三维 Brinkman-Forchheimer 方程解的渐近稳定性

宋雪丽,谢晓甜

(西安科技大学 理学院,西安 710054)

摘　要:研究了三维有界区域上 Brinkman-Forchheimer 方程全局解的渐近稳定性.首先讨论了 Brinkman-Forchheimer 方程对应的广义稳态椭圆方程解的存在唯一性,接着对这两种方程解之间的收敛性进行了讨论,最后分别在$(L^2(\Omega))^3$ 和$(H_0^1(\Omega))^3$ 中证明了 Brinkman-Forchheimer 方程强解关于初值和系数的连续依赖性.

关键词: Brinkman-Forchheimer 方程;弱解;渐近稳定性

中图分类号:O175.2　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1000-2367(2024)01-0060-07

本文研究了如下三维 Brinkman-Forchheimer 方程全局解的渐近稳定性

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\nu\Delta u+ru+b\mid u\mid u+c\mid u\mid^{\beta-1}u+\nabla p=f(x,t),(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \nabla\cdot u=0,(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ u\mid_{t=0}=u_0,x\in\Omega,\end{cases}\tag{1}$$

其中 Ω 表示 $\mathbf{R}^3$ 中具有光滑边界的有界开区域,$u=(u_1,u_2,u_3)$ 表示流体的速度向量,p 表示流体的压力项,f 是外力项,$\nu>0$ 是 Brinkman 系数,$r>0$ 是 Darcy 系数,$b>0$,$c>0$ 是 Forchheimer 系数,$\beta>1$ 是一个常数.

Brinkman-Forchheimer 方程描述了流体在饱和型多孔介质中的流动现象,同时也被用来研究潮汐动力学,关于此方程解的存在性及相关性质,可参考文献[1-8].针对解的长期渐近稳定性方面,文献[1]证明了方程(1)中参数 $\beta=3$ 时强解在$(H_0^1(\Omega))^3$ 中全局吸引子的存在性.文献[2] 讨论了 $\beta\in(2,7/3]$ 时,Brinkman-Forchheimer 方程解在 $(H_0^1(\Omega))^3$ 中全局吸引子的存在性.陈小豹[3] 证明了 Brinkman-Forchheimer 方程当参数 $\beta\in[7/3,3)$ 时强解在$(H_0^1(\Omega))^3$ 中全局吸引子的存性.WANG 等[4] 通过验证 Δu 在$(L^2(\Omega))^3$ 是渐近紧的进而得到了 u 在$(H^2(\Omega))^3$ 中是渐近紧的,从而证明了当 $\beta=3$ 参数时,方程(1) 的解在$(H^2(\Omega))^3$ 中全局吸引子的存在性.文献[5] 证明了 $\beta=3$ 时方程(1) 的解在$(H^1(\Omega))^3$ 中一致吸引子的存在性.文献[6] 证明了在非自治情形,$\beta=3$ 时,方程(1) 的弱解在$(L^2(\Omega))^3$ 和$(H_0^1(\Omega))^3$ 中拉回吸引子的存在性.文献[7] 对 $\beta=3$ 时具有延迟的非自治 Brinkman-Forchheimer 方程解的一致吸引子的存在性进行了讨论.宋雪丽等[8] 讨论了当 $\beta=3$ 时,具有随机震荡外力项的三维 Brinkman-Forchheimer 方程解的一致吸引子在$(H_0^1(\Omega))^3$ 中的一致有界性及收敛性.乔宝明等[9] 证明了当 $7/2\le\beta\le5$ 及初值 $u_0\in(H_0^1(\Omega))^3$ 时,三维有界区域上 Brinkman-Forchheimer 方程强解的存在唯一性及强解的全局吸引子在$(H_0^1(\Omega))^3$ 和$(H^2(\Omega))^3$ 中的存在性.

收稿日期:2022-08-28;**修回日期:**2023-09-21.

基金项目:国家自然科学基金(12001420);陕西省教育厅专项基金(17JK0505).

作者简介(通信作者):宋雪丽(1979-),女,山西芮城人,西安科技大学副教授,博士,研究方向为偏微分方程及无穷维动力系统,E-mail:songxlmath@163.com.

引用本文:宋雪丽,谢晓甜.三维 Brinkman-Forchheimer 方程解的渐近稳定性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2024,52(1):60-66.(Song Xueli,Xie Xiaotian.Asymptotic stability of solutions to the 3D Brinkman-Forchheimer equation[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2024,52(1):60-66.DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2022.08.28.0001.)

宋雪丽等[10] 使用 Fourier 分解方法研究了当 $\beta > 10/3$ 时三维全空间上 Brinkman-Forchheimer 方程弱解的 L^2 衰减性，并讨论了在大初值扰动下弱解的渐近稳定性.MOHAN[11] 研究了两时间尺度随机对流 Brinkman-Forchheimer 方程解的大偏差行为.YU[12] 讨论了三维不可压缩对流 Brinkman-Forchheimer 方程轴对称解的存在及唯一性.

目前,关于流体方程原始方程组解的稳定性研究得到广泛关注.如,文献[13]讨论了三维具有非线性阻尼项的 Navier-Stokes 方程的解与对应的广义稳态椭圆方程的解之间当 $t\to\infty$ 时的收敛性.文献[14]讨论了柱形区域上带震荡随机力的大尺度海洋三维原始方程组的连续依赖性,证明了解对黏性系数的连续依赖性.文献[15]利用微分不等式技巧和能量估计的方法证明了大尺度海洋大气动力学三维黏性原始方程的解连续依赖于边界参数.

由于三维 Brinkman-Forchheimer 方程与三维具有非线性阻尼项的 Navier-Stokes 方程(更多 Navier-Stokes 方程理论可参看文献[16-17])物理背景相似,受文献[13]的启发,本文将研究 $t\to\infty$ 时,方程(1)的解与下述广义稳态椭圆方程的解之间的关系.

$$\begin{cases} -\nu\Delta u^* + ru^* + b\,|u^*|\,u^* + c\,|u^*|^{\beta-1}u^* + \nabla p^* = f_\infty, \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \nabla\cdot u^* = 0, \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u^* = 0, \text{在 } \partial\Omega \text{ 中}, \end{cases} \tag{2}$$

其中 f_∞ 与 t 无关,可以看作时间 t 趋于无穷时 $f(x,t)$ 的极限.同时,受文献[14-15]的启发,也将讨论方程(1)的解关于初值及 Brinkman 系数 ν 的连续依赖性.

1　预备知识

在本节中,主要对接下来要用到的符号及函数空间做一简单说明.

用 $L^p(\Omega)(1\le p\le+\infty)$ 和 $H^m(\Omega)(m\in\mathbf{Z})$ 表示常见的 Banach 空间.记 $\boldsymbol{L}^p=\boldsymbol{L}^p(\Omega)=(L^p(\Omega))^3$,用 $|\cdot|_p$ 来表示 $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ 中的范数.接下来令 $E:=\{u\in(C_0^\infty(\Omega))^3, \operatorname{div} u=0\}$,$H$ 为 E 在 $\boldsymbol{L}^2$ 拓扑下的闭包.用 $|\cdot|_2$ 表示 H 中的范数,$(\cdot,\cdot)$ 表示 H 中的内积,即对于任意的 $u,v\in H$ 有 $|u|_2^2=(u,u)$,$(u,v)=\sum_{j=1}^3\int_\Omega u_j(x)v_j(x)\mathrm{d}x$.此外,$V$ 为 E 在 $(H_0^1(\Omega))^3$ 拓扑下的闭包,$\|u\|_V^2=((u,u))$,$a(u,v)=:((u,v))=\sum_{j=1}^3\int_\Omega \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\mathrm{d}x$,分别表示 V 中的范数和内积.

H 和 V 是可分的 Hibert 空间,$H=H'$,H' 是 H 的对偶空间,V' 是 V 的对偶空间.$\|\cdot\|$ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 分别表示 V' 中的范数和对偶积.字母 C 是正常数,在不同行,甚至在同一行可能表示不同的值.

设 P 是从 $\boldsymbol{L}^2$ 到 H 的 Helmholtz-Leray 正交投影算子,定义 $Au=-P\Delta u$ 是 Stokes 算子,其定义域为 $D(A)=(H^2(\Omega))^3\cap V$,那么算子 $A:V\to V'$ 有性质 $(Au,v)=((u,v))$,对于 $\forall u,v\in V$,它是从 V 到 V' 的同构算子.A 的特征值在狄利克雷边界条件下被定义为 $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ 且满足 $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots$.用 $\{\omega_j\}_{j=1}^\infty$ 表示相应的特征函数,其构成了 H 的一组标准正交基.

2　方程(1)与方程(2)的解之间的收敛性

2.1　方程(2)平稳解的存在唯一性

定义 1　设 $f_\infty\in V'$,若 $u^*\in V\cap\boldsymbol{L}^{\beta+1}(\Omega)$ 满足 $\nu a(u^*,v)+r(u^*,v)+b(|u^*|u^*,v)+c(|u^*|^{\beta-1}u^*,v)=\langle f_\infty,v\rangle$,对于所有的 $v\in V\cap\boldsymbol{L}^{\beta+1}(\Omega)$,则称函数对 $(u^*(x),p^*(x))$ 是方程(2)的一个弱解.此外,若弱解 u^* 满足 $u^*\in D(A)$,称 (u^*,p^*) 为方程(2)的一个强解.

定理 1　考虑广义的稳态椭圆方程(2),有

(i)对于所有的 $f_\infty\in V'$,$\beta\ge1$,方程(2)存在一个弱解 (u^*,p^*);

(ii)如果 $f_\infty\in\boldsymbol{L}^2(\Omega)$,$\beta\ge1$,那么 (u^*,p^*) 是一个强解;

(iii)方程(2)有唯一弱解.

证明 (i)设 $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}\subset V$ 是 H 的标准正交基,$V_m=\mathrm{span}\{\omega_1,\cdots,\omega_m\}$ 是 V 的子空间,构造一个逼近解 $\tilde{u}_m=\sum_{j=1}^{m}\xi_j\omega_j\in V_m$ 满足下面的方程

$$\nu a(\tilde{u}_m,\omega_j)+r(\tilde{u}_m,\omega_j)+b(|\tilde{u}_m|\tilde{u}_m,\omega_j)+c(|\tilde{u}_m|^{\beta-1}\tilde{u}_m,\omega_j)=\langle f_\infty,\omega_j\rangle,\forall 1\leq j\leq m. \tag{3}$$

下面应用 Brouwer 固定点定理(文献[18]中定理 4.3)来证明式(3)存在一个解.

设 $\xi=\{\xi\}$,对于 $1\leq i\leq m$,记

$$\eta_i=\nu a(\tilde{u}_m,\omega_i)+r(\tilde{u}_m,\omega_i)+b(|\tilde{u}_m|\tilde{u}_m,\omega_i)+c(|\tilde{u}_m|^{\beta-1}\tilde{u}_m,\omega_i)-\langle f_\infty,\omega_i\rangle. \tag{4}$$

记 $P(\xi)=:\eta=\{\eta_i\}$,可以得到

$$(P(\xi),\xi)=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\eta_i\geq\nu\|\tilde{u}_m\|_V^2+r|\tilde{u}_m|_2^2+b|\tilde{u}_m|_3^3+c|\tilde{u}_m|_{\beta+1}^{\beta+1}-\|f_\infty\|_*\|\tilde{u}_m\|_V. \tag{5}$$

容易验证对充分大的 ρ,

$$(P(\xi),\xi)\geq 0,\text{在 } |\xi|=\rho \text{ 上}, \tag{6}$$

通过 Brouwer 固定点定理,可以得到在 $|\xi|\leq\rho$ 内存在一个点 $\bar{\xi}$,使得 $P(\bar{\xi})=0$,即 $\tilde{u}_m=\sum_{j=1}^{m}\bar{\xi}_j\omega_j\in V_m$ 是式(3)的一个解.将 $P(\bar{\xi})=0$ 代入式(5),得

$$\nu\|\tilde{u}_m\|_V^2+r|\tilde{u}_m|_2^2+b|\tilde{u}_m|_3^3+c|\tilde{u}_m|_{\beta+1}^{\beta+1}\leq\|f_\infty\|_*\cdot\|\tilde{u}_m\|_V. \tag{7}$$

这意味着

$$\|\tilde{u}_m\|_V^2+|\tilde{u}_m|_2^2+|\tilde{u}_m|_3^3+|\tilde{u}_m|_{\beta+1}^{\beta+1}\leq C, \tag{8}$$

这里 C 是一个常数与 m 无关.

由于 V 在 H 中是紧嵌入,则存在一个子序列 $\tilde{u}_m$(仍用原序列表示),满足

$$\tilde{u}_m\to u^*\text{ 在 } H \text{ 中强收敛}, \tag{9}$$

$$\tilde{u}_m\rightharpoonup u^*\text{ 在 } \boldsymbol{L}^{\beta+1} \text{ 中弱收敛}, \tag{10}$$

$$\tilde{u}_m\rightharpoonup u^*\text{ 在 } \boldsymbol{L}^3(\Omega) \text{ 中弱收敛}, \tag{11}$$

$$\tilde{u}_m\rightharpoonup u^*\text{ 在 } V \text{ 中弱收敛}, \tag{12}$$

$$|\tilde{u}_m|\tilde{u}_m\rightharpoonup\eta\text{ 在 } \boldsymbol{L}^{\frac{3}{2}} \text{ 中弱收敛}, \tag{13}$$

$$|\tilde{u}_m|^{\beta-1}\tilde{u}_m\rightharpoonup\zeta\text{ 在 } \boldsymbol{L}^{\frac{\beta+1}{\beta}} \text{ 中弱收敛}, \tag{14}$$

当 $m\to+\infty$ 时,有 $u^*\in V\cap\boldsymbol{L}^{\beta+1}\cap\boldsymbol{L}^3$.

应用文献[18]中的引理 1.3 并且结合式(9)、(13)和(14),能得到 $\zeta=|u^*|^{\beta-1}u^*$,$\eta=|u^*|u^*$.因此,对式(3)两端取极限,得到 u^* 是方程(2)的一个弱解.

(ii)设 $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}\in V$ 是 H 的一组标准正交基,满足 $A\omega_j=\lambda_j\omega_j$,在 Ω 中;$\omega_j=0$ 在 $\partial\Omega$ 中.把式(3)中的 ω_j 替换为$\frac{A\omega_j}{\lambda_j}$,得到:

$$\nu(A\tilde{u}_m,A\omega_j)+r(\tilde{u}_m,A\omega_j)+b(|\tilde{u}_m|\tilde{u}_m,A\omega_j)+c(|\tilde{u}_m|^{\beta-1}\tilde{u}_m,A\omega_j)=(f_\infty,A\omega_j). \tag{15}$$

给式(15)乘以 $\tilde{\xi}_j$,并对 j 求和,可以得到:

$$\nu(A\tilde{u}_m,A\tilde{u}_m)+r(\tilde{u}_m,A\tilde{u}_m)+b(|\tilde{u}_m|\tilde{u}_m,A\tilde{u}_m)+c(|\tilde{u}_m|^{\beta-1}\tilde{u}_m,A\tilde{u}_m)=(f_\infty,A\tilde{u}_m). \tag{16}$$

通过简单计算,有

$$2\nu|A\tilde{u}_m|_2^2+2r|\nabla\tilde{u}_m|_2^2+2c\beta\,||\tilde{u}_m|^{\frac{\beta-1}{2}}\nabla\tilde{u}_m|_2^2+4b\,||\tilde{u}_m|^{\frac{1}{2}}\nabla\tilde{u}_m|_2^2\leq\frac{1}{\nu}|f_\infty|_2^2+\nu|A\tilde{u}_m|_2^2. \tag{17}$$

故

$$\nu|A\tilde{u}_m|_2^2+2r|\nabla\tilde{u}_m|_2^2+2c\beta\,||\tilde{u}_m|^{\frac{\beta-1}{2}}\nabla\tilde{u}_m|_2^2+4b\,||\tilde{u}_m|^{\frac{1}{2}}\nabla\tilde{u}_m|_2^2\leq\frac{1}{\nu}|f_\infty|_2^2. \tag{18}$$

因此

$$|A\tilde{u}_m|_2^2+||\tilde{u}_m|^{\frac{\beta-1}{2}}\nabla\tilde{u}_m|_2^2\leq C. \tag{19}$$

故 $u^*\in D(A)$ 是方程(2)的强解.

(iii)设 u_1 和 u_2 是方程(2)的两个弱解,有

$$\nu a(u_1-u_2,v)+r(u_1-u_2,v)+b(|u_1|u_1-|u_2|u_2,v)+c(|u_1|^{\beta-1}u_1-|u_2|^{\beta-1}u_2,v)=0. \tag{20}$$

对 $\forall v\in V\cap \boldsymbol{L}^{\beta+1}(\Omega)$.取 $v=u_1-u_2$,有

$$\nu\|u_1-u_2\|_V^2+r|u_1-u_2|_2^2+b(|u_1|u_1-|u_2|u_2,v)+c(|u_1|^{\beta-1}u_1-|u_2|^{\beta-1}u_2,v)=0. \tag{21}$$

由于 $(|u_1|u_1-|u_2|u_2,v)\geq 0$,$(|u_1|^{\beta-1}u_1-|u_2|^{\beta-1}u_2,v)\geq 0$,因此 $\|u_1-u_2\|_V^2=0$,即 $u_1=u_2$ 在 V 中几乎处处成立.

2.2　方程(1)与方程(2)弱解之间的指数收敛性

定理 2　对于任意的 $T>0$,$\beta\geq 1$,假设初值 $u_0\in H$,$f\in L^2(0,+\infty;V')$,且存在 $f_\infty\in V'$,使得对于足够小的 $\mu>0$,有

$$\lim_{t\to\infty}\|f-f_\infty\|_*=0, \tag{22}$$

$$\int_0^\infty e^{\mu s}\|f-f_\infty\|_*^2\,ds<+\infty. \tag{23}$$

假设 $u(x,t)$ 是方程(1)的弱解在下文用 $u(t)$ 表示,初值为 u_0,外力项为 f,u_∞ 是方程(2)对于外力项为 f_∞ 的唯一弱解.则存在两个足够小的正常数 C 和 λ(C 仅依赖于 ν,λ 仅依赖于 λ_1,ν 和 μ)使得

$$|u(t)-u_\infty|_2^2\leq Ce^{-\lambda t}\Big(|u_0-u_\infty|_2^2+\int_0^\infty e^{\lambda s}\|f-f_\infty\|_*^2\,ds\Big),\text{对于所有的 } t>0. \tag{24}$$

证明　记 $\omega=u(t)-u_\infty$,易得:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\omega|_2^2+\nu\|\omega\|_V^2+r|\omega|_2^2+b(|u|u-|u_\infty|u_\infty,\omega)+\\ c(|u|^{\beta-1}u-|u_\infty|^{\beta-1}u_\infty,\omega)=\langle f-f_\infty,\omega\rangle.\end{aligned} \tag{25}$$

由式(25)可得:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\omega|_2^2\leq&-2\nu\|\omega\|_V^2-2b(|u|u-|u_\infty|u_\infty,\omega)-2c(|u|^{\beta-1}u-|u_\infty|^{\beta-1}u_\infty,\omega)+\\ &2\|f-f_\infty\|_*\cdot\|\omega\|_V\leq 2\nu\|\omega\|_V^2-2r\|\omega\|_2^2+\nu\|\omega\|_V^2+\frac{1}{\nu}\|f-f_\infty\|_*^2\leq\\ &-\nu\|\omega\|_V^2+\frac{1}{\nu}\|f-f_\infty\|_*^2.\end{aligned} \tag{26}$$

对于任意固定的 $\lambda>0$,

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}|\omega|_2^2)=\lambda e^{\lambda t}|\omega|_2^2+e^{\lambda t}\frac{d}{dt}|\omega|_2^2\leq\lambda e^{\lambda t}|\omega|_2^2+e^{\lambda t}\Big(\frac{1}{\nu}\|f-f_\infty\|_*^2-\nu\|\omega\|_V^2\Big). \tag{27}$$

应用 Poincaré 不等式,有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{\lambda t}|\omega|_2^2)\leq&\lambda e^{\lambda t}|\omega|_2^2+\frac{e^{\lambda t}}{\nu}\|f-f_\infty\|_*^2-\nu\lambda_1 e^{\lambda t}|\omega|_2^2=\\ &-e^{\lambda t}(\nu\lambda_1-\lambda)|\omega|_2^2+\frac{e^{\lambda t}}{\nu}\|f-f_\infty\|_*^2.\end{aligned} \tag{28}$$

对于任意的 $0<\lambda<\lambda_1\nu$ 对式(28)关于时间变量 t 进行积分,得到:

$$e^{\lambda t}|\omega(t)|_2^2\leq|\omega(0)|_2^2-(\nu\lambda_1-\lambda)\int_0^t e^{\lambda s}|\omega(s)|_2^2\,ds+\frac{1}{\nu}\int_0^t e^{\lambda s}\|f-f_\infty\|_*^2\,ds. \tag{29}$$

对于足够小的 $0<\lambda<\lambda_1\nu$,限制 $\lambda<\mu$,得到:

$$e^{\lambda t}|\omega(t)|_2^2\leq|u_0-u_\infty|_2^2+\frac{1}{\nu}\int_0^\infty e^{\lambda s}\|f-f_\infty\|_*^2\,ds. \tag{30}$$

两边同时除以 $e^{\lambda t}$,得到:

$$|u(t)-u_\infty|_2^2=|\omega(t)|_2^2\le\frac{1}{e^{\lambda t}}|u_0-u_\infty|_2^2+\frac{1}{\nu e^{\lambda t}}\int_0^\infty e^{\lambda s}\|f-f_\infty\|_*^2\mathrm{d}s. \tag{31}$$

定理得证.

3 方程(1)强解对初值及系数的连续依赖性

假设 u 和 υ 是方程(1)的解,满足:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\nu_1\Delta u+ru+b|u|u+c|u|^{\beta-1}u+\nabla p_1=f(x,t),(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \nabla\cdot u=0,(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ u=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ u|_{t=0}=u_0,x\in\Omega,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \upsilon}{\partial t}-\nu_2\Delta \upsilon+r\upsilon+b|\upsilon|\upsilon+c|\upsilon|^{\beta-1}\upsilon+\nabla p_2=f(x,t),(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \nabla\cdot \upsilon=0,(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \upsilon=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ \upsilon|_{t=0}=\upsilon_0,x\in\Omega,\end{cases}$$

令 $\tilde\omega=u-\upsilon,\alpha=\nu_1-\nu_2$ 则 $\tilde\omega$ 满足下面的初边值问题:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \tilde\omega}{\partial t}-\nu_1\Delta\tilde\omega-\alpha\Delta\upsilon+r\tilde\omega+b|u|u-b|\upsilon|\upsilon+c|u|^{\beta-1}u-c|\upsilon|^{\beta-1}\upsilon+\nabla p_1-\nabla p_2=0,(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \nabla\cdot\tilde\omega=0,(x,t)\in\Omega\times(0,T),\\ \tilde\omega=0,(x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\ \tilde\omega|_{t=0}=\tilde\omega_0,x\in\Omega.\end{cases} \tag{32}$$

从文献[9]中知道当方程(1)的初值在 V 中取值时,方程强解在 $H,V,\boldsymbol{L}^{\beta+1}(\Omega)$ 及 $(H^2(\Omega))^3$ 中均存在有界吸收集,这里 $1<\beta<5$.为了下面讨论方便,假设强解在 $(H^2(\Omega))^3$ 中的有界吸收集为 B.由于 $V\cup H$,$\boldsymbol{L}^{\beta+1}(\Omega)\cup V,(H^2(\Omega))^3\cup V$,因此 B 也是强解在 H,V 和 $\boldsymbol{L}^{\beta+1}(\Omega)$ 中的有界吸收集.故对 $\forall u_0\in B$,$|u(t)|_2\le A_1$,$|\nabla u(t)|_2\le A_2$,$|u(t)|_{\beta+1}\le A_3$,$|\Delta u(t)|_2\le A_4$,A_1,A_2,A_3,A_4 均为正常数.

定理 3 设初值 $u_0,\upsilon_0\in B,1<\beta<5$,则问题(32)的解满足下面不等式:

$$|\tilde\omega(t)|_2^2\le|\tilde\omega(0)|_2^2+\frac{A_2^2}{4r\nu_1}(\nu_1-\nu_2)^2.$$

证明 将式(32)的第 1 式两端与 $\tilde\omega$ 做内积,得到:$\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\tilde\omega|_2^2+\nu_1|\nabla\tilde\omega|_2^2-\alpha(\Delta\upsilon,\tilde\omega)+r|\tilde\omega|_2^2+(b|u|u-b|\upsilon|\upsilon,\tilde\omega)+(c|u|^{\beta+1}u-c|\upsilon|^{\beta+1}\upsilon,\tilde\omega)=0$.由于$(b|u|u-b|\upsilon|\upsilon,\tilde\omega)\ge0,(c|u|^{\beta+1}u-c|\upsilon|^{\beta+1}\upsilon,\tilde\omega)\ge0$,故$\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\tilde\omega|_2^2+\nu_1|\nabla\tilde\omega|_2^2+r|\tilde\omega|_2^2\le\alpha(\Delta\upsilon,\tilde\omega)\le\nu_1|\nabla\tilde\omega|_2^2+\dfrac{\alpha^2}{4\nu_1}|\nabla\upsilon|_2^2$.因此,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\tilde\omega|_2^2+2r|\tilde\omega|_2^2\le\dfrac{\alpha^2}{2\nu_1}|\nabla\upsilon|_2^2$.

对上述不等式应用 Gronwall 不等式,有:

$$|\tilde\omega(t)|_2^2\le|\tilde\omega(0)|_2^2e^{-2rt}+\int_0^t e^{-2r(t-s)}\frac{\alpha^2}{2\nu_1}|\nabla\upsilon(s)|_2^2\mathrm{d}s\le|\tilde\omega(0)|_2^2e^{-2rt}+$$

$$\frac{A_2^2}{4r\nu_1}\alpha^2[1-e^{-2rt}]\le|u_0-\upsilon_0|_2^2+\frac{A_2^2}{4r\nu_1}(\nu_1-\nu_2)^2.$$

因此,当 $u_0\to\upsilon_0,\nu_1\to\nu_2$ 时 $u\to\upsilon$ 在 H 中.

定理 4 设初值 $u_0,\upsilon_0\in B$,$\dfrac{13}{5}<\beta<5$,则问题(32)的解满足下面不等式:$|\nabla\tilde\omega(t)|_2^2\le$

$|\nabla\tilde{\omega}(0)|_2^2 e^{A_6 t}+A_7(\nu_1-\nu_2)^2 e^{A_6 t}$. 这里 A_6, A_7 是两个正常数.

证明　将式(32)的第 1 式两端与 $-\Delta\tilde{\omega}$ 做内积,得到:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla\tilde{\omega}|_2^2+\nu_1|\Delta\tilde{\omega}|_2^2+r|\nabla\tilde{\omega}|_2^2=-(b|u|u-b|v|v,-\Delta\tilde{\omega})-(c|u|^{\beta-1}u-c|v|^{\beta-1}v,-\Delta\tilde{\omega})-\alpha(\Delta v,\Delta\tilde{\omega}). \tag{33}$$

现在对式(33)的右端逐项进行估计.用到如下 Sobolev 不等式:

$$|u|_p\le d_0|\nabla u|_2, 1\le p\le 6, \forall u\in V.$$

$$|(\alpha\Delta v\Delta\tilde{\omega})|\le\frac{\nu_1}{3}|\Delta\tilde{\omega}|_2^2+\frac{3\alpha^2}{4\nu_1}|\Delta v|_2^2\le\frac{\nu_1}{3}|\Delta\tilde{\omega}|_2^2+\frac{3\alpha^2}{4\nu_1}A_4^2, \tag{34}$$

$$|b(|u|u-|v|v,-\Delta\tilde{\omega})|\le\frac{\nu_1}{3}|\Delta\tilde{\omega}|_2^2+\frac{3b^2}{4\nu_1}||u|u-|v|v|_2^2\le\frac{\nu_1}{3}|\Delta\tilde{\omega}|_2^2+\frac{3b^2}{4\nu_1}\int_\Omega(|u||\tilde{\omega}|+||u|-|v|||v|)^2\mathrm{d}x\le\frac{\nu_1}{3}|\Delta\tilde{\omega}|_2^2+\frac{3b^2}{2\nu_1}|u|_4^2\cdot|\tilde{\omega}|_4^2+\frac{3b^2}{2\nu_1}|v|_4^2\cdot|\tilde{\omega}|_4^2\le$$
$$\frac{\nu_1}{3}|\Delta\tilde{\omega}|_2^2+\frac{3b^2d_0^4}{2\nu_1}(|\nabla u|_2^2+|\nabla v|_2^2)|\nabla\tilde{\omega}|_2^2\le\frac{\nu_1}{3}|\Delta\tilde{\omega}|_2^2+\frac{3b^2d_0^4}{\nu_1}A_2^2|\nabla\tilde{\omega}|_2^2, \tag{35}$$

$$|(c|u|^{\beta-1}u-c|v|^{\beta-1}v,-\Delta\tilde{\omega})|\le\frac{\nu_1}{3}|\Delta\tilde{\omega}|_2^2+\frac{3c^2}{4\nu_1}||u|^{\beta-1}u-|v|^{\beta-1}v|_2^2\le\frac{\nu_1}{3}|\Delta\tilde{\omega}|_2^2+$$
$$\frac{3c^2}{4\nu_1}\int_\Omega(|u|^{\beta-1}|\tilde{\omega}|+||u|^{\beta-1}-|v|^{\beta-1}||v|)^2\mathrm{d}x\le\frac{\nu_1}{3}|\Delta\tilde{\omega}|_2^2+\frac{3c^2}{2\nu_1}|u|_{3(\beta-1)}^{2(\beta-1)}|\tilde{\omega}|_6^2+$$
$$\frac{3c^2}{2\nu_1}p_0^2(\beta-1)^2\int_\Omega(|u|^{\beta-2}+|v|^{\beta-2})^2|\tilde{\omega}|^2|v|^2\mathrm{d}x\le\frac{\nu_1}{3}|\Delta\tilde{\omega}|_2^2+\frac{3c^2d_0^2}{2\nu_1}|u|_{3(\beta-1)}^{2(\beta-1)}|\nabla\tilde{\omega}|_2^2+$$
$$\frac{3c^2}{\nu_1}p_0^2(\beta-1)^2(|u|_{6(\beta-2)}^{2(\beta-2)}+|v|_{6(\beta-2)}^{2(\beta-2)})|v|_6^2|\tilde{\omega}|_6^2\le\frac{\nu_1}{3}|\Delta\tilde{\omega}|_2^2+\frac{3c^2d_0^2}{2\nu_1}|u|_{3(\beta-1)}^{2(\beta-1)}|\nabla\tilde{\omega}|_2^2+$$
$$\frac{3c^2}{\nu_1}p_0^2(\beta-1)^2(|u|_{6(\beta-2)}^{2(\beta-2)}+|v|_{6(\beta-2)}^{2(\beta-2)})|\nabla v|_2^2|\nabla\tilde{\omega}|_2^2, \tag{36}$$

上述不等式的第 3 步用到如下不等式:$|x^p-y^p|\le p_0\cdot p(|x|^{p-1}+|y|^{p-1})|x-y|, p_0>0$. 应用 Gagliardo-Nirenberg 不等式,有 $|u|_{3(\beta-2)}^{2(\beta-2)}\le C|\Delta u|_2^{\frac{8(\beta-2)}{\beta+7}}|u|_{\beta+1}^{\frac{2(\beta+1)^2}{\beta+7}}$, $|u|_{6(\beta-2)}^{2(\beta-2)}\le C|\Delta u|_2^{\frac{2(5\beta-13)}{\beta+7}}|u|_{\beta+1}^{\frac{2(\beta^2-1)}{\beta+7}}$,对 $|v|_{6(\beta-2)}^{2(\beta-2)}$ 估计与上同. 因此

$$|u|_{3(\beta-2)}^{2(\beta-2)}\le CA_4^{\frac{8(\beta-2)}{\beta+7}}A_3^{\frac{2(\beta+1)^2}{\beta+7}}, |u|_{6(\beta-2)}^{2(\beta-2)}+|v|_{6(\beta-2)}^{2(\beta-2)}\le 2CA_4^{\frac{2(5\beta-13)}{\beta+7}}A_3^{\frac{2(\beta^2-1)}{\beta+7}}. \tag{37}$$

将式(34)~(37)与(33)结合,存在正常数 A_5,使得 $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla\tilde{\omega}|_2^2\le A_5^2|\nabla\tilde{\omega}|_2^2+\frac{3A_4^2}{4\nu_1}\alpha^2$, 即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\nabla\tilde{\omega}|_2^2\le 2A_5^2|\nabla\tilde{\omega}|_2^2+\frac{3A_4^2}{2\nu_1}\alpha^2, \tag{38}$$

对式(38)应用 Gronwall 不等式,有 $|\nabla\tilde{\omega}(t)|_2^2\le|\nabla\tilde{\omega}(0)|_2^2 e^{2A_5^2 t}+\frac{3A_4^2\alpha^2}{4\nu_1A_5^2}e^{2A_5^2 t}=|\nabla u(0)-\nabla v(0)|_2^2 e^{2A_5^2 t}+\frac{3A_4^2(\nu_1-\nu_2)^2}{4\nu_1A_5^2}e^{2A_5^2 t}$.因此,当 $u_0\to v_0$ 在 V 中, $\nu_1\to\nu_2$ 时, $u\to v$ 在 V 中.

参　考　文　献

[1] UĞURLU D.On the existence of a global attractor for the Brinkman-Forchheimer equations[J].Nonlinear Analysis:Theory,Methods & Applications,2008,68(7):1986-1992.

[2] OUYANG Y,YANG L E.A note on the existence of a global attractor for the Brinkman-Forchheimer equations[J].Nonlinear Analysis:Theory,Methods & Applications,2009,70(5):2054-2059.

[3] 陈小豹.Brinkman-Forchheimer 方程的吸引子[D].兰州:西北师范大学,2009.

[4] WANG B X,LIN S Y.Existence of global attractors for the three-dimensional Brinkman-Forchheimer equation[J].Mathematical Methods in the Applied Sciences,2008,31(12):1479-1495.

[5] ZHOU S F,ZHAO C D,YOU Y C.The existence of uniform attractors for 3D Brinkman-Forchheimer equations[J].Discrete and Continuous Dynamical Systems,2012,32(10):3787-3800.

[6] SONG X L.Pullback D-attractors for A non-autonomous brinkman-forchheimer system[J].Journal of Mathematical Research With Applications,2013,33(1):90-100.

[7] KANG J R,PARK J Y.Uniform attractors for non-autonomous Brinkman-Forchheimer equations with delay[J].Acta Mathematica Sinica,English Series,2013,29(5):993-1006.

[8] SONG X L,QIAO B M.Uniform attractors for three-dimensional Brinkman-Forchheimer system and some averaging problems[J].The Far East Journal of Dynamical Systems,2014,25(2):99-122.

[9] 乔宝明,李小凤,宋雪丽.三维 Brinkman-Forchheimer 方程强解的全局吸引子的存在性[J].数学的实践与认识,2020,50(10):238-251.
QIAO B M,LI X F,SONG X L.The existence of global attractors for the strong solutions of three-dimensional brinkman-forchheimer equations[J].Mathematics in Practice and Theory,2020,50(10):238-251.

[10] 宋雪丽,徐爽,乔宝明.三维全空间上 Brinkman-Forchheimer 方程弱解的 L_2 衰减性[J].数学的实践与认识,2020,50(22):307-314.
SONG X L,XU S,QIAO B M.L_2-decay of weak solutions for the three-dimensional brinkman-forchheimer equations in R3[J].Mathematics in Practice and Theory,2020,50(22):307-314.

[11] MOHAN M T.Large deviations for the two-time-scale stochastic convective Brinkman-Forchheimer equations[J].Journal of Differential Equations,2023,376:469-537.

[12] YU H.Axisymmetric solutions to the convective Brinkman-Forchheimer equations[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,2023,520(2):126892.

[13] YANG R,YANG X G.Asymptotic stability of 3D Navier-Stokes equations with damping[J].Applied Mathematics Letters,2021,116:107012.

[14] 李远飞.原始方程组对黏性系数的连续依赖性[J].山东大学学报(理学版),2019,54(12):12-23.
LI Y F.Continuous dependence on viscosity coefficient for primitive equations[J].Journal of Shandong University(Natural Science),2019,54(12):12-23.

[15] 李远飞.大尺度海洋大气动力学三维黏性原始方程对边界参数的连续依赖性[J].吉林大学学报(理学版),2019,57(5):1053-1059.
LI Y F.Continuous dependence on boundary parameters for three-dimensional viscous primitive equation of large-scale ocean atmospheric dynamics[J].Journal of Jilin University(Science Edition),2019,57(5):1053-1059.

[16] 王军礼,毕佳成,连汝续,等.初值间断的 Navier-Stokes 方程柯西问题弱解的存在性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2016,44(1):8-14.
WANG J L,BI J CLIAN R,et al.Cauchy problem for one-dimensional barotropic compressible navier-stokes equations with density-dependent viscosity and discontinuous initial data[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2016,44(1):8-14.

[17] 文生兰.带有非自治项的非线性可压缩 Navier-Stokes 方程组一致吸引子的存在性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2014,42(3):11-17.
WEN S L.Universal attractor for the nonlinear compressible navier-stokes equations of non autonomous systems[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2014,42(3):11-17.

[18] LIONS J L.Quelques méthodes de résolution des problémes aux limites non linéaires[M].Paris:[s.n.],1969.

Asymptotic stability of solutions to the 3D Brinkman-Forchheimer equation

Song Xueli, Xie Xiaotian

(College of Science, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: In this paper, we study the asymptotic stability of the global solution of the three-dimensional Brinkman-Forchheimer equation on bounded domains. Firstly, we discuss the uniqueness of the solution of the generalized steady state elliptic equation corresponding to the Brinkman-Forchheimer equation. Then, we get the convergence of solutions between Brinkman-Forchheimer equation and its generalized steady state elliptic equation. Finally, we prove the continuous dependence of strong solution of Brinkman-Forchheimer equation on the initial value and the coefficient in $(L^2(\Omega))^3$ and $(H_0^1(\Omega))^3$.

Keywords: Brinkman-Forchheimer equations; weak solution; asymptotic stability

[责任编校 陈留院 赵晓华]