资源的随机资源竞争种群模型进行了研究(恒化器模型),其中种群的死亡率受外界环境噪声分数 Brown 运动的影响.通过构造 Lyapunov 函数,得到该模型中种群在均方意义下的持续性和灭绝性准则.通过数值算例对所得的结论进行了验证.

关键词:资源竞争;生物种群系统;分数 Brown 运动;持久性;灭绝性

中图分类号: O175.1

文献标志码: A

目前,关于生物资源的竞争系统已被广泛研究^[1-2],例如 n 个种群 k 个资源的浮游植物竞争模型,其动力学行为由资源利用有效性决定,而资源利用有效性又受资源的供给量和种群数量的影响.文献[2]给出的下列 n 个种群, k 个资源的模型能够较好地表示资源和生物种群之间的相互作用

$$\begin{cases} \frac{dN_i(t)}{dt} = N_i(t)(\mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) - m_i), & i = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{dR_j(t)}{dt} = D(S_j - R_j(t)) - \sum_{i=1}^n C_{ji}\mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k)N_i(t), & j = 1, 2, \dots, k, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $N_i(t)$ 表示种群 i 的密度, $R_j(t)$ 是资源 j 的数量, m_i 是种群 i 的死亡率, D 是系统的周转率, S_j 是资源 j 的供给浓度, c_{ji} 是种群 i 消耗资源 j 的系数, $\mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k)$ 代表种群 i 的生长率,是关于资源利用率的函数, $\mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k)$ 可以表示为如下形式^[1-2]

$$\mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) = \min\left(\frac{r_i R_1(t)}{K_{1i} + R_1(t)}, \dots, \frac{r_i R_k(t)}{K_{ki} + R_k(t)}\right), \quad (2)$$

其中 r_i 是种群 i 的最大增长率, K_{ji} 是种群 i 对资源 j 的半饱和常数.关于模型(1)的应用在文献[3-5]中已给出,同时 Monod 模型作为一种典型的资源竞争模型也被广泛的研究,例如文献[4]讨论了其稳态增长率,文献[6]应用 Lotka-Volterra 模型研究两种有限资源的两种群竞争模型,文献[1,7]均描述了两微生物种群的竞争模型.在现有的文献中,大多数研究的是确定系统,都未考虑外界环境噪声的影响,事实上,温度、湿度、人为的破坏这些系统之外的因素对种群资源都会产生影响,并且能够改变系统动力学行为,使得一个稳定的系统出现震荡现象.而把随机噪声引入到种群系统中也存在大量的研究成果^[8-10],但随机噪声均为 Brown 运动,并且没有考虑资源的影响.

本文考虑到环境中随机波动的影响,在模型(1)中引入随机因素.假设种群的死亡率 m_i 受分数 Brown 运动,也就是受噪声影响的死亡率为 $m_i \rightarrow m_i + \alpha_i \dot{B}_i^H(t)$,其中 B_i^H 是 Hurst 参数 $H \in (0, 1)$ 的分数 Brown 运动. B_i^H 和 B_j^H 是相互独立的($i \neq j$).参数 α_i^2 是非负的,表示随机噪声的强度.用 $m_i + \alpha_i \dot{B}_i^H(t)$ 替换 m_i 后得到下面的随机扰动模型

收稿日期:2017-09-13;修回日期:2018-04-27.

基金项目:宁夏自然科学基金(NZ16041)

作者简介:袁怀民(1965-),男,宁夏银川人,宁夏大学教授,主要从事随机微分方程动力学研究,E-mail:Yuan_hm@nxu.edu.cn.

通信作者:张启敏(1964-),女,宁夏银川人,宁夏大学教授,博士,博士生导师,研究方向为控制理论及其应用,E-mail:zhangqimin64@sina.com.

$$\begin{cases} dN_i(t) = N_i(t)(\mu(R_1, R_2, \dots, R_k) - m_i)dt - \alpha_i N_i(t)dB_i^H(t), & i = 1, 2, \dots, n, \\ dR_j(t) = D(S_j - R_j(t))dt - \sum_{i=1}^n C_{ji}\mu(R_1, R_2, \dots, R_k)N_i(t)dt, & j = 1, 2, \dots, k. \end{cases} \quad (3)$$

对于新的随机资源竞争种群模型(3),本文通过构造 Lyapunov 函数,讨论系统的持久性和灭绝性的判断准则,给出持久性和灭绝性充分条件,并利用数值算例验证结论的有效性.

1 持久性和灭绝性

为了研究随机资源竞争模型(3)的动力学行为,需要验证该模型有唯一的全局正解.令 (Ω, F, P) 为完备的概率空间,其中滤波 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 满足通常的条件.

定理 1 对于任意初值 $(N_i(0), R_j(0)) \in \mathbf{R}_+^{n+k}$, 系统(3)式的解依概率 1 保持在 \mathbf{R}_+^{n+k} 中,即 $N_i(t) \in \mathbf{R}_+^n$, 其中 $i \in (1, 2, \dots, n), R_j(t) \in \mathbf{R}_+^k, j \in (1, 2, \dots, k)$.

证明 由于方程(3)式的系数不满足线性增长条件,因此存在唯一的局部解 $t \in [0, \tau_e)$, 令 τ_e 是解的爆破时间.假设当 $m_0 > 0$ 足够大时,使得 $N_i(0)$ 和 $R_j(0)$ 均落在区间 $[1/m_0, m_0]$ 中,其中 $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, k$, 对于任意整数 $m \geq m_0$, 定义停时

$$\tau_m = \inf\{t \in [0, \tau_e) : \min_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k} \{N_i(t), R_j(t)\} \leq 1/m \text{ 或者 } \max_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k} \{N_i(t), R_j(t)\} \geq m\}. \quad (4)$$

令 $\inf \emptyset = \infty$ (\emptyset 表示空集).显然, τ_m 递增.令 $\tau_\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m$, 其中 $0 \leq \tau_\infty \leq \tau_e$ 几乎处处成立(几乎处处成立表示几乎必然).如果证明 $\tau_\infty = \infty$ 几乎处处成立,那么 $\tau_e = \infty$.并且对于所有 $t \geq 0$ 解保持在 \mathbf{R}_+^{n+k} 上几乎处处成立.如果上面结论不成立,则存在一组常数 $T > 0, 0 < \epsilon < 1$ 使得 $P\{\tau_\infty \leq T\} > \epsilon$.因此,存在整数 $m_1 \geq m_0$ 使得

$$P\{\tau_m \leq T\} \geq \epsilon, m \geq m_1. \quad (5)$$

利用比较原理^[11], 可得对于任意 $t \leq \tau_e$

$$N_i(t) \vee R_j(t) \leq C_1, \quad (6)$$

其中 C_1 是正常数.

对方程(3)式构造 Lyapunov 函数,

$$V(N_i(t), R_j(t)) = \sum_{i=1}^n [N_i(t) - b_i - b_i \ln(\frac{N_i(t)}{b_i})] + \sum_{j=1}^k [R_j(t) - a_j - a_j \ln(\frac{R_j(t)}{a_j})],$$

其中 $a_j (1 \leq j \leq k), b_i (1 \leq i \leq n)$ 是正常数.

利用 Itô 公式, 可得

$$\begin{aligned} dV \leq & \sum_{i=1}^n b_i m_i dt + \sum_{i=1}^n N_i(t) \mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) dt - \sum_{i=1}^n N_i(t) m_i dt - \sum_{i=1}^n b_i \mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) dt + \\ & \sum_{j=1}^k D S_j dt - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k C_{ji} \mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) N_i(t) dt + \sum_{j=1}^k D a_j dt + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{R_j(t)} C_{ji} \mu_i(R_1, \\ & R_2, \dots, R_k) N_i(t) dt - \sum_{i=1}^n H t^{2H-1} \alpha_i^2 dt - \sum_{i=1}^n (1 - \frac{b_i}{N_i(t)}) \alpha_i N_i(t) dB_i^H(t). \end{aligned} \quad (7)$$

令

$$\begin{aligned} LV := & \sum_{i=1}^n b_i m_i + \sum_{i=1}^n N_i(t) \mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) - \sum_{i=1}^n N_i(t) m_i - \sum_{i=1}^n b_i \mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) + \\ & \sum_{j=1}^k D S_j - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k C_{ji} \mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) N_i(t) + \sum_{j=1}^k D a_j + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{R_j(t)} C_{ji} \mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) N_i(t) - \sum_{i=1}^n H t^{2H-1} \alpha_i^2. \end{aligned}$$

选取 a_i, b_j , 使得对于任意 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$, 有

$$\sum_{i=1}^n N_i(t) \mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) - \sum_{i=1}^n b_i \mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) \leq 0,$$

$$-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k C_{ji} \mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) N_i(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{a_j}{R_j(t)} C_{ji} r_i \mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) N_i(t) \leq 0.$$

当 $t \leq \tau_e$ 时, 由(6)式知, 存在正常数 C_2 , 使得

$$LV \leq C_2. \quad (8)$$

对于 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$, 由(7)、(8)式得到

$$\int_0^{\tau_m \wedge T} dV(N_i(t), R_j(t)) \leq \int_0^{\tau_m \wedge T} C_2 ds - \sum_{i=1}^n \int_0^{\tau_m \wedge T} (1 - \frac{b_i}{N_i(s)}) \alpha_i N_i(s) dB_i^H(s). \quad (9)$$

根据标准 fBm 的性质, 对方程(9)式两边进行估计, 对于 $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$ 有

$$E[V(N_i(\tau_m \wedge T), R_j(\tau_m \wedge T))] \leq V(N_i(0), R_j(0)) + C_2 T. \quad (10)$$

对于任意 $m \geq m_1$, 令 $\Omega_m = \{\tau_m \leq T\}$. 根据(3)式, 可得 $P(\Omega_m) \geq \varepsilon$. 又对于任意 $\omega \in \Omega_m$, 至少存在一个 $N_i(\tau_m, \omega), R_i(\tau_m, \omega)$, 与 m 或 $1/m$ 相等, $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$. 因此

$$\begin{aligned} & V(N_i(\tau_m \wedge T), R_j(\tau_m \wedge T), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k) \geq \\ & \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ m - a_j - a_j \ln \frac{m}{a_j}, \frac{1}{m} - a_j - a_j \ln \frac{1}{ma_j} \right\} \wedge \\ & \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ m - b_i - b_i \ln \frac{m}{b_i}, \frac{1}{m} - b_i - b_i \ln \frac{1}{mb_i} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

再根据(5)式和(11)式, 可得

$$\begin{aligned} & V(N_i(0), R_j(0), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k) + CT \geq \\ & \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ m - a_j - a_j \ln \frac{m}{a_j}, \frac{1}{m} - a_j - a_j \ln \frac{1}{ma_j} \right\} \wedge \\ & \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ m - b_i - b_i \ln \frac{m}{b_i}, \frac{1}{m} - b_i - b_i \ln \frac{1}{mb_i} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $I_{\Omega_m}(\omega)$ 是 Ω_m 的指数函数. 令 $m \rightarrow \infty$, 则 $V(N_i(0), R_j(0), 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k) + C_2 T = \infty$, 推出矛盾. 因此 $\tau_\infty = \infty$ 几乎处处成立.

下面研究随机模型(3)的渐近行为条件. 采用与文献[6]类似的证明方法, 当 Hurst 参数 $H \leq 1/2$, 可得如下的不等式

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t R_j(s) ds}{t} \leq M, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (13)$$

其中 M 是正常数.

定理 2 如果 $S_j > \frac{\int_0^t R_j(s) ds}{t}, 0 < H \leq 1/2$, 那么对于任意的初始值 $(N_i(0), R_j(0)) \in \mathbf{R}_+^{n+k}$, 模型(3)式的解满足

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t EN_i(s) ds \geq -\frac{D}{\bar{C}m} (S_j - M) > 0 \quad 1 \leq i \leq n,$$

其中 $m = \max_{1 \leq i \leq n} m_i, \bar{C} = \max_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, k} C_{ji}$.

即种群系统依概率 1 持久.

证明 定义函数 $V(N_i(t)) = \sum_{i=1}^n N_i(t)$, 由 Itô 公式, 可得

$$dV = \sum_{i=1}^n (\mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) N_i(t) - m_i N_i(t)) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i(t) dB_i^H(t). \quad (14)$$

对方程(14)式的两边从 0 到 t 积分, 再除以 t , 可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i(t)}{t} - \sum_{i=1}^n \frac{N_i(0)}{t} = \sum_{i=1}^n \frac{\int_0^t \mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) N_i(s) ds}{t} -$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{\int_0^t N_i(t)(s) ds}{t} - \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^t N_i(s) dB_i^H(s)}{t}. \tag{15}$$

对系统(3)的第 2 个方程从 0 到 t 积分,有

$$R_j(t) - R_j(0) = D(S_j t - \int_0^t R_j(s) ds) - \sum_{i=1}^n C_{ji} \int_0^t \mu(R_1, R_2, \dots, R_k) N_i(s) ds. \tag{16}$$

因此可得

$$\sum_{i=1}^n \int_0^t \mu(R_1, R_2, \dots, R_k) N_i(s) ds \geq -\frac{1}{C} R_j + \frac{D}{C} S_j t - \frac{D}{C} \int_0^t R_j(s) ds, \tag{17}$$

其中 $\bar{C} = \max_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, k} C_{ji}$. 由(15)式和(17)式

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \frac{\int_0^t N_i(s) ds}{t} &\geq -\frac{D}{\bar{C}} \frac{\int_0^t R_j(s) ds}{t} - \frac{1}{\bar{C}} \frac{R_j}{t} + \frac{D}{\bar{C}} S_j - \sum_{i=1}^n \frac{N_i(t)}{t} + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \frac{N_i(0)}{t} - \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^t N_i(s) dB_i^H(s)}{t}. \end{aligned} \tag{18}$$

应用文献[4]中的引理 5.1,可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\int_0^t EN_i(s) ds}{t} \geq -\frac{DM}{\bar{C}m} + \frac{DS_j}{\bar{C}m} > 0,$$

其中 $m = \max_{1 \leq i \leq n} m_i, \bar{C} = \max_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, k} C_{ji}, M$ 在方程(13)式中给出.

定理 3 如果 $r_i M < \max_{1 \leq j \leq k} K_{ji} m_i, 0 < H \leq 1/2, 1 \leq i \leq n$, 那么对于任意初值 $(N_i(0), R_j(0)) \in \mathbf{R}^{n+k}$, 随机模型(3)式的解满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln N_i(t)}{t} < 0, 1 \leq i \leq n.$$

即种群依概率 1 灭绝.

证明 定义函数 $V(N_i(t)) = \sum_{i=1}^n \ln N_i(t)$. 由 Itô 公式得

$$dV = \sum_{i=1}^n (\mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) - m_i) - \sum_{i=1}^n H t^{2H-1} \alpha_i^2. \tag{19}$$

对方程(19)式的两边从 0 到 t 积分,再除以 t ,可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\ln(N_i(t))}{t} - \sum_{i=1}^n \frac{\ln(N_i(0))}{t} &= \sum_{i=1}^n \frac{\int_0^t \mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) ds}{t} - \\ &\quad \sum_{i=1}^n m_i - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{2} t^{2H-1} - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \int_0^t dB_i^H(s)}{t}. \end{aligned} \tag{20}$$

因为 $\mu_i(R_1, R_2, \dots, R_k) \leq \frac{r_i R_i(t)}{K_{ji} + R_i(t)}$, 所以对于 $\forall i \in 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\ln(N_i(t))}{t} - \sum_{i=1}^n \frac{\ln(N_i(0))}{t} &\leq \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{t K_{ji}} \int_0^t R_i(s) ds - \\ &\quad \sum_{i=1}^n m_i - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i^2}{2} t^{2H-1} - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \int_0^t dB_i^H(s)}{t}. \end{aligned} \tag{21}$$

由假设条件可得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\ln(N_i(t))}{t} \leq \sum_{i=1}^n \frac{\ln(N_i(0))}{t} + \sum_{i=1}^n \frac{r_i M}{K_{ji}} - \sum_{i=1}^n m_i - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \int_0^t dB_i^H(s)}{t}. \tag{22}$$

令 $t \rightarrow \infty$, 当 $H < \frac{1}{2}$, 由大数定理^[12], 可推出

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i \int_0^t dB_i^H(s)}{t} = 0, \tag{23}$$

因此

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln N_i(t)}{t} \leq \sum_{i=1}^n \frac{r_i M}{K_{ji}} - \sum_{i=1}^n m_i < 0.$$

2 数值算例

2.1 算例 1

本算例是一个包含 6 种群 3 种资源的竞争系统. 令 $r_i = 1, m_i = D = 0.25, S_1 = 6, S_2 = 10, S_3 = 14, H = 1/4, \alpha_i = 0.3, i = 1, 2, 3, K$ 和 C 如下所示

$$K = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.90 & 0.30 & 1.04 & 0.34 & 0.77 \\ 0.30 & 1.00 & 0.90 & 0.71 & 1.02 & 0.76 \\ 0.90 & 0.30 & 1.00 & 0.46 & 0.34 & 1.07 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.07 & 0.04 & 0.10 & 0.03 & 0.02 \\ 0.08 & 0.08 & 0.10 & 0.10 & 0.05 & 0.17 \\ 0.14 & 0.10 & 0.10 & 0.16 & 0.06 & 0.14 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

k_{ij} 和 c_{ij} 分别是矩阵 K 和 C 的元素. 初始条件为, $t = 0$ 时, $R_j = S_j$, 并且对于所有的种群 $i, N_i = 0.1 + i/100$. 图 1 描述的是随时间的变化种群数量的改变, 得到了 6 种种群的持久性. 在生态系统中, 当 6 种种群共同存在时, 种群 4~6 的密度比种群 1~3 的密度大.

2.2 算例 2

此算例同样是一个包含 6 种群 3 种资源的竞争系统. 令 $r = (0.87, 0.88, 0.85, 0.90, 0.86, 0.88), r_i$ 是向量 r 中的元素, $m_i = 0.60, D = 0.25, S_i = 1, N(0) = (0, 5, 0.4, 0.6, 0.3, 0.2, 0.1), H = 1/4, \alpha_i = 0.4, i = 1, 2, 3,$

$$K = \begin{pmatrix} 1.52 & 1.49 & 1.46 & 1.52 & 1.59 & 1.44 \\ 1.47 & 1.55 & 1.42 & 1.53 & 1.58 & 1.56 \\ 1.48 & 1.45 & 1.61 & 1.51 & 1.50 & 1.54 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

初始条件包括, $t = 0$ 时, $R_j = S_j$, 图 2 描述的是随时间的变化种群数量的改变, 表明了 6 种种群的灭绝性动力行为.

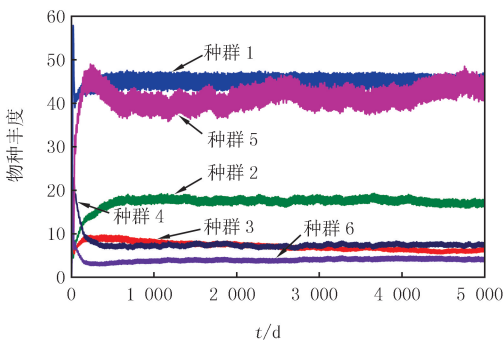


图 1 6 种群 3 资源种群系统的时间序列 (算例 1)

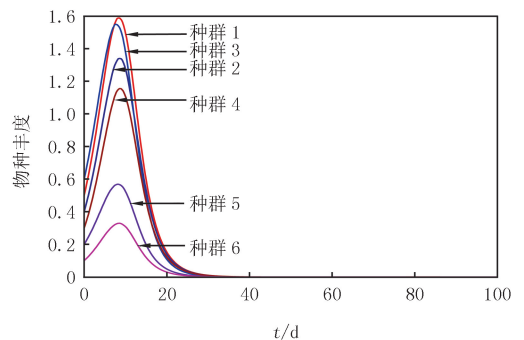


图 2 6 种群 3 资源种群系统的时间序列 (算例 2)

3 结 论

把死亡率受外界环境噪声影响也就是分数 Brown 运动引入到 n 个种群、 k 个资源的资源竞争种群系统中,从而得到了一个新的随机的资源竞争种群模型.首先讨论了正解的存在性,其次进一步研究该竞争模型的持久性和灭绝性判断准则.由于随机噪声的引入在分析持久性和灭绝性时,与确定的资源种群竞争系统相比增加了一定的难度,这也是本文的创新点.同时,当 Hurst 参数 $H > 1/2$ 的结果也有待以后继续讨论.

参 考 文 献

- [1] Zheng D, Bengtsson J, Aegren G. How do soil organisms affect total organic nitrogen storage and substrate nitrogen to carbon ratio in soils? A theoretical analysis[J]. *Oikos*, 1999, 86(3): 430-442.
- [2] Huisman J, Weissing F J. Biodiversity of plankton by species oscillations and chaos[J]. *Nature*, 1999, 402(6760): 407-410.
- [3] Khan A A, Zytner R G, Feng Z. Establishing Correlations and Scale-Up Factor for Estimating the Petroleum Biodegradation Rate in Soil [J]. *Bioremediation Journal*, 2015, 19(1): 32-46.
- [4] Monod J. La Technique De Culture Continue Theorie Et Applications[J]. *Selected Papers in Molecular Biology by Jacques Monod*, 1978(不详): 184-204.
- [5] Fang Y, Scheibe T D, Mahadevan R, et al. Direct coupling of a genome-scale microbial in silico model and a groundwater reactive transport model[J]. *Journal of Contaminant Hydrology*, 2011, 122(1): 96-103.
- [6] Li B, Smith H L. Global dynamics of microbial competition for two resources with internal storage[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2007, 55(4): 481.
- [7] Fowler A C, Winstanley H F, McGuinness M J, et al. Oscillations in soil bacterial redox reactions. [J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2014, 342(3): 33-38.
- [8] Wei M. Exponential stability of numerical solutions to stochastic age-dependent population equations with Poisson jumps[J]. *International Journal of Computational & Mathematical Sciences*, 2011, 6(1): 28-33.
- [9] Ma W, Zhang Q, Wang Z. Asymptotic stability of stochastic age-dependent population equations with Markovian switching[J]. *Elsevier Science Inc*, 2014, 227: 309-319.
- [10] 申芳芳, 辛志贤, 张启敏, 等. 与年龄相关的随机种群系统分裂倒向 Euler 法的几乎必然指数稳定性[J]. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2017, 45(2): 8-13.
- [11] Li D, Zhu Q. Comparison principle and stability of stochastic delayed neural networks with Markovian switching[J]. *Neurocomputing*, 2014, 123: 436-442.
- [12] Khasminskii R. *Stochastic modelling and applied probability*[M]. 2ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012.

Asymptotic behaviour of a class of resource competition biology species system by a fractional brownian motion

Yuan Huaimin^a, Zhang Qimin^b

(a. College of Information and Engineering, b. School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: In this paper, the stochastic resource competitive population model of n species and k resources is studied (i.e. chemostat model), in which the species mortality rates are influenced by the fractional Brownian motion of extrinsic noise environment. By constructing a Lyapunov functional, the persistence and extinction criteria are derived in the mean square sense. Some examples are given to illustrate the effectiveness of the theoretical result.

Keywords: resource competition; biology species system; fractional Brownian motion; persistence; extinction

[责任编辑 陈留院]