调和分数 Ornstein-Uhlenbeck 金融模型的参数估计

王继霞[1]，王琳[1]，李浩然[2]

(1.河南师范大学 数学与信息科学学院，河南 新乡 453007；
2.湖南大学 经济管理研究中心，长沙 410012)

摘　要：为了描述金融资产价格过程的长相依性和自相似性，首先构建由调和分数布朗运动驱动的分数 Ornstein-Uhlenbeck(O-U)模型.由于调和分数布朗运动是分数布朗运动的推广，故所构建的模型具有更广泛的应用.然后基于离散观测样本，利用最小二乘方法，得到模型漂移参数的估计量，并证明了估计量的相合性和渐近分布.最后，通过模拟展示了所得估计量的有限样本性质，模拟结果显示估计量的值拟合参数真值的效果较好.

关键词：最小二乘估计；调和分数布朗运动；Ornstein-Uhlenbeck 过程；相合性；渐近分布

中图分类号：O211.6；F830.9　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1000-2367(2025)01-0075-07

自随机微分方程理论创立以来，在许多领域得到了广泛的应用，特别是金融、经济等领域.近年来，许多学者对由分数布朗运动驱动的随机微分方程的参数估计及估计量的渐近性质进行了深入研究.分数布朗运动是一个正态随机过程，其被广泛应用于天文学、原子物理学、分子物理学和金融等领域.MEERSCHAERT 等[1-2]在分数布朗运动的滑动平均表示的基础上加入了指数回调，研究了调和分数布朗运动模型.CHEN 等[3]讨论了调和分数布朗运动的遍历性和 Fokker-Planck 方程，并引入了调和分数 Langevin 方程.SHEN 等[4]通过输运过程给出了调和分数布朗运动的一个强近似，并推导出了收敛速度.此外，SABZIKAR 等[5]阐明了第二类调和分数布朗运动，并证明了其与调和分数布朗运动是两个不同的过程.

在过去的几十年中，有很多常用的方法来估计随机微分方程中的参数，例如，最小二乘法，极大似然估计法.WANG 等[6]基于离散高频观测，利用最小二乘法估计了由 Lévy 噪声驱动的 O-U 过程的参数，并研究了估计量的渐近行为.DING 等[7]研究了离散时间观测下由分数 Lévy 噪声驱动的 CIR 模型的最小二乘估计量，并通过模拟研究展示了估计量的有效性.TANAKA 等[8]在特定初始值下得到了分数 Vasicek 模型漂移参数的极大似然估计量，分别在平稳情况、爆炸情况和边界情况下建立极大似然估计量的渐近理论，同时发现估计量的渐近理论依赖于 Hurst 参数的值.LOHVINENKO 等[9]将 TANAKA 等[8]特定的初始值扩展到任意取值.PRAKASA RAO[10]研究了混合分数 Vasicek 模型的极大似然估计量的渐近性质.其他估计方法见文献[11－13].

在已有的文献中，BONIECE 等[14]首次构造基于调和分数布朗运动的小波分析，提出了一种新的非线性对数回归小波估计，并证明了估计量的相合性和渐近正态性.BONIECE 等[15]用小波构造了调和分数布朗运动的第一种统计方法，对分数布朗运动和调和分数布朗运动进行有效性测试，用实例证明调和分数布朗运动

收稿日期：2023-03-10；**修回日期：**2023-11-17.

基金项目：国家自然科学基金(11971154)；河南省软科学研究计划项目(232400410034).

作者简介：王继霞(1978－)，女，河南驻马店人，河南师范大学副教授，博士，研究方向为金融统计推断和金融风险管理，E-mail：jixiawang@163.com.

通信作者：王琳，E-mail：wanglin581@126.com.

引用本文：王继霞，王琳，李浩然.调和分数 Ornstein-Uhlenbeck 金融模型的参数估计[J].河南师范大学学报(自然科学版)，2025，53(1)：75-81.(Wang Jixia，Wang Lin，Li Haoran.Parameter estimation of tempered fractional Ornstein-Uhlenbeck financial model[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)，2025，53(1)：75-81.DOI：10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.03.10.0006.)

模型比分数布朗运动模型更好. 本文基于离散观测样本利用最小二乘法研究了由调和分数布朗运动驱动的 O-U 过程漂移参数的估计问题,并证明了所得估计量的渐近理论,最后用数值模拟展示了估计量的拟合效果.

1 模型和最小二乘估计

假设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 是定义在滤子空间$(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathscr{F}_{t\geq 0})$上的随机过程, 且满足如下由调和分数布朗运动驱动的随机微分方程:

$$\mathrm{d}X_t = -\alpha X_t \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t^{H,\lambda}, t \in [0,T], X_0 = x_0, \tag{1}$$

其中 $x_0 > 0$ 是初始值,$\{B_t^{H,\lambda}, t \geq 0\}$ 是参数 $\lambda > 0$ 且 $H \in (0, +\infty)$ 的调和分数布朗运动,漂移参数 $\alpha \neq 0$ 是未知参数. 下面,首先介绍一些关于调和分数布朗运动的基本知识(可参见文献[1]).

定义 1 设 $B(\mathrm{d}x)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 上独立的高斯随机测度,其控制测度为 $m(\mathrm{d}x)=\mathrm{d}x$,则对任意的 $H>0$ 且 $\lambda > 0$, 随机积分

$$B^{H,\lambda}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathrm{e}^{-\lambda(t-x)_+}(t-x)_+^{H-\frac{1}{2}} - \mathrm{e}^{-\lambda(-x)_+}(-x)_+^{H-\frac{1}{2}}] B(\mathrm{d}x), \tag{2}$$

被称为调和分数布朗运动,其中 $(x)_+ = xI(x>0)$,$0^0=0$. 调和分数布朗运动的协方差函数可以表示为

$$E(B_s^{H,\lambda} B_t^{H,\lambda}) = \frac{1}{2}(C_t^2 \mid t \mid^{2H} + C_s^2 \mid s \mid^{2H} - C_{t-s}^2 \mid t-s \mid^{2H}), \tag{3}$$

对于任意的 $s, t \in R$.对 $t \neq 0$,

$$C_t^2 = \frac{2\Gamma(2H)}{(2\lambda \mid t \mid)^{2H}} - \frac{2\Gamma(H+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2\lambda \mid t \mid)^{H}} K_H(\lambda \mid t \mid), \tag{4}$$

其中 $C_0^2 = 0$,$K_v(z)$ 是二阶修正的 Bessel 函数, 即

$$K_H(z) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{H-1} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}z(u+\frac{1}{u})} \mathrm{d}u.$$

值得注意的是,在 $H\in(0,1)$,$\lambda=0$ 的情况下,$B_t^{H,0}$ 是分数布朗运动,具有平稳增量和自相似性(参见文献[16]).

调和分数布朗运动是一个具有平稳增量的高斯过程,因此,对任意的比例系数 $c>0$,有

$$\{B_{H,\lambda}(ct)\}_{t\in\mathbf{R}} \triangleq \{c^H B_{H,c\lambda}(t)\}_{t\in\mathbf{R}},$$

这里符号$\triangleq$表示有限维同分布.调和分数布朗运动的 harmonizable 表示为

$$B^{H,\lambda}(t) = \frac{\Gamma(H+\frac{1}{2})}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tk}-1}{(\lambda - \mathrm{i}k)^{\frac{1}{2}+H}} \hat{B}(\mathrm{d}k), t \in \mathbf{R},$$

其中 $\hat{B}(\mathrm{d}x)$ 是复高斯随机测度,且满足 $E(\hat{B}(\mathrm{d}x))^2 = \mathrm{d}x$.

下面,考虑由调和分数布朗运动驱动的 O-U 过程漂移参数的最小二乘估计问题.设 $\{X_{t_i}\}_{i=1}^n$ 是随机过程$\{X_t, t\geq 0\}$ 在 n 个时间点 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的观测样本,其中 $t_i = \frac{iT}{n}$,$\Delta_{i-1} = \frac{T}{n}$,$i=1,2,\cdots,n$. 最小化如下的 Contrast 函数可得到漂移参数 α 的最小二乘估计量:

$$\phi_{n,\alpha}(\alpha) = \sum_{i=1}^n \mid X_{t_i} - X_{t_{i-1}} + \alpha X_{t_{i-1}} \Delta_{i-1} \mid^2, \tag{5}$$

其中 $\Delta_{i-1} = t_i - t_{i-1} = \frac{T}{n}$.关于 α 求导, 得到

$$\sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}} + \alpha X_{t_{i-1}} \Delta_{i-1}) X_{t_{i-1}} = 0. \tag{6}$$

因此,有

$$\hat{\alpha} = -\frac{\sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) X_{t_{i-1}}}{\frac{T}{n}\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}^2}. \tag{7}$$

随机微分方程(1)的解可写为

$$X_t = e^{-\alpha t} x_0 + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s^{H,\lambda}. \tag{8}$$

式(8)的离散化形式为

$$X_{t_i} = e^{-\frac{\alpha T}{n}} X_{t_{i-1}} + \sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\alpha(t_i-s)} dB_s^{H,\lambda}, i=1,2,\cdots,n, \tag{9}$$

式(9)可改写为

$$X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = (e^{-\frac{\alpha T}{n}} - 1) X_{t_{i-1}} + \sigma \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\alpha(t_i-s)} dB_s^{H,\lambda}, i=1,2,\cdots,n. \tag{10}$$

将式(10)代入到式(7),可以将 $\hat{\alpha}$ 改写为以下形式

$$\hat{\alpha} - \alpha = [\frac{n}{T}(1 - e^{-\frac{\alpha T}{n}}) - \alpha] - \frac{\sigma \sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\alpha(t_i-s)} dB_s^{H,\lambda}}{\frac{T}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}}^2}. \tag{11}$$

另外,由文献[17],模型(1)的离散近似可表示为如下的欧拉模型:

$$X_{t_i} = X_{t_{i-1}} - \alpha X_{t_{i-1}} \Delta_{i-1} + \sigma(B_{t_i}^{H,\lambda} - B_{t_{i-1}}^{H,\lambda}). \tag{12}$$

将式(12)代入到式(7),得:

$$\hat{\alpha} = \alpha - \sigma \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}} (B_{t_i}^{H,\lambda} - B_{t_{i-1}}^{H,\lambda})}{\frac{T}{n} \sum_{i=1}^{n} X_{t_{i-1}}^2}. \tag{13}$$

下一节,将讨论所得到的估计量的渐近性质.

2　相合性和渐近分布

本节主要证明所得估计量的相合性和渐近分布,首先给出如下引理.

引理 1　当 $H \in (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$ 时,设 $\lambda > \alpha$, 则有

$$E(\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\alpha(t_i-s)} dB_s^{H,\lambda})^2 \leq C \mid 1 - e^{-\frac{2\alpha T}{n}} \mid, \tag{14}$$

和

$$E(\int_0^{t_{i-1}} e^{-\alpha(t_{i-1}-s)} dB_s^{H,\lambda})^2 \leq C \mid 1 - e^{-2\alpha t_{i-1}} \mid, \tag{15}$$

其中常数 C 依赖于参数 H, λ, α, T.

证明　首先证明式(14).由文献[2],利用调和分数布朗运动的随机积分公式,当 $H \in (0, \frac{1}{2})$ 时,

$$E(\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\alpha(t_i-s)} dB_s^{H,\lambda})^2 = \Gamma^2(\frac{1}{2}+H) \int_{t_{i-1}}^{t_i} [D_{-}^{\frac{1}{2}-H} e^{-\alpha(t_i-s)} - \lambda I_{-}^{\frac{1}{2}+H} e^{-\alpha(t_i-s)}]^2 ds, \tag{16}$$

其中

$$D_{-}^{\frac{1}{2}-H} e^{-\alpha(t-s)} = \lambda^{\frac{1}{2}-H} e^{-\alpha(t-s)} + \frac{\frac{1}{2}-H}{\Gamma(\frac{1}{2}+H)} \int_s^{+\infty} \frac{e^{-\alpha(t-s)} - e^{-\alpha(t-u)}}{(u-s)^{\frac{3}{2}-H}} e^{-\lambda(u-s)} du =$$

$$\lambda^{\frac{1}{2}-H} e^{-\alpha(t-s)} + \frac{e^{-\alpha(t-s)}}{\Gamma(\frac{1}{2}+H)} \int_0^{+\infty} ((\lambda-\alpha) e^{-(\lambda-\alpha)y} - \lambda e^{-\lambda y}) y^{H-\frac{1}{2}} dy = e^{-\alpha(t-s)} (\lambda-\alpha)^{\frac{1}{2}-H}, \tag{17}$$

和

$$I_{-}^{H+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}=\frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha(t-u)}(u-s)_{+}^{H-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\lambda(u-s)}+\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}(\lambda-\alpha)^{-\frac{1}{2}-H}. \tag{18}$$

把式(17)、(18)代入式(16),可得:

$$E(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda})^2=\Gamma^2(\frac{1}{2}+H)\int_{t_{i-1}}^{t_i}[\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}(\lambda-\alpha)^{\frac{1}{2}-H}-\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\lambda(\lambda-\alpha)^{-H-\frac{1}{2}}]^2\mathrm{d}s=$$
$$\Gamma^2(\frac{1}{2}+H)(\lambda-\alpha)^{-2H-1}\alpha(1-\mathrm{e}^{-2\alpha(t_i-t_{i-1})})\leq C\mid 1-\mathrm{e}^{-\frac{2\alpha T}{n}}\mid.$$

同理可得:

$$E(\int_{0}^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda})^2=\Gamma^2(\frac{1}{2}+H)\int_{0}^{t_{i-1}}[\mathrm{e}^{-\alpha(t_{i-1}-s)}(\lambda-\alpha)^{\frac{1}{2}-H}-\mathrm{e}^{-\alpha(t_{i-1}-s)}\lambda(\lambda-\alpha)^{-H-\frac{1}{2}}]^2\mathrm{d}s=$$
$$\Gamma^2(\frac{1}{2}+H)(\lambda-\alpha)^{-2H-1}\alpha(1-\mathrm{e}^{-2\alpha t_{i-1}})\leq C\mid 1-\mathrm{e}^{-2\alpha t_{i-1}}\mid.$$

当 $H\in(\frac{1}{2},1)$ 时,

$$E(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda})^2=\Gamma^2(\frac{1}{2}+H)\int_{t_{i-1}}^{t_i}[I_{-}^{H-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}-\lambda I_{-}^{\frac{1}{2}+H}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}]^2\mathrm{d}s, \tag{19}$$

其中

$$I_{-}^{H-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}=\frac{1}{\Gamma(H-\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha(t-u)}(u-s)_{+}^{H-\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-\lambda(u-s)}+\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}(\lambda-\alpha)^{\frac{1}{2}-H}. \tag{20}$$

将式(18)、(20)代入式(19),可得到与 $H\in(0,\frac{1}{2})$ 相同的结论. 证毕.

下面的定理 1 给出了估计量的相合性.

定理 1 当 $H\in(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$ 时,设 $n\to\infty,\alpha\to 0$,且 $n^{\frac{1}{2}}\sigma\to 0$,则 $\hat{\alpha}\xrightarrow{P}\alpha$,其中符号$\xrightarrow{P}$表示依概率收敛.

证明 显然,当 $n\to\infty$ 时,$[\frac{n}{T}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha T}{n}})-\alpha]\to 0$.

结合式(8),可得:

$$\sigma\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}=\sigma\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{e}^{-\alpha t_{i-1}}x_0+\sigma\int_{0}^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda})\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}=$$
$$\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}+\sigma\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\alpha t_{i-1}}x_0\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}.$$

由引理 1,对任意给定的 $\delta>0$,有

$$P(\mid\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}\mid>\delta)\leq\delta^{-1}\sigma^2\sum_{i=1}^{n}E\mid\int_{0}^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}\mid\leq$$
$$C\delta^{-1}\sigma^2\sum_{i=1}^{n}\mid 1-\mathrm{e}^{-\frac{2\alpha T}{n}}\mid^{\frac{1}{2}}\mid 1-\mathrm{e}^{-2\alpha t_{i-i}}\mid^{\frac{1}{2}}\leq\delta^{-1}O(\sigma^2 n^{\frac{1}{2}})\to 0,n\to\infty,\sigma\to 0,\sigma n^{\frac{1}{2}}\to 0. \tag{21}$$

$$P(\mid\sigma\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{-\alpha t_{i-1}}x_0\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}\mid>\delta)\leq\delta^{-1}\sigma x_0\mathrm{e}^{|\alpha T|}\sum_{i=1}^{n}(E(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda})^2)^{\frac{1}{2}}\leq$$
$$C\delta^{-1}\sigma n\mid 1-\mathrm{e}^{-\frac{2\alpha T}{n}}\mid^{\frac{1}{2}}=\delta^{-1}O(n^{\frac{1}{2}}\sigma)\to 0,n\to\infty,\sigma\to 0,\sigma n^{\frac{1}{2}}\to 0. \tag{22}$$

由式(21)、(22)可得:

$$\sigma\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}\xrightarrow{P}0,n\to\infty,\sigma\to 0,\sigma n^{\frac{1}{2}}\to 0.$$

当 $n\to\infty,\alpha\to 0$,且 $n^{\frac{1}{2}}\alpha\to 0$ 时,有$\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}^2\xrightarrow{P}\frac{x_0^2}{2\alpha}(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T})$.

$$\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}^{2}=\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{e}^{-\theta t_{i-1}}x_0+\sigma\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda})^2=\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{e}^{-\alpha t_{i-1}}x_0)^2+$$

$$\frac{T\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}(\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda})^2+\frac{2T\sigma}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{e}^{-\alpha t_{i-1}}x_0)(\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda})=I_1+I_2+I_3,$$

其中

$$\lim_{n\to\infty}I_1=\lim_{n\to\infty}\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{e}^{-\alpha t_{i-1}}x_0)^2=\frac{x_0^2}{2\alpha}(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T}).\tag{23}$$

对任意给定的 $\delta>0$,有

$$P(|I_2|>\delta)\leq T\delta^{-1}\sigma^2n^{-1}\sum_{i=1}^{n}E(\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda})^2\leq$$

$$C\delta^{-1}\sigma^2n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|1-\mathrm{e}^{-2\alpha t_{i-1}}|\leq C\delta^{-1}\sigma^2\to 0.\tag{24}$$

$$P(|I_3|>\delta)\leq 2T\delta^{-1}\sigma n^{-1}E|\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{e}^{-\alpha t_{i-1}}x_0)(\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda})|\leq$$

$$2T\delta^{-1}\sigma x_0\mathrm{e}^{|\alpha T|}n^{-1}\sum_{i=1}^{n}[E(\int_0^{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha(t_{i-1}-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda})^2]^{\frac{1}{2}}\leq C\delta^{-1}\sigma\to 0.\tag{25}$$

由式(23)、(24)和(25)可得:

$$\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}^{2}\xrightarrow{P}\frac{x_0^2}{2\alpha}(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T}).\tag{26}$$

因此,当 $n\to\infty,\sigma\to 0$,且 $n^{\frac{1}{2}}\sigma\to 0$ 时,得 $\hat{\alpha}\xrightarrow{P}\alpha$. 证毕.

下面,研究估计量的渐近分布.首先给出如下的引理.

引理 2　假设 $\sigma\to 0$,则 $\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t-x_0\mathrm{e}^{-\alpha t}|\to 0$.

证明　注意到 $X_t-x_0\mathrm{e}^{-\alpha t}=\int_0^t-\alpha(X_s-x_0\mathrm{e}^{-\alpha s})\mathrm{d}s+\sigma B_t^{H,\lambda}$,$t\in[0,T]$. 由 Cauchy-Schwarz 不等式可得 $|X_t-x_0\mathrm{e}^{-\alpha t}|^2\leq 2\alpha^2t\int_0^t|X_s-x_0\mathrm{e}^{-\alpha s}|^2\mathrm{d}s+2\sigma^2|B_t^{H,\lambda}|^2$. 根据 Gronwall's 不等式,可以得到下面的不等式,$|X_t-x_0\mathrm{e}^{-\alpha t}|^2\leq 2\sigma^2\mathrm{e}^{2\alpha^2t^2}\sup\limits_{0\leq t\leq T}|B_t^{H,\lambda}|^2$,因此 $\sup\limits_{0\leq t\leq T}|X_t-x_0\mathrm{e}^{-\alpha t}|\leq\sqrt{2}\sigma\mathrm{e}^{\alpha^2T}\sup\limits_{0\leq t\leq T}|B_t^{H,\lambda}|\to 0$,$\sigma\to 0$. 证毕.

定理 2　当 $H\in(0,\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2},1)$ 时,假设 $n\to\infty,\sigma\to 0$,且 $n^{\frac{1}{2}}\sigma\to 0$,则有 $\sigma^{-1}(\hat{\alpha}-\alpha)\xrightarrow{L}-\frac{2\alpha\int_0^T\mathrm{e}^{-\alpha s}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}}{x_0(1-\mathrm{e}^{-2\alpha T})}$,其中符号 $\xrightarrow{L}$ 表示依分布收敛.

证明　由式(7)可得 $\sigma^{-1}(\hat{\alpha}-\alpha)=\sigma^{-1}[\frac{T}{n}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha T}{n}})-\alpha]-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}}{\frac{T}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}^2}$.

显然,假如 $n\to\infty,\sigma\to 0$ 且 $n\sigma\to\infty$,则 $\sigma^{-1}[\frac{T}{n}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha T}{n}})-\alpha]\to 0$.对于 $\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}$,有

$$(\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda})=\int_0^T\sum_{i=1}^{n}1_{[t_{i-1},t_i]}X_{t_{i-1}}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}=\int_0^T\mathrm{e}^{-\alpha(\frac{[ns]+1}{n}-s)}X_{\frac{[ns]}{n}}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda},$$

和 $\mathrm{e}^{-\alpha(\frac{[ns]+1}{n}-s))}X_{\frac{[ns]}{n}}\to X_s,n\to\infty$,其中$[ns]$表示 ns 的整数部分,由引理 2 可得:

$$\sum_{i=1}^{n}X_{t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\mathrm{e}^{-\alpha(t_i-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}\xrightarrow{P}\int_0^T x_0\mathrm{e}^{-\alpha s}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda},n\to\infty,\sigma\to 0.\tag{27}$$

结合式(26)、(27),当 $n \to \infty, \sigma \to 0$,且 $n\sigma \to \infty$ 时,可得 $\sigma^{-1}(\hat{\alpha}-\alpha) \xrightarrow{L} -\dfrac{2\alpha\int_0^T e^{-\alpha s}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}}{x_0(1-e^{-2\alpha T})}$. 证毕.

3 模拟研究

本节将研究模型参数 H,λ,σ,α 在不同取值下所得估计量的有限样本性质.设 $t_i = i\Delta(\Delta = \dfrac{T}{n})$,则可由欧拉法给出模型(1)的路径解的离散时间表达:

$$X_{i\Delta} = e^{-\alpha\Delta}X_{(i-1)\Delta} + \sigma\int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} e^{-\alpha(i\Delta-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}, i = 1,2,\cdots,n. \tag{28}$$

积分 $\int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} e^{-\alpha(i\Delta-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda}$ 可近似为:$\int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} e^{-\alpha(i\Delta-s)}\mathrm{d}B_s^{H,\lambda} \approx \sum_{j=1}^{m} e^{\alpha[(j-1)\delta-\Delta]}(B_{(i-1)\Delta+j\delta}^{H,\lambda} - B_{(i-1)\Delta+(j-1)\delta}^{H,\lambda})$,其中 m 是区间$[(i-1)\Delta, i\Delta](i = 1,2,\cdots,n)$中等子区间的数量,$\delta = \dfrac{\Delta}{m}$.

模拟步骤如下:

1)设定参数 α,σ,H,λ 的值,确定时间跨度 T,样本容量 m,n.

2)由式(28)模拟观测值 $X_{\Delta}, X_{2\Delta},\cdots,X_{n\Delta}$.

3)用$\{X_{i\Delta}\}_{i=1}^{n}$估计基于式(13)给出的估计量 $\hat{\alpha}$.

4)重复上述程序 100 次,得到 $\hat{\alpha}$ 的均值和标准差.

表 1、表 2、表 3 给出了模型参数 H,λ,σ 在不同取值下所得估计量的模拟结果.由模拟结果可知,所得估计量逼近真值的效果良好.

表 1 当 H=0.2,λ=4 时,在 α 的不同取值下,$\hat{\alpha}$ 的模拟结果

Tab. 1 When H=0.2 and λ=4, the simulation results of $\hat{\alpha}$ at different values of α

σ 值	α 的真值	1.5	2.5	3.5
σ=0.001	均值	1.504 1	2.557 0	3.440 3
	标准差	0.971 5	1.147 2	1.433 1
σ=0.01	均值	1.460 9	2.529 4	3.512 9
	标准差	1.190 2	1.332 0	1.488 1
σ=0.1	均值	1.486 0	2.577 2	3.451 5
	标准差	0.933 3	1.197 0	1.130 2

表 2 当 σ=0.001,H=0.2 时,在 λ 的不同取值下,$\hat{\alpha}$ 的模拟结果

Tab. 2 When σ=0.001 and H=0.2, the simulation results of $\hat{\alpha}$ at different values of λ

λ 值	α 的真值	0.8	1.8	2.8
λ=3	均值	0.819 3	1.844 8	2.812 1
	标准差	1.155 0	0.970 6	1.160 5
λ=4	均值	0.781 5	1.772 1	2.834 1
	标准差	1.007 4	0.879 3	1.104 6
λ=5	均值	0.797 0	1.809 5	2.865 5
	标准差	0.854 2	1.051 7	1.138 2

表 3 当 σ=0.001,λ=4 时,在 H 的不同取值下,$\hat{\alpha}$ 的模拟结果

Tab. 3 When σ=0.001 and λ=4, the simulation results of $\hat{\alpha}$ at different values of H

H 值	α 的真值	1.2	2.2	3.2
H=0.2	均值	1.245 3	2.198 2	3.221 6
	标准差	1.189 0	1.129 1	1.068 4
H=0.4	均值	1.177 8	2.220 9	3.165 5
	标准差	1.868 9	2.189 6	2.329 4
H=0.7	均值	1.226 3	2.251 4	3.180 0
	标准差	5.213 1	5.047 7	6.363 1

参 考 文 献

[1] MEERSCHAERT M M, SABZIKAR F. Tempered fractional Brownian motion[J]. Statistics & Probability Letters, 2013, 83(10): 2269-2275.

[2] MEERSCHAERT M M, SABZIKAR F. Stochastic integration for tempered fractional Brownian motion[J]. Stochastic processes and their applications, 2014, 124(7): 2363-2387.

[3] CHEN Y, WANG X D, DENG W H. Localization and ballistic diffusion for the tempered fractional Brownian-Langevin motion[J]. Journal of Statistical Physics, 2017, 169(1): 18-37.

[4] SHEN G J, XIA L W, ZHU D J. A strong convergence to the tempered fractional Brownian motion[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2017, 46(8): 4103-4118.

[5] SABZIKAR F，SURGAILIS D. Tempered fractional Brownian and stable motions of second kind[J]. Statistics & Probability Letters，2018，132：17-27.

[6] WANG Q B，SHEN G J，GAO Z L. Least squares estimator for Ornstein-Uhlenbeck processes driven by small fractional Lévy noises[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods，2021，50(8)：1838-1855.

[7] DING J R，WEI C. Parameter estimation for discretely observed Cox-Ingersoll-Ross model driven by fractional Lévy processes[J]. AIMS Mathematics，2023，8(5)：12168-12184.

[8] TANAKA K，XIAO W L，YU J. Maximum likelihood estimation for the fractional Vasicek model[J]. Econometrics，2020，8(3)：1-28.

[9] LOHVINENKO S，RALCHENKO K. Maximum likelihood estimation in the fractional Vasicek model[J]. Lithuanian Journal of Statistics，2017，56(1)：77-87.

[10] PRAKASA RAO B L S. Maximum likelihood estimation for sub-fractional Vasicek model[J]. Random Operators and Stochastic Equations，2021，29(4)：265-277.

[11] BROUSTE A，IACUS S M. Parameter estimation for the discretely observed fractional Ornstein-Uhlenbeck process and the Yuima R package[J]. Computational Statistics，2013，28(4)：1529-1547.

[12] HU Y Z，NUALART D，ZHOU H J. Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes of general Hurst parameter[J]. Statistical Inference for Stochastic Processes，2019，22(1)：111-142.

[13] CHEN Y，LI Y，PEI X Z. Parameter estimation for Vasicek model driven by a general Gaussian noise[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods，2023，52(9)：3132-3148.

[14] BONIECE B C，SABZIKAR F，DIDIER G. Tempered Fractional Brownian Motion：Wavelet Estimation and Modeling of Turbulence in Geophysical Flows[C]. IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP). [s.l.]：IEEE，2018.

[15] BONIECE B C，DIDIER G，SABZIKAR F. Tempered fractional Brownian motion：wavelet estimation，modeling and testing[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis，2021，51：461-509.

[16] MOLZ F J，LIU H H，SZULGA J. Fractional Brownian motion and fractional Gaussian noise in subsurface hydrology：A review，presentation of fundamental properties，and extensions[J]. Water Resources Research，1997，33(10)：2273-2286.

[17] AIT-SAHALIA Y. Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions：a closed-form approximation approach[J]. Econometrica，2002，70(1)：223-262.

Parameter estimation of tempered fractional Ornstein-Uhlenbeck financial model

Wang Jixia[1]，Wang Lin[1]，Li Haoran[2]

(1. College of Mathematics and Information Science，Henan Normal University，Xinxiang 453007，China；
2. Center for Economics，Finance and Management Studies，Hunan University，Changsha 410012，China)

Abstract：In order to describe the long-range dependence and self-similarity of financial asset price process，this paper first constructs a fractional Ornstein-Uhlenbeck (O-U) model driven by tempered fractional Brownian motion. Because tempered fractional Brownian motion is a generalization of fractional Brownian motion，the model constructed has more extensive applications. Based on discrete observation samples，the estimator for the model of the drift parameter is obtained by using the least square method，the consistency of the estimator is proved，and the asymptotic distribution of the estimator is given. Finally，the simulation shows the finite sample property of the estimator，and the simulation results show that the estimator is effective.

Keywords：least squares estimation；tempered fractional Brownian motion；Ornstein-Uhlenbeck process；consistency；asymptotic distribution

［责任编校　陈留院　杨浦］