第 43 卷 第 4 期 河南师范大学学报(自然科学版) Vol.43 No.4
2015 年 7 月 Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition) Jul. 2015

文章编号:1000-2367(2015)04-0026-05 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2015.04.005

多元马氏模型下的 Phase-Type 分布及其数学期望

邢灵博,杨其强

(琼州学院 理工学院,海南 三亚 572022)

摘 要:在多元马尔可夫模型下研究了 Phase-Type 分布. 根据多元马氏模型状态的转移特征,在确定模型中各随机序列的瞬时状态集转移到吸收态集的首达时间的条件下,结合传统 Phase-Type 分布的定义,提出多元马氏模型下 Phase-Type 分布的概念,并给出该分布的分布列和数学期望.

关键词:多元马氏模型; Phase-Type 分布; 数学期望

中图分类号:O211.62 **文献标志码**:A

传统马尔可夫模型在教学评价、居民收入预测分析等研究领域得到广泛的应用[1-2]. 然而,若设 $p_{ij}^{(n)}=P\{X_{n+m}=j\mid X_m=i\}$ 为马氏链 $\{X_n,n\in T,n>1\}$ 的 n 阶转移概率,其状态集 $\boldsymbol{I}$ 含有 m 个元素,则 $p_{ij}^{(n)}=\sum\limits_{i_1\in I}\cdots\sum\limits_{i_{n-1}\in I}p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}j}$,模型中所涉及的参数多达 $(m-1)m^n$ 个. 显然,在传统的模型下计算 n 阶转移概率的过程比较繁杂,文献[3-5]为了简化计算过程,提出了一个新的高阶马氏模型:$p_{ij}^{(n)}=P\{X_{n+m}=j\mid X_m=i\}=\sum\limits_{l=1}^{n}\lambda_l q_{ji_l}$,其中 $\sum\limits_{l=1}^{n}\lambda_l=1,\lambda_l\geq 0,Q=(q_{ji})_{m\times m}$ 为非负定矩阵且满足列向量元素之和等于 1. Ching 等[6]在此理论基础上,提出了具有更一般化的多元马尔可夫链. 邢灵博等[7]在多元马氏链的理论基础上,给出了多元马氏模型的常返性、遍历性和周期性等基本概念,在对其状态进行分类的同时,提出了多元马氏模型下的切普曼-柯尔莫哥洛夫方程,并利用该方程研究了状态之间的关系. 多元马尔可夫链是最近兴起的研究领域,是预测方法的重要理论工具之一,其理论成果已广泛应用到库存优化控制[8]、天气预报[9]、风险管理[10]、基因工程[11]等诸多领域. 然而,近年来国内外学者对多元马氏链的研究成果主要体现在应用方面,Phase-Type 分布作为马氏链的核心理论之一,尚未有学者在多元化的条件下对其进行研究. 为此,本文在多元马氏理论的基础上,给出 Phase-Type 分布的定义并对其相关理论进行初步研究.

1 多元马氏模型下的 Phase-Type 分布

1.1 多元马氏模型

引理 1 (i)设 $\boldsymbol{P}^{(nm)}$ 表示第 n 序列的状态到第 m 序列状态的转移概率矩阵且 $\boldsymbol{P}^{(nm)}$ 为不可约的;(ii)$X_k=(X_k^{(1)},X_k^{(2)},\cdots,X_k^{(N)})^{\mathrm{T}}$ 为多元马氏链中各种序列于第 k 阶段的状态的概率分布其中 $X_k^{(n)}(n=1,\cdots,N)$ 表示第 n 序列于第 k 阶段的状态的概率分布则存在

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_{11}&\lambda_{12}&\cdots&\lambda_{1N}\\\lambda_{21}&\lambda_{22}&\cdots&\lambda_{2N}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda_{N1}&\lambda_{N2}&\cdots&\lambda_{NN}\end{pmatrix}\text{其中}\sum_{n=1}^{N}\lambda_{mn}=1,\lambda_{mn}\geq 0,\text{使得 }X_{k+1}=AX_k\text{ 这里 }A=\begin{pmatrix}\lambda_{11}P^{(11)}&\lambda_{12}P^{(12)}&\cdots&\lambda_{1N}P^{(1N)}\\\lambda_{21}P^{(21)}&\lambda_{22}P^{(22)}&\cdots&\lambda_{2N}P^{(2N)}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda_{N1}P^{(N1)}&\lambda_{N2}P^{(N2)}&\cdots&\lambda_{NN}P^{(NN)}\end{pmatrix}$$

收稿日期:2015-01-03;修回日期:2015-06-11.

基金项目:海南省自然科学基金(20151008;113008);琼州学院校级青年科学基金项目(QYQN201446).

作者简介(通信作者):邢灵博(1982—),女,河南内乡人,琼州学院讲师,研究方向为马氏决策优化,E-mail:xinglingbo1982@qq.com.

λ_{mn} 为概率分布 $X_k^{(m)}$ 与 $X_{k+1}^{(n)}$ 的关系权数 $m,n=1,2,\cdots,N$.（引理 1 的证明过程和参数矩阵 A 的求解详见文献[12]）.

定义 1　在满足引理 1 的条件下，称 $X_{k+1}=AX_k$ 为一阶多元马尔可夫模型.

多元马氏模型作为传统一元马氏链的多元化拓展性理论，其自身具有独特的优越性，比如通过多元马氏模型可以深入挖掘不同数据序列之间的内在关联性. 事实上，由 $X_{k+1}=AX_k$ 可知，第 m 序列于第 $k+1$ 阶段状态的概率分布为：$X_{k+1}^{(m)}=\sum_{n=1}^{N}\lambda_{mn}P^{(mn)}X_k^{(n)}$. 由此可见，$\lambda_{mn}$ 作为关系权数度量了概率分布 $X_{k+1}^{(m)}$ 与 $X_k^{(n)}$ 的关系. 因此，多元马氏模型不但给出各序列的状态在下阶段的概率分布，同时还进一步表明了其状态概率分布间的关系.

定义 2　设 $P_k^{(mn)}$ 表示由第 n 序列的状态于第 k 阶段转到第 m 序列的状态的转移概率矩阵，$X_{r+1}^{(m)}$ 为第 m 序列历经 K 个阶段后到达第 $r+1$ 阶段状态的概率分布，若存在 $\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\lambda_{mn}^{(k)}$（其中 $\lambda_{mn}^{(k)}\geq 0;m,n=1,2,\cdots,N$），使得

$$X_{r+1}^{(m)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\lambda_{mn}^{(k)}P_k^{(mn)}X_{r-k+1}^{(n)},r=K-1,K,\cdots. \tag{1}$$

则称之为 K 阶 N 元马尔可夫模型[13].

若令 $X_{r+1}^{(m)}=[(X_r^{(m)})^{\mathrm{T}},(X_{r-1}^{(m)})^{\mathrm{T}},\cdots,(X_{r-K+1}^{(m)})^{T}]^{\mathrm{T}},m=1,2,\cdots,N$，则可将 K 阶多元马尔可夫模型写成矩阵的形式即：

$$X_{r+1}=\begin{pmatrix}X_{r+1}^{(1)}\\X_{r+1}^{(2)}\\\vdots\\X_{r+1}^{(N)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B^{(11)}&B^{(12)}&\cdots&B^{(1N)}\\B^{(21)}&B^{(22)}&\cdots&B^{(2N)}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\B^{(N1)}&B^{(N2)}&\cdots&B^{(NN)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_r^{(1)}\\X_r^{(2)}\\\vdots\\X_r^{(N)}\end{pmatrix}=QX_r, \tag{2}$$

其中

$$B^{(mn)}=\begin{pmatrix}\lambda_{mn}^{(1)}P_1^{(mn)}&\lambda_{mn}^{(2)}P_2^{(mn)}&\cdots&\lambda_{mn}^{(K-1)}P_{K-1}^{(mn)}&\lambda_{mn}^{(K)}P_K^{(mn)}\\I&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&I&0\end{pmatrix}_{LK\times LK};Q=\begin{pmatrix}B^{(11)}&B^{(12)}&\cdots&B^{(1N)}\\B^{(21)}&B^{(22)}&\cdots&B^{(2N)}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\B^{(N1)}&B^{(N2)}&\cdots&B^{(NN)}\end{pmatrix},$$

L,K 分别表示状态集所包含元素的个数和系统的阶数，I 为单位矩阵；而当 $m\neq n$ 时，

$$B^{(mn)}=\begin{pmatrix}\lambda_{mn}^{(1)}P_1^{(mn)}&\lambda_{mn}^{(2)}P_2^{(mn)}&\cdots&\lambda_{mn}^{(K-1)}P_{K-1}^{(mn)}&\lambda_{mn}^{(K)}P_K^{(mn)}\\0&0&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}_{LK\times LK}.$$

1.2　传统马氏链下 Phase-Type 分布

在现代生产运作、库存管理、物理与工程技术管理过程中，往往会涉及到如何确定系统的瞬时状态首达吸收态时间的概率分布问题即 Phase-Type 分布问题. 下面在传统（一元）马氏链的条件下?介绍 Phase-Type 分布的定义.

定义 3　设 $\{X_n, n\geq 0\}$ 为一元马氏链状态空间 $S=\{S_0\cup S_1\}$ 有限 $S_0=\{0\}$ 为吸收状态集 $S_1=\{1,2,\cdots,s\}$ 为瞬时状态集其一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}P_1&P_0\\0&1\end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中 P_1 为瞬时状态集的一步转移概率，$P_0=(I-P_1)e,e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 为 s 维的单位列向量记 $\tau=\inf\{n:n\geq 0,X_n\in S_0\}$，则称 τ 为该随机过程从瞬时状态集到吸收状态集的首达时间并称其分布为 Phase-Type 分布[14]（简称为 PH 分布）.

引理 2[14]　设 $d_k=P(\tau=k)$，则对于 $\forall k\geq 1$，有：$d_k=\beta P_1^{k-1}(I-P_1)e$.

1.3 多元马氏模型下 Phase-Type 分布的定义

多元马氏链的显著特征之一是系统的状态可以在不同的随机序列之间产生相互转移,这导致了其相应的 Phase-Type 分布会复杂一些.下面主要是结合一元马氏链下的 Phase-Type 分布的概念,给出多元马氏模型下的 Phase-Type 分布的定义.

定义 4 设 $X_{k+1}=AX_k$ 为多元马氏模型$\{X_k^{(m)}, k\geq 0\}$为其第 m 随机序列$(2\leq m\leq N)$状态空间 $S^{(mn)}=\{S_0^{(mn)}\cup S_1^{(mn)}\}$有限,$S_0^{(mn)}=\{0\}$为由第 n 序列的状态转移到第 m 序列的吸收状态集,$S_1^{(mn)}=\{1,2,\cdots,s\}$为其相应的瞬时状态集且其一步转移概率矩阵为:

$$P_1^{(mn)}=\begin{pmatrix}P_{11}^{(mn)} & P_{01}^{(mn)}\\ 0 & 1\end{pmatrix},\tag{4}$$

其中 $P_{11}^{(mn)}$ 为从第 n 序列的状态转移到第 m 序列的瞬时状态集的一步转移概率 $P_{01}^{(mn)}=(I-P_{11}^{(mn)})e,e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 为 s 维的单位列向量记 $\tau^{(mn)}=\inf\{k:k\geq 0,X_k^{(mn)}\in S_0^{(mn)}\}$ 则称 $\tau^{(mn)}$ 为从第 n 序列的瞬时状态集转移到第 m 序列的吸收状态集的首达时间并称其分布为多元马氏模型下的 Phase-Type 分布.为了区别于一元模型下的 Phase-Type 分布,将其简记为 M-PH 分布.

显然,多元马氏模型下的 Phase-Type 分布与传统模型下的定义具有明显的区别,即传统的 Phase-Type 分布只考虑本链内瞬时状态集转移到吸收状态集的首达时间的问题,而 M-PH 分布则兼顾考虑了本链内瞬时状态集转移到其他链的吸收状态集的首达时间的分布情形.事实上,由 M-PH 分布的定义,易知当 $m=n$ 时,M-PH 分布与传统的分布一样,只考虑本链内的首达时间的分布;而当 $m\neq n$ 时,首达时间的分布指的是从第 n 序列的瞬时状态集转移到第 m 序列的吸收状态集的分布因此两者的分布状况也有一定的区别.

2 主要结果

2.1 M-PH 分布列

设多元马氏模型的 t 步转移概率矩阵为:$P_t^{(mn)}=\begin{pmatrix}P_{1t}^{(mn)} & P_{0t}^{(mn)}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,其中 $P_{1t}^{(mn)}$ 为从第 n 序列的状态转移到第 m 序列的瞬时状态集的 t 步转移概率,$P_{0t}^{(mn)}=(I-P_{1t}^{(mn)})e,e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 为 s 维的单位列向量其中 $m,n=1,2,\cdots,N$.

定理 1 记 $\pi_i(0)=(\beta_0,\beta)$ 为多元马尔可夫模型的第 i 序列的初始状态的概率分布,其中 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$ 为瞬时状态的初始概率分布,则从第 i 序列的瞬时状态集转移到第 j 序列的吸收状态集的首达时间的分布列为:

$$P(\tau^{(ji)}=t)=\beta[P_{11}^{(ji)}]^{t-1}(I-P_{11}^{(ji)})e,\tag{5}$$

其中 $P_{11}^{(ji)}$ 满足:$X_{k+1}^{(j)}=\sum\limits_{n\neq i}\lambda_{jn}P_1^{(jn)}X_k^{(n)}+\lambda_{ji}\begin{pmatrix}P_{11}^{(ji)} & P_{01}^{(ji)}\\ 0 & 1\end{pmatrix}X_k^{(i)}$,而$[P_{11}^{(ji)}]^{t-1}$ 满足:$[P_{11}^{(ji)}]^{t-1}=P_{1(t-1)}^{(ji)}$,同时,有

$$X_{r+1}^{(j)}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{t-2}\left(\lambda_{jn}^{(k)}P_k^{(jn)}X_{r-k+1}^{(n)}+\sum_{n\neq i}\lambda_{jn}^{(t-1)}P_{t-1}^{(jn)}X_{r-t}^{(n)}\right)+\lambda_{ji}^{(t-1)}\begin{pmatrix}P_{1(t-1)}^{(ji)} & P_{0(t-1)}^{(ji)}\\ 0 & 1\end{pmatrix}X_{r-t}^{(i)}.$$

证明 设$\{X_k^{(i)}, k\geq 0\}$为多元马氏模型的第 i 随机序列,当其由瞬时状态集历经 t 步后首达第 j 序列的吸收状态集的样本路径为$\{i_0,i_1,\cdots,i_t\}$.根据多元马氏模型的状态转移特征可知$\{i_0,i_1,\cdots,i_t\}$为满足马氏性的随机序列,即可视为一元马氏链.因此,由引理 2 可得 $P(\tau^{(ji)}=t)=\beta[P_1^{(ji)}]^{t-1}(I-P_1^{(ji)})e$.因为 $P_{11}^{(mn)}$ 为从第 n 序列的状态转移到第 m 序列的瞬时状态集的一步转移概率,所以由一阶多元马氏模型 $X_{k+1}=AX_k$,可得:

$$X_{k+1}^{(j)}=\sum_{n=1}^{N}\lambda_{jn}P_1^{(jn)}X_k^{(n)}=\sum_{n\neq i}\lambda_{jn}P_1^{(jn)}X_k^{(n)}+\lambda_{ji}P_1^{(ji)}X_k^{(i)}=\sum_{n\neq i}\lambda_{jn}P_1^{(jn)}X_k^{(n)}+$$
$$\lambda_{ji}P_1^{(ji)}X_k^{(i)}=\sum_{n\neq i}\lambda_{jn}P^{(jn)}X_k^{(n)}+\lambda_{ji}\begin{pmatrix}P_{11}^{(ji)} & P_{01}^{(ji)}\\ 0 & 1\end{pmatrix}X_k^{(i)}.$$

因此,$P_{11}^{(ji)}$ 满足:$X_{k+1}^{(j)}=\sum\limits_{n\neq i}\lambda_{jn}P_1^{(jn)}X_k^{(n)}+\lambda_{ji}\begin{pmatrix}P_{11}^{(ji)} & P_{01}^{(ji)}\\ 0 & 1\end{pmatrix}X_k^{(i)}$.

由马氏模型的切普曼 - 柯尔莫戈洛夫方程,可知$[P_{11}^{(ji)}]^{t-1} = P_{1(t-1)}^{(ji)}$. 再由高阶多元马氏模型的定义可得,当 $K = t-1$ 时,有:$X_{r+1}^{(j)} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{i=1}\lambda_{jn}^{(k)} P_k^{(jn)} X_{r-k+1}^{(n)}$. 因此,

$$X_{r+1}^{(j)} = \sum_{n=1}^{N}(\lambda_{jn}^{(k)}P_k^{(jn)}X_{r-k+1}^{(n)} + \lambda_{jn}^{(t-1)}P_{t-1}^{(jn)}X_{r-1}^{(n)}) = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{t-2}(\lambda_{jn}^{(k)}P_k^{(jn)}X_{r-k+1}^{(n)} + \sum_{n\neq 1}\lambda_{jn}^{(t-1)}P_{t-1}^{(jn)}X_{r=t}^{(n)}) +$$

$$\lambda_{ji}^{(t-1)}P_{t-1}^{(ji)}X_{r-t}^{(i)} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{t-2}(\lambda_{jn}^{(k)}P_k^{(jn)}X_{r-k+1}^{(n)} + \sum_{n\neq 1}\lambda_{jn}^{(t-1)}P_{t-1}^{(jn)}X_{r=t}^{(n)}) +$$

$$\lambda_{ji}^{(t-1)}\begin{pmatrix} P_{t-1\ 1(t-1)}^{(ji)} & P_{0(t-1)}^{(ji)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_{r-t}^{(i)}.$$

故$[P_1^{(ji)}1]^{i-1}$满足:$X_{r+1}^{(j)} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{t-2}(\lambda_{jn}^{(k)}P_k^{(jn)}X_{r-k+1}^{(n)} + \sum_{n\neq 1}\lambda_{jn}^{(t-1)}P_{t-1}^{(jn)}X_{r=t}^{(n)}) + \lambda_{ji}^{(t-1)}\begin{pmatrix} P_{t-1\ 1(t-1)}^{(ji)} & P_{0(t-1)}^{(ji)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X_{r-t}^{(i)}$.

2.2 M-PH 分布的期望

为了求出 M-PH 分布的期望,先记其生成函数为:$f(x) = \sum_{t=0}^{\infty}P(\tau^{(ji)} = t)x^t$,其中 $0 \le x \le 1$. 显然当 $x = 1$ 时,有:$E(\tau^{(ji)}) = f'(1)$. 因此,只需求出其生成函数在 $x = 1$ 处的导数即可得 M-PH 分布的期望.

定理 2　设 $P(\tau^{(ji)} = t)$ 为第 i 序列的瞬时状态集转移到第 j 序列的吸收状态集的首达时间的分布列,其初始状态的概率分布为 $\pi_i(0) = (\beta_0, \beta)$,,则其期望:$E(\tau^{(ji)}) = \beta(I - P_{11}^{(ji)})^{-1}e$.

证明　因为 $P(\tau^{(ji)} = t) = \beta[P_{11}^{(ji)}]^{t-1}(I - P_{11}^{(ji)})e$,所以

$$f(x) = \sum_{t=0}^{\infty}P(\tau^{(ji)} = t)x^t = \beta_0 + \beta x\sum_{t=1}^{\infty}[xP_{11}^{(ji)}]^{t-1}(I - P_{11}^{(ji)})e.$$

由矩阵论可知对于任意矩阵 B 满足 $\lim_{n\to\infty}B^n = 0$ 时,则有:$(I-B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}B^n$,又因为 $P_{11}^{(ji)}$ 为瞬时概率矩阵所以 $\lim_{n\to\infty}[P_{11}^{(ji)}]^n = 0$. 因此

$$f(x) = \beta_0 + \beta x\sum_{t=1}^{\infty}[xP_{11}^{(ji)}]^{t-1}(I - P_{11}^{(ji)})e = \beta_0 + \beta x(I - xP_{11}^{(ji)})^{-1}(I - P_{11}^{(ji)})e.$$

记 $C(x) = (I - xP_{11}^{(ji)})^{-1}$,则 $C(x)(I - xP_{11}^{(ji)}) = I$,所以对其两边求关于 x 的导数,得:$C'(x)(I - xP_{11}^{(ji)}) - C(x)P_{11}^{(ji)} = 0$,即 $C'(x) = C(x)P_{11}^{(ji)}(I - xP_{11}^{(ji)})^{-1} = (I - xP_{11}^{(ji)})^{-1}P_{11}^{(ji)}(I - xP_{11}^{(ji)})^{-1}$. 因此,$f'(x) = \beta(I - xP_{11}^{(ji)})^{-1}[(I + xP_{11}^{(ji)}(I - xP_{11}^{(ji)})^{-1}](I - P_{11}^{(ji)})e$. 由此可知,当 $x = 1$ 时,可得 M-PH 分布的期望,即 $E(\tau^{(ji)}) = f'(1) = \beta(I - P_{11}^{(ji)})^{-1}e$.

3 结束语

系统瞬时状态集转移到吸收状态集的首达时间关乎系统工程的可靠性,如何求出其概率分布是系统工程的重要问题之一. 虽然学术界在传统马氏模型下对 Phase-Type 分布问题的研究已取得丰富的成果,但是由于传统马氏链不考虑随机序列间状态的相互转移性,因此所得出的 Phase-Type 分布在实际应用中具有一定的局限性. 本文在传统的 Phase-Type 分布理论基础上,结合多元马氏模型的基本概念,给出了多元 Phase-Type 分布的定义,并提出了其分布列及数学期望的具体求解方法,进一步拓展了相关的理论知识,弥补了传统 Phase-Type 分布在实际应用中的不足之处.

参 考 文 献

[1]　孙景艳. 马尔可夫链在教学评价中的应用[J]. 河南师范大学学报:自然科学版,2008,36(2):10-13.

[2]　王艳玲. 基于灰色马尔可夫链的农民平均收入实证研究[J]. 河南师范大学学报:自然科学版,2008,36(1):16-18.

[3]　Raftery A E. A model for high-order Markov chains[J]. Journal of the Royal Statistical Society Series B (Methodological),1985,47(3):528-539.

[4]　Raftery A, Tavare S. Estimation and modeling repeated patterns in high order Markov chains with the mixture transition distribution model[J]. Applied Statistics,1994,43(1):179-199.

[5] Berchtold A, Raftery A E. The mixture transition distribution model for high-order Markov chains and non-Gaussian time series[J]. Statistical Science, 2002, 17(3): 328-356.

[6] Ching W K, Fung E S, Ng M K. A multivariate Markov chain model for categorical data sequences and its applications in demand predictions[J]. IMA Journal of Management Mathematics, 2002, 13(3): 187-199.

[7] 邢灵博,陈 杰,陈志祥. 多元马氏链的状态分类及其基本性质[J]. 华南师范大学学报:自然科学版, 2014, 46(4): 22-25.

[8] 陈 杰,陈志祥,邢灵博. 基于多元马氏需求转移特征的多产品库存优化策略研究[J]. 预测, 2014, 33(6): 54-59.

[9] Yang H, Li Y, Lu L. First order multivariate Markov chain model for generating annual weather data for Hong Kong[J]. Energy and Buildings, 2011, 43(9): 2371-2377.

[10] Siu T K, Ching W K, Fung S E. On a multivariate Markov chain model for credit risk measurement[J]. Quantitative Finance, 2005, 5(6): 543-556.

[11] Ching W K, Fung E S, Ng M K. Higher-order Markov chain models for categorical data sequences[J]. Naval Research Logistics (NRL), 2004, 51(4): 557-574.

[12] Ching W K, Ng M K. Markov chains: Models, algorithms and applications[M]. New York: Springer, 2006.

[13] Ching W K, Ng M K, Fung E S. Higher-order multivariate Markov chains and their applications[J]. Linear Algebra and its Applications, 2008, 428(2): 492-507.

[14] 林元烈. 应用随机过程[M]. 北京:清华大学出版社, 2002: 97-98.

Phase-Type Distributions and Its Mathematical Expectation under the Situation with Multivariate Markov Model

XING Lingbo, YANG Qiqiang

(School of Science and Technology, Qiongzhou University, Sanya 572022, China)

Abstract: This paper considered the Phase-Type distributions problem under the situation with multivariate Markov model. According to the transition characteristics of the states in the multivariate Markov model, and combine the definition of the traditional Phase-Type distributions, the concept of the Phase-Type distributions is proposed under the situation with multivariate Markov model when the first arrival time is confirmed for the transient state set of the various stochastic sequences transfer into absorbing state set in the model. Further, the expressions of distribution sequence and mathematical expectation are obtained for the Phase-Type distributions.

Keywords: multivariate Markov model; Phase-Type distributions; mathematical expectation