

半正规、共轭置换与有限群的超可解性

赵先鹤,汪艳丽

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘 要:研究了有限群的超可解性问题,结合共轭置换子群与半正规子群的概念,在群 G 的极大子群(2-极大子群)或共轭置换或半正规的条件下给出了群 G 超可解的若干充分条件.

关键词:共轭置换子群;超可解群;半正规子群

中图分类号:O152

文献标志码:A

共轭置换子群的概念是由 T. Foguel 在文献[1]中首次提出的.群 G 的子群 H 称为 G 的共轭置换子群,若 $HH^x = H^xH$,对任意 $x \in G$ 都成立.

这一概念与群 G 结构之间的关系已被许多群论学者所研究,见文献[1-7].其中,在文献[2,4]中作者分别研究了 G 的极大子群和 2-极大子群与 G 的超可解性之间的关系.

我们称群 G 的子群 A (在 G 中)是半正规的,如果存在一个子群 B 使得 $G = AB$,且对 B 的任何真子群 B_1 , AB_1 是 G 的真子群,这样的子群 B 叫作 A 在 G 中的 S -补. A 在 G 中的 S -补之集合记为 $S_G(A)$.

对于半正规子群的研究已有许多很好的结果(如文献[8-9]),特别地,苏向盈在文献[9]中证明了如果有限群 G 的极大子群(2-极大子群)在 G 中均是半正规的,则 G 是超可解的.

综合以上两方面的研究,在本文中,我们把半正规与共轭置换结合起来证明了:

定理 1 若有限群 G 的极大子群均在 G 中共轭置换或半正规,则 G 超可解.

定理 2 如果 G 的 2-极大子群在 G 中或半正规或共轭置换,且 G 的任何截断均不同构于内交换群,则 G 是超可解的.

本文所讨论的群 G 都是有限群, p 是 $|G|$ 的一个素因子,用 G_p 表示 G 的 Sylow p -子群; $G_{p'}$ 表示 G 的 p' -Hall 子群; $\pi(G)$ 表示 $|G|$ 的素因子的集合.文中的其它符号都是标准的,参见文献[10].

1 主要引理

引理 1^[1] 设 G 是一个群, $H <_{c-p} G$ 且 H 为 p -群,则 H^G 必为 p -群.

引理 2^[1] 若 G 的极大子群均在 G 中共轭置换,则 G 幂零.

引理 3^[9] 群 G 是超可解的当且仅当它的极大子群均是半正规的.

引理 4^[9] 如果群 G 的 2-极大子群都是半正规的,则 G 是超可解的.

引理 5^[10] 设 G 是一个群且 $\Phi(G) = 1$,则 $F(G)$ 是交换群且 $F(G) = \langle N \mid N \text{ 是 } G \text{ 的可解的极小正规子群} \rangle$.

引理 6^[11] 设 G_1, G_2 是 G 的子群满足 $G = G_1G_2, P \in \text{Syl}_p(G)$. 则存在 $P_1 \in \text{Syl}_p(G_1), P_2 \in \text{Syl}_p(G_2)$ 使得 $P = P_1P_2$.

收稿日期:2014-05-19;修回日期:2014-11-12.

基金项目:国家自然科学基金(10771172;11271301;U1204101);河南省教育厅重点项目(13B110085);校青年骨干教育培养计划(01016500608).

作者简介:赵先鹤(1979-),女,河南南阳人,河南师范大学副教授,博士,主要从事有限群研究,E-mail:zhaoxianhe989@163.com.

引理 7^[11] 设 G 是一个群, $M \triangleleft G$, 如果 M 的极大子群 H 在 G 中共轭置换, 则 $H \triangleleft G$ 或者 $M \triangleleft G$.

证明 因为 $H <_{c-p} G$, 则 $H \triangleleft G$, 从而必存在一个次正规群列

$$H \triangleleft K_1 \triangleleft K_2 \triangleleft \cdots \triangleleft K_t \triangleleft G,$$

由 $H <_{c-p} M$ 且 $H \triangleleft M$ 得 $H \triangleleft M$, 从而 $M \leq N_G(H)$.

若 $M = N_G(H)$, 由 $K_1 \leq N_G(H)$ 得 $K_1 \leq M$, 即 $H < K_1 \leq M$. 由 $H \triangleleft M$ 得 $K_1 = M$. 又由 M 的极大性可知不存在 K_2, \dots, K_t , 即 $N < K_1 = M \triangleleft G$.

若 $M < N_G(H)$, 由 M 的极大性可得 $N_G(H) = G$, 则 $H \triangleleft G$.

引理 8 设 G 是一个群, $\pi(G) = \{p, q\} (p \neq q)$, P 是 G 的 Sylow p -子群, Q 为 G 的 Sylow q -子群. 如果 P 是 G 的唯一极小正规子群, 且 $|Q| = q$. 则 G 为内交换群.

证明 显然 G 可解, 所以对任意的 $A \triangleleft G$, 有 $|G:A| = q$ 或 p^i . 若 $|G:A| = p^i, i \geq 1$. 因为 $P \in \text{Syl}_p(G)$, 所以 $P \trianglelefteq A$, 故 $G = PA$. 由 P 为可解的极小正规子群可知 P 是交换群, 从而 $P \cap A \triangleleft P$, 又因为 A 正规化 P , 所以 $P \cap A \triangleleft A$, 从而 $P \cap A \triangleleft G$. 因为 $P \trianglelefteq A$ 且 P 的唯一极小正规性知 $P \cap A = 1$. 又因 $G = PQ$, 所以 $|A| = |Q|$. 从而 G 的极大子群要么是 P 要么是 q 阶的循环群, 于是 G 的所有真子群都是交换的, 则 G 为内交换群.

引理 9^[9] 设 A 是 G 的半正规子群, 则

- (1) 如果 $A \leq H \leq G$, 那么 A 是 H 的半正规子群;
- (2) 如果 $N \triangleleft G$, 那么 AN/N 是 G/N 的半正规子群.

引理 10^[3] 若 $H <_{c-p} G$, 则任意的 $N \triangleleft G$, 有 $HN/N <_{c-p} G/N$.

引理 11 设 G 是一个群, 如果 G 的 2-极大子群在 G 中共轭置换或半正规, 对于任意的 $N \triangleleft G$, 则 G/N 的 2-极大子群在 G/N 中共轭置换或半正规.

证明 设 $M/N \triangleleft G/N$, 则 $M \triangleleft G$. 否则, 必存在 $M < M'$ 使得 $M' \triangleleft G$. 因为 $N \leq M < M'$, 故 $M/N < M'/N < G/N$, 此与 $M/N \triangleleft G/N$ 矛盾. 所以 $M \triangleleft G$. 设 $M_1/N \triangleleft M/N$, 则 $M_1 \triangleleft M$, 于是 M_1 是 G 的 2-极大子群. 由题设条件可知 M_1 在 G 中共轭置换或者半正规, 又由引理 9 及引理 10 可知 M_1/N 在 G/N 中共轭置换或半正规, 所以 G/N 的 2-极大子群在 G/N 中共轭置换或半正规.

2 主要结果

在证明主要结果之前, 我们需要下面的命题.

命题 1 设群 G 的 2-极大子群在 G 中共轭置换, 且 G 的任何截断均不同构于内交换群, 则 G 超可解.

证明 假设 G 为极小阶反例, 由引理 11 可知定理条件商群遗传, 因此我们可以假设 $\Phi(G) = 1$.

- (1) $G = PQ, P \triangleleft G, Q$ 为循环群, 其中 $P \in \text{Syl}_p(G), Q \in \text{Syl}_q(G)$.

由引理 2 可知 G 的极大子群都是幂零的, 从而 G 是内幕零群. 则 $G = PQ, P \triangleleft G, Q$ 为循环群, 其中 $P \in \text{Syl}_p(G), Q \in \text{Syl}_q(G)$.

- (2) G 有唯一的极小正规子群 N , 满足 $N = P = F(G) = C_G(N)$.

设 N 是 G 的极小正规子群, 由 (1) 可知 N 为初等交换群. 事实上, N 是 G 唯一的极小正规子群. 否则, 若 G 还有另一极小正规子群 N^* , 由引理 11 可知 G/N 与 G/N^* 超可解, 所以 $G/N \cap N^* \leq G/N \times G/N^*$ 超可解. 又因为 $N \cap N^* = 1$, 所以 G 超可解, 矛盾. 所以 N 是唯一极小正规子群. 由 N 的唯一极小正规性及引理 5 得 $F(G) = N$. 由步骤 (1) 中 $P \triangleleft G$ 可知 $P \leq F(G) = N$, 又因为 N 为素数幂阶群, 所以 $P = N$. 由 G 可解可得 $C_G(F(G)) \leq F(G)$, 即 $C_G(N) \leq N$, 再由 N 初等交换可知 $N \leq C_G(N)$, 于是 $C_G(N) = N$. 所以 $N = P = F(G) = C_G(N)$.

- (3) Q 为 G 的极大子群, 且 Q 为素数阶群.

证明如下.

(3.1) Q 为 G 的极大子群.

假设 Q 不是 G 的极大子群,则存在 $M \triangleleft G$ 使得 $Q < M$,所以存在 $L \triangleleft M$ 使得 $Q \leq L \triangleleft M$. 因为 M 为幂零群,所以 $Q \triangleleft L$. 又因为 $L <_{-p} G$, 所以 $L \triangleleft \triangleleft G$,从而 $Q \triangleleft \triangleleft G$. 由于 $Q \in \text{Syl}_q(G)$, 所以 $Q \triangleleft G$,从而 $Q \leq C_G(P) = C_G(N) = N$, 矛盾.

(3.2) Q 为素数阶群.

否则,存在 $1 < Q_2 \triangleleft Q$,由题设条件知 $Q_2 <_{-p} G$. 由引理 1 知 Q_2^G 为 q -群, 所以 $Q_2^G P = Q_2^G \times P$,故 $Q_2^G \leq C_G(P) = C_G(N) = N$, 矛盾. 所以 $Q_2 = 1$, 即 Q 为素数阶群.

(4) 最终的矛盾.

由以上讨论知 $G = PQ$ 且 $|G| = p^a q$. 由引理 8 知 G 为内交换群, 此与假设矛盾.

定理 1 设 G 是一个群,若群 G 的极大子群均在 G 中共轭置换或半正规,则 G 超可解.

证明 假设 G 为极小阶反例,证明如下.

(1) G 中至少存在两个极大子群 S, T 使得 $S \neq T$ 且 $S > 1, T > 1$ 满足 S 在 G 中共轭置换(或半正规), T 在 G 中半正规(或共轭置换).

如果 G 的极大子群均在 G 中共轭置换,由引理 2 可知 G 幂零,显然 G 也是超可解的,矛盾. 若 G 的极大子群均在 G 中半正规,由引理 3 可知 G 超可解,矛盾. 若 G 的极大子群均为 1, 则 G 为素数阶群,从而 G 超可解,矛盾. 所以 G 中至少存在两个极大子群 S, T 使得 $S \neq T$ 且 $S > 1, T > 1$ 满足 S 在 G 中共轭置换(或半正规), T 在 G 中半正规(或共轭置换).

(2) 对于任意 $M \triangleleft G$, $|G : M|$ 为素数.

由步骤(1)知 $M > 1$, 下面分两种情形进行讨论:

情形 1 M 在 G 中共轭置换.

因为 M 在 G 中共轭置换,所以 $M \triangleleft \triangleleft G$,由 M 的极大性可知 $M \triangleleft G$. 由 M 的极大性可知 G/M 没有非平凡的子群,所以 $|G : M|$ 为素数.

情形 2 M 在 G 中半正规.

因 M 在 G 中半正规,所以存在一个子群 B 使得 $G = MB$. 设 p 是 $|G : M|$ 的一个素因子,因为 $|G : M| = |MB : M| = \frac{|B|}{|B \cap M|}$, 所以 p 也是 $|B|$ 的一个素因子. 事实上,必存在一个 p -元 x 使得 $x \in B$ 但 $x \notin M$. 否则, M 必包含 G 的某个 Sylow 子群,这与 p 是 $|G : M|$ 的一个素因子矛盾.

下面证 $B = \langle x \rangle$, 否则 $\langle x \rangle < B$. 因为 M 是半正规的, $B \in S_G(M)$, 所以 $M \langle x \rangle < G$. 由 $x \in M$ 可知 $M < M \langle x \rangle$, 则此与 M 的极大性矛盾. 所以 $B = \langle x \rangle$, 从而 $G = M \langle x \rangle$.

我们也可以断定 $M \cap B \triangleleft B$. 一方面, 因为 $x \in M$, 所以 $M \cap B < B$, 从而存在 $B_1 \triangleleft B$ 使得 $M \cap B \leq B_1$. 另一方面, 由于 M 半正规可知 $MB_1 < G$. 由 $M \leq MB_1$ 及 M 的极大性可知 $M = MB_1$, 从而 $B_1 \leq M$, 故 $B_1 \leq M \cap B$. 综合这两方面可知 $M \cap B = B_1 \triangleleft B$. 因为 B 为 p -群, 所以 $|B : M \cap B| = p$, 从而 $|G : M| = |MB : M| = |B : M \cap B| = p$.

综上所述,对于 G 的任一极大子群 M , 有 $|G : M|$ 为素数, 故 G 超可解, 矛盾.

定理 2 设群 G 的 2-极大子群在 G 中共轭置换或半正规, 且 G 的任何截断均不同构于内交换群. 则 G 超可解.

证明 假设 G 为极小阶反例, 由定理 1 知 G 的任一极大子群超可解, 故 G 内超可解(从而 G 是可解群). 由引理 11 知定理条件商群遗传, 因此我们假设 $\Phi(G) = 1$.

(1) G 中至少存在两个 2-极大子群 S_1, T_1 使得 $S_1 \neq T_1$ 且 $S_1 > 1, T_1 > 1$, 满足 S_1 在 G 中共轭置换(或半正规), T_1 在 G 中半正规(或共轭置换).

若 G 的 2-极大子群均在 G 中共轭置换, 由命题 1 知 G 超可解, 矛盾. 如果 G 的 2-极大子群均在 G 中半正规, 由引理 4 知 G 超可解, 矛盾. 如果 G 的 2-极大子群均为 1, 则 G 的极大子群均为素数阶循环群, 所以 G 要么是素数幂阶群要么是素数阶 Sylow 子群的乘积, 故 G 超可解, 矛盾. 所以 G 中至少存在两个 2-极大子

群 S_1, T_1 使得 $S_1 \leq T_1$ 且 $S_1 > 1, T_1 > 1$, 满足 S_1 在 G 中共轭置换(或半正规), T_1 在 G 中半正规(或共轭置换).

(2) G 有唯一极小正规子群 N , 使得 $G = N \rtimes M, M \triangleleft G$, 且 $N = F(G) = C_G(N)$.

证明如下.

(2.1) G 有唯一极小正规子群 N 且 $N = F(G) = C_G(N)$.

设 N 是 G 的极小正规子群, 由 G 的可解性可得 N 为初等交换群. 事实上, N 是 G 唯一的极小正规子群. 否则, 若 G 还有另一极小正规子群 N^* , 由 G/N 与 G/N^* 满足定理条件可得 G/N 与 G/N^* 超可解, 故 $G/N \cap N^* \cong G/N \times G/N^*$ 超可解. 又因为 $N \cap N^* = 1$, 所以 G 超可解, 矛盾.

由 N 的唯一极小正规性及引理 5 得 $F(G) = N$. 由 G 的可解性可知 $C_G(F(G)) \leq F(G)$. 因为 N 初等交换, 则 $N \leq C_G(N) = C_G(F(G)) \leq F(G)$. 又因为 $F(G) = N$, 所以 $N = F(G) = C_G(N)$.

(2.2) $G = N \rtimes M$, 其中 $M \triangleleft G$.

由 $\Phi(G) = 1$ 可得存在 $M \triangleleft G$ 使得 $N \not\leq M$, 因此 $G = NM$. 因为 N 是交换的, 所以 $N \cap M \triangleleft N$, 又因为 M 正规化 N , 所以 $N \cap M \triangleleft M$, 于是 $N \cap M \triangleleft NM = G$. 而 $N \not\leq N \cap M$, 由 N 的唯一极小正规性得 $N \cap M = 1$, 所以 $G = N \rtimes M$.

(3) 设 N 为 p -群, 则 p 为 $|G|$ 的最大素因子.

否则, 存在 $|G|$ 的某个素因子 q 使得 $q > p$. 取 M 的 q 阶子群 Q , 由 (2) 中 $N \triangleleft G$ 可知 $NQ \leq G$. 我们考虑子群 NQ .

如果 $NQ = G$, 由 (2) 知 N 为 G 唯一的极小正规子群, 从而 G 满足引理 8 的条件, 于是 G 为内交换群, 这与定理假设矛盾. 所以 $NQ < G$.

由 G 内超可解可知 NQ 超可解, 又因为 $q > p$, 所以 $Q \triangleleft NQ$. 故 $NQ = N \times Q$, 进而 $Q \leq C_G(N) = N$, 与 (2) 矛盾. 因此, p 为 $|G|$ 的最大素因子.

(4) N 为 G 的 Sylow p -子群.

设 P 是群 G 的一个 Sylow p -子群, 由 (3) 知 $N \leq P$. 若 $N < P$, 由 (2) 中 $G = NM$ 可知 p 整除 $|M|$. 设 $M_p \in \text{Syl}_p(M)$, 由 G 内超可解知 M 超可解, 结合 (3) 中的 p 为 $|G|$ 的最大素因子, 所以 $M_p \triangleleft M$. 我们分以下步骤进行证明:

(4.1) 必存在子群 $H \triangleleft M$ 使得 $|M:H| = p$, 特别地, $H > 1$.

否则, 对任意的 $H \triangleleft M$, 由 G 内超可解可知 M 是超可解群, 所以 $|M:H|$ 是一个不等于 p 的素数, 从而 $M_p \leq H$. 由 H 的任意性及 M_p 的正规性可知 $M_p \leq \Phi(M)$, 矛盾. 故必存在子群 $H \triangleleft M$ 满足 $|M:H| = p$.

如果 $H = 1$, 则 $|M| = p$, 由 (2) 中 $G = NM$ 及 (3) 中 N 为 p -群可知 G 为 p -群, 从而 G 超可解, 矛盾. 因此可以假设 $H > 1$.

(4.2) H 在 G 中半正规, 对于 $D \in S_G(H)$, 可以假设 D 为 p -群.

由 (4.1) 知 H 为 G 的 2-极大子群, 由题设可知 H 在 G 中或共轭置换或半正规. 如果 $H <_{c-p}(G)$, 由引理 7 可知 $M \triangleleft G$ 或者 $H \triangleleft G$. 如果 $M \triangleleft G$, 则 $G = N \times M$, 所以 $M \leq C_G(N) = N$, 与 (2) 矛盾. 如果 $H \triangleleft G$, 则 $HN = H \times N$, 所以 $H \leq C_G(N) = N$, 与 (2) 矛盾. 所以 H 在 G 中半正规.

设 $D \in S_G(H)$, 则 $G = HD$. 设 $P \in \text{Syl}_p(G)$, 则由引理 6 可知存在 $H_p \in \text{Syl}_p(H), D_p \in \text{Syl}_p(D)$ 使得 $P = H_p D_p$. 可以断定 D 为 p -群, 若否, 我们有 $D_p < D$, 由 H 半正规可知 $HD_p < G$. 考虑子群 HD_p , 一方面, $P = H_p D_p \leq HD_p$, 即 HD_p 包含 G 的 Sylow p -子群. 另一方面, 由 (2) 中 $G = NM$ 及 (4.1) 中 $|M:H| = p$ 可知 $|G:H| = |G:M| \cdot |M:H| = |N| \cdot p$. 又由 (3) 可知 N 为 p -群, 于是 H 包含 G 的 p' -Hall 子群, 从而 HD_p 包含 G 的 p' -Hall 子群. 综合可得 $G = HD_p$, 与 $HD_p < G$ 矛盾. 所以 D 为 p -群.

(4.3) $|N| = p$.

因为 $H \triangleleft M \triangleleft G$ 及 (4.2) 中 $G = HD$, 所以 $D \not\leq M$, 于是 $M \cap D < D$. 从而存在 $D_1 \triangleleft D$ 使得 $M \cap D \leq D_1$, 所以 $M = M \cap G = M \cap HD = H(M \cap D) \leq HD_1$. 又因为 H 是半正规的, 且 $D_1 \triangleleft D$, 所以 $HD_1 < G$, 从而 $M \leq HD_1 < G$. 由 M 的极大性可得 $M = HD_1$.

由于(2)中的 $G = NM$ 且 $N \cap M = 1$, 所以 $1 < |N| = |G : M| = |HD : HD_1| = \frac{|D|}{|H \cap D|} \cdot \frac{|H \cap D_1|}{|D_1|} = \frac{|D|}{|D_1|} \cdot \frac{|H \cap D_1|}{|H \cap D|}$. 因为 $D_1 \triangleleft D$ 且 D 为 p -群, 所以 $\frac{|D|}{|D_1|} = p$. 由于 $|H \cap D_1| \leq |H \cap D|$, 所以 $|N| = p$.

(4.4) 最终的结论.

由 G/N 超可解及(4.3)可知 G 超可解, 矛盾, 从而 N 为 G 的 Sylow p -子群.

(5) 设 $A \triangleleft M$, 则 $A > 1$, 并且 A 在 G 中半正规. 特别地, 对于 $B \in S_G(A)$, 有 $B = RN$, $B < G$ 且 $M = AR$, 其中 $R \in \text{Syl}_r(B)$.

具体的证明如下.

(5.1) 设 $A \triangleleft M$, 则 $A > 1$.

若 $A = 1$, 由 $A \triangleleft M$ 可知 M 为素数阶循环群, 则 $(|M|, p) = 1$. 否则, M 为 p -群, 由(2)中 $G = MN$ 及(3)中 N 为 p -群可知 G 为 p -群, 于是 G 超可解, 矛盾. 不妨设 $|M| = q$ 且 $(q, p) = 1$, 所以 $|G| = p^n q$ (n 为正整数且 $n \geq 1$), 从而由(2), (4) 及引理 8 可知 G 是内交换群, 矛盾. 所以 $A > 1$.

(5.2) A 在 G 中半正规.

否则, 由定理假设可知 A 在 G 中共轭置换. 由引理 7 可知 $M \triangleleft G$ 或 $A \triangleleft G$. 若 $M \triangleleft G$, 则 $G = N \times M$, 所以 $M \leq C_G(N) = N$, 与(2)矛盾. 若 $A \triangleleft G$, 则 $NA = N \times A$, 所以 $A \leq C_G(N) = N$, 与(2)矛盾. 所以 A 在 G 中半正规.

(5.3) 设 $B \in S_G(A)$, 下面证明 $B = RN$, 且 $M = AR$, 其中 $R \in \text{Syl}_r(B)$ 且 $r \neq p$.

由 M 超可解及假设 $A \triangleleft M$ 可知 $|M : A| = r$, 其中 r 为 $|G|$ 的某一素因子. 由(2)和(4)可知 $G = NM$, $N \cap M = 1$ 且 $N \in \text{Syl}_p(G)$, 所以 M 为 G 的 p' -Hall 子群, 则 $|M : A|$ 为一个 p' -数, 从而 $r \neq p$.

又因为 $A \triangleleft M$, 且 M 为 p' -群, 所以 A 为 p' -群. 又由(5.2)中 A 在 G 中半正规且 $B \in S_G(A)$ 可知 $G = AB$, 从而 $N \leq B$.

一方面, $|G : A| = |G : M| \cdot |M : A| = |N| \cdot r$. 另一方面, $|G : A| = |AB : A| = \frac{|B|}{|A \cap B|}$, 故 $|N| \cdot r = \frac{|B|}{|A \cap B|}$, 从而 r 整除 $|B|$. 设 $R \in \text{Syl}_r(B)$, 由 $N \leq B$ 及(2)中 $N \triangleleft G$ 知 $N \triangleleft B$, 所以 $RN \leq B$. 下面证 $B = RN$.

如果 $RN < B$, 因为 A 是半正规的, $B \in S_G(A)$, $R \in \text{Syl}_r(B)$, 所以 $AR < G$. 又因为 $AR \cap B = (A \cap B)R$, 所以 $(A \cap B)R \leq B$. 由 $N \leq B$ 及(2)中 $N \triangleleft G$ 知 $N \triangleleft B$, 所以 $(A \cap B)RN \leq B$. 注意到 $\frac{|B|}{|A \cap B|} = |N| \cdot r$, 由(4)中 $N \in \text{Syl}_p(G)$ 及 $R \in \text{Syl}_r(B)$ 可知 $B = (A \cap B)RN$, 从而 $AB = A(A \cap B)RN = ARN$. 由假设 $RN < B$ 及 A 是半正规的可知 $ARN < G$, 从而 $AB < G$, 此与(5)中 $B \in S_G(A)$ 矛盾.

下面证明 $M = AR$. 由(5.3)中 $r \neq p$ 且 $B = RN$ 可得 $R < B$, 结合 A 是半正规的及 $B \in S_G(A)$ 可知 $AR < G$. 因为 $G = AB$, 且 $B = RN$, 于是 $G = ARN$, 从而 $|G : N| = \frac{|AR|}{|AR \cap N|}$. 由(5.2)中 A 为 p' -群及 $r \neq p$ 可知 AR 为 p' -群, 所以 $AR \cap N = 1$, 即 $|G : N| = |AR|$. 又由(4)中 $N \in \text{Syl}_p(G)$ 可知 AR 是 G 的 p' -Hall 子群, 从而由 G 的可解性可知 AR 与 M 共轭, 我们不妨设 $M = AR$.

(5.4) B 为 G 的真子群.

否则, 我们假设 $B = G$. 因为(5.2)中 A 是半正规的, 对于任意的 $M \triangleleft G$, 有 $AM < G$. 由 $M \leq AM$ 及 M 的极大性可知 $M = AM$, 从而 $A \leq M$, 因此 $A \leq \Phi(G) = 1$, 与(5)中 $A > 1$ 矛盾, 所以 $B < G$.

(6) 最终的矛盾.

由 G 内超可解可知 B 超可解, 又由(5)中 $B = RN$ 可知存在 B 的正规 p -子群 P_B 使得 $|N : P_B| = p$. 由 $|RN : RP_B| = p$ 可知 $RP_B < RN = B$. 又因为 A 是半正规的且 $B \in S_G(A)$, 于是 $ARP_B < G$, 结合(5)中 $M = AR$ 可知 $M \leq ARP_B < G$, 从而由 M 的极大性可知 $M = ARP_B$, 故 $P_B \leq M$. 又由(5)中 M 为 p' -群

可知 $P_B = 1$, 于是由 $|N : P_B| = p$ 可知 $|N| = p$, 由 G/N 超可解可得 G 超可解, 矛盾.

参 考 文 献

- [1] Foguel T. Conjugate permutable subgroups[J]. J Algebra, 1993, 191(1): 235-239.
- [2] 陈顺民, 陈贵云. 共轭置换子群与有限群的可解性[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2008, 30(5): 443-447.
- [3] 裴旭莲, 钟祥贵. 共轭置换子群与群的幂零性[J]. 广西师范大学学报: 自然科学版, 2007, 25(3): 28-31.
- [4] 张勤海, 赵俊英. 超可解群的若干充分条件[J]. 数学杂志, 2005, 25(4): 399-404.
- [5] 陈瑞芳, 陈贵云. 一些特殊子群与有限群的性质[J]. 西南师范大学学报: 自然科学版, 2010, 35(5): 5-8.
- [6] Murashka V I. On partially conjugate permutable subgroups of finite groups[J]. Probl Mat Tech, 2013, 14(1): 74-78.
- [7] Shen Z C, Li S R, Liu J J, et al. Finite Groups All of Whose Second Maximal Subgroups Are PSC*-Groups[J]. J Math Res Appl, 2009, 29(4): 615-622.
- [8] Guo W B. Finite Groups with Seminormal Sylow Subgroups[J]. Acta Math Sinica, 2008, 24(10): 1751-1757.
- [9] 苏向盈. 有限群的半正规子群[J]. 数学杂志, 1988, 8(1): 5-10.
- [10] 徐明曜. 有限群导引(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [11] Huppert B, Blackburn N. Finite Groups[M]. New York: Springer, 1982.

Semi-normal, Conjugate-permutable and Supersolvability of Finite Groups

ZHAO Xianhe, WANG Yanli

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxing 453007, China)

Abstract: This paper investigates the supersolvability of the finite group G . Combine the concepts of semi-normal subgroups and conjugate-permutable subgroups, we get some sufficient conditions for supersolvability of the group G , which is based on that the maximal subgroups(2-maximal subgroups) of a group G are either conjugate-permutable or semi-normal.

Keywords: conjugate-permutable subgroups; supersolvable groups; semi-normal subgroups