文章编号:1000－2367(2018)06－0001－08　　DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2018.06.001

Camassa-Holm 方程在孤波附近的解

丁丹平，陆伟

(江苏大学 理学院,江苏 镇江 212013)

摘　要:通过伪共性变换,将 Camassa-Holm 方程在孤波 Q 附近的解做如下分解:$\lambda^{1/2}(t)u(t,\lambda(t)y+x(t))=Q(y)+\varepsilon(t,y)$,得到了估计式 $|\varepsilon(t,y)|\le Ca_3Te^{-\theta|y|}+|\lambda^{1/2}(t)\varepsilon_0|$.在 H^2 空间下,若初值和孤波解 Q 充分接近,则随着 $y\to\infty$,对应解仍然和孤波解充分接近且余量 ε 的能量分布与孤波 Q 保持一致.

关键词:Camassa-Holm 方程;伪共性变换;解的分解;孤波解

中图分类号:O175.3　　**文献标志码**:A

1993 年,Camassa 和 Holm 导出了一个非线性色散浅水波方程:

$$u_t-u_{xxt}+3uu_x=2u_xu_{xx}+uu_{xxx} \tag{1}$$

称为 Camassa-Holm 方程.其中,$u(t,x)$表示水波在 x 方向上关于时间 t 的流体速度,或等价于水平底部到水波自由表面的高度.方程(1)具有双哈密顿结构[1－2]且属于完全可积系统[3－4].除光滑解之外,方程(1)还有一大类奇异孤波解:尖峰孤立子(peakon)、尖角子(cuspon)、平坡子(stumpon)和复合波(composite wave)等[3,5－6].它的孤立波是稳定孤波[7－8],在相互作用后仍保持它们的形状和结构[9].方程(1)存在爆破解[10－12].

2000 年,Constantin 和 Strauss 利用方程(1)的哈密顿结构和守恒量,得到了在 $H^1(\mathbf{R})$范数意义下,CH 方程的孤波具有轨道稳定性的结果:

如果 $u\in C([0,T);H^1(\mathbf{R}))$ 是方程(1) 的一个解且 $\|u(0,\cdot)-c\phi\|_{H^1}<(\varepsilon/3c)^4$,$0<\varepsilon<c$,那么 $\|u(t,\cdot)-c\phi(\cdot-\varphi(t))\|_{H^1}<\varepsilon$,$t\in(0,T)$,其中 $c\phi(x-ct)=ce^{-|x-ct|}$,$c\in\mathbf{R}$ 是方程(1) 的孤波且 $\varphi(t)\in\mathbf{R}$ 是任意使函数 $u(t,\cdot)$ 达到最大值的点[8].这一稳定性的结果可以考虑孤波附近解的表达与描述.

本文研究如下 Camassa-Holm(CH)方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} u_t-u_{xxt}+3uu_x=2u_xu_{xx}+uu_{xxx}, & (t,x)\in[0,T)\times\mathbf{R}, \\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\mathbf{R}. \end{cases} \tag{2}$$

对于所有的 $t\in[0,T)$,$E_1(u(t))=\frac{1}{2}\int(u^2+u_x^2)\mathrm{d}x=E_{10}$ 与 $E_2(u(t))=\frac{1}{2}\int(u^3+uu_x^2)\mathrm{d}x=E_{20}$ 为守恒量,其中 $E_{10}=E_1(u_0)$ 和 $E_{20}=E_2(u_0)$.始终假设初始能量 $E_{10}>0$.

注意到方程(1)有如下的不变性:

(A)平移不变性:如果 $u(t)$ 是方程(1) 的一个解,那么 $u(t,\cdot+x_0)$ 也是一个解.

(B)伸缩不变性:如果 $u(t)$ 是方程(1) 的一个解,那么 $\lambda_0u(\lambda_0t,x)$ 也是一个解.

受文献[13－15]的启发,通过构造适当的变换,将 CH 方程 Cauchy 问题在孤波 Q 附近的解分解为如下形式:

$$\lambda^{1/2}(t)u(t,\lambda(t)y+x(t))=Q(y)+\varepsilon(t,y), \tag{3}$$

其中 $\lambda(t)$ 满足假设(H):存在常数 λ_1,λ_2 使得 $0<\lambda_1\le\lambda(t)\le\lambda_2$,$t\in[0,T)$.

收稿日期:2018-01-25;**修回日期**:2018-05-23.

基金项目:国家自然科学基金(11371175)

作者简介:丁丹平(1965－),男,江苏丹阳人,江苏大学教授,博士,研究方向为 Camassa-Holm 方程,E-mail:ddp@ujs.edu.cn.

通信作者:陆伟(1993－),男,江苏连云港人,江苏大学硕士研究生,E-mail:1090503798@qq.com.

文中 $\Lambda f=\frac{1}{2}f+yf'$ 表示 L^2 空间上的算子,$(f,g)=\int_{\mathbf{R}}f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 为 L^2 上的内积,记$\int_{\mathbf{R}}\mathrm{d}x$ 为$\int$.

1 预备知识

1.1 CH 方程的孤波解

方程(1)通过孤波变换 $u(t,x)=Q(x-ct)$,可以导出孤波方程 $Q^2=Q_x^2$,其中 $Q(x)=c\mathrm{e}^{-|x-ct|}$[3].

1.2 平移与伸缩参数的选择

从关于 CH 方程解的平移不变性和伸缩不变性退化的角度考虑,需要在线性化方程(1)之前介绍参数 $\lambda(t)$ 和 $x(t)$.

对 $t\in[0,T)$,选择 $\lambda(t)$ 和 $x(t)$ 使满足 $\varepsilon(t)\perp Q_x$ 和 $\varepsilon(t)\perp\Lambda Q$.

对 $u\in H^2(\mathbf{R})$,$\hat{\lambda}>0$ 和 $\hat{x}\in\mathbf{R}$,定义:

$$\varepsilon_{\hat{\lambda},\hat{x}}(y)=\hat{\lambda}^{1/2}u(\hat{\lambda}y+\hat{x})-Q(y). \tag{4}$$

设 $\alpha>0$,考虑孤波 Q 附近半径为 α 的邻域:$U_\alpha=\{u\in H^2(\mathbf{R});\inf\limits_r\|u(\cdot)-Q(\cdot+r)\|_{H^2}\le\alpha\}$.

性质 1(调整参数的选择) 存在 $\alpha_1>0$,$\tilde{\lambda}>0$ 和唯一一个 C^1 映射$(\hat{\lambda},\hat{x}):U_{\alpha_1}\to(1-\tilde{\lambda},1+\tilde{\lambda})\times\mathbf{R}$,使得假设 $u\in U_{\alpha_1}$ 且 $\varepsilon_{\hat{\lambda},\hat{x}}$ 由(4)式给出,则

$$\varepsilon_{\hat{\lambda},\hat{x}}\perp Q_x,\varepsilon_{\hat{\lambda},\hat{x}}\perp\Lambda Q. \tag{5}$$

进一步,若存在常数 $C_1>0$ 使得 $u\in U_\alpha$,$0<\alpha<\alpha_1$,则有

$$\|\varepsilon_{\hat{\lambda},\hat{x}}\|_{H^2}\le C_1\alpha,\ |\hat{\lambda}-1|\le C_1\alpha. \tag{6}$$

证明 定义函数 $\rho^1_{\hat{\lambda},\hat{x}}=\int\varepsilon_{\hat{\lambda},\hat{x}}Q_x$,$\rho^2_{\hat{\lambda},\hat{x}}=\int\varepsilon_{\hat{\lambda},\hat{x}}(\Lambda Q)$.因为$\left.\frac{\partial\varepsilon_{\hat{\lambda},\hat{x}}}{\partial\hat{x}}\right|_{\hat{\lambda}=1,\hat{x}=0}=u_x$,$\left.\frac{\partial\varepsilon_{\hat{\lambda},\hat{x}}}{\partial\hat{\lambda}}\right|_{\hat{\lambda}=1,\hat{x}=0}=\frac{u}{2}+xu_x$,所以$\left.\frac{\partial\rho^1_{\hat{\lambda},\hat{x}}}{\partial\hat{x}}\right|_{\hat{\lambda}=1,\hat{x}=0,u=Q}=\int Q_x^2$,$\left.\frac{\partial\rho^1_{\hat{\lambda},\hat{x}}}{\partial\hat{\lambda}}\right|_{\hat{\lambda}=1,\hat{x}=0,u=Q}=\int(\Lambda Q)Q_x$,$\left.\frac{\partial\rho^2_{\hat{\lambda},\hat{x}}}{\partial\hat{x}}\right|_{\hat{\lambda}=1,\hat{x}=0,u=Q}=\int Q_x(\Lambda Q)$,$\left.\frac{\partial\rho^2_{\hat{\lambda},\hat{x}}}{\partial\hat{\lambda}}\right|_{\hat{\lambda}=1,\hat{x}=0,u=Q}=\int(\Lambda Q)^2$.

因为雅可比行列式 $\begin{vmatrix}\int Q_x^2 & \int(\Lambda Q)Q_x\\ \int Q_x(\Lambda Q) & \int(\Lambda Q)^2\end{vmatrix}\ne0$,所以,由隐函数定理可知,存在 $\bar{\alpha}>0$ 和平面 $\mathbf{R}^2$ 内点(1,0)处的一个邻域 $V_{1,0}$ 以及唯一一个 C^1 映射$(\hat{\lambda},\hat{x})$:$\{u\in H^2(\mathbf{R});\|u(\cdot)-Q(\cdot+r)\|_{H^2}<\bar{\alpha}\}\to V_{1,0}$ 满足(5)式.

如果 $\|u-Q\|_{H^2}<\alpha\le\bar{\alpha}$,不妨取邻域 $V_{1,0}$ 的半径为 $C\alpha$,$C>0$,那么 $|\hat{\lambda}-1|+|\hat{x}|\le C\alpha$.由(4)式知,$\|\varepsilon_{\hat{\lambda},\hat{x}}\|_{H^2}\le C\alpha$.从 $\{u\in H^2(\mathbf{R});\|u(\cdot)-Q(\cdot+r)\|_{H^2}\le\alpha\}$ 延伸映射$(\hat{\lambda},\hat{x})$ 到管道 U_α.再次使用隐函数定理可知,存在 $\alpha_1<\bar{\alpha}$ 以及一个 C^1 映射 $r:U_{\alpha_1}\to\mathbf{R}$,对所有的 $u\in U_{\alpha_1}$ 有 $\|u(\cdot)-Q(\cdot+r)\|_{H^2}=\inf\limits_r\|u(\cdot)-Q(\cdot+r)\|_{H^2}<\alpha_1<\bar{\alpha}$.那么,函数 $\hat{\lambda}(u)=\hat{\lambda}(u(\cdot+r(u)))$ 和 $\hat{x}(u)=\hat{x}(u(\cdot+r(u)))+r(u)$ 满足(5)及(6)式.

性质 1 得证.

对 $u(t)\in U_{\alpha_1}$,$t\in[0,T)$,定义如下的 $\lambda(t)$ 和 $x(t)$ 使满足:

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_{\lambda(t),x(t)}, \tag{7}$$

使得 $(\varepsilon(t),Q_x)=(\varepsilon(t),\Lambda Q)=0$.

引理 1 若 $\|u_0-Q\|_{H^1}\le\tau_1$,那么 $\|\varepsilon(t)\|^2_{H^1}\le C_1\tau_1^2+C_2$,$t\in[0,T)$.

证明 因 $u_0=Q+\varepsilon(0)=Q+\varepsilon_0$,故 $\lambda(0)=1$ 和 $x(0)=0$.由 $v(t,y)=\lambda^{1/2}(t)u(t,\lambda(t)y+x(t))=Q(y)+\varepsilon(t,y)$ 和假设(H),能够得到

$$E_1(u(t,x))=E_1(\lambda^{-1/2}(t)v(t,y))=\frac{1}{2}\lambda^{-1}(t)\int(Q+\varepsilon)^2+(Q+\varepsilon)_x^2\mathrm{d}x=$$

$$\lambda^{-2}(t)\left[\frac{1}{2}\|\varepsilon\|_{H^1}^2+\int Q^2+\int Q\varepsilon+\int Q_y\varepsilon_y\right]=E_1(u_0).$$

因为 $\|\varepsilon_0\|_{H^1}=\|u_0-Q\|_{H^1}$，那么 $E_1(u_0)=E_1(Q+\varepsilon_0)=\frac{1}{2}\|\varepsilon_0\|_{H^1}^2+\int Q^2+\int Q\varepsilon_0+\int Q_y\varepsilon_{0,y}$.有 $\frac{1}{2}\|\varepsilon\|_{H^1}^2+\int Q^2+\int Q\varepsilon+\int Q_y\varepsilon_y=\lambda^2(t)E_1(u_0)$，即 $\|\varepsilon\|_{H^1}^2\leq\lambda^2(t)\|\varepsilon_0\|_{H^1}^2+2\lambda(t)\|Q\|_{L^1}\|\varepsilon_0\|_{H^1}+12\|Q\|_{L^2}^2$.

引理 2　假设 $u(t)$是 Cauchy 问题(2)满足 $u_0\in H^2(\mathbf{R})$ 的解且 $T<\sqrt{2}/(3\|u_0\|_{H^2})$，那么 $\|u\|_{H^2}^2\leq C\|u_0\|_{H^2}^2$，$t\in[0,T)$.

证明　在方程(1)式两边同乘以因式 $u-u_{xx}$ 得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}u^2+u_x^2+\frac{1}{2}u_{xx}^2)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uu_{xt}+u_xu_t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u^2u_{xx}-$$

$$u^3-\frac{1}{2}uu_{xx}^2+\frac{3}{2}uu_x^2)-\frac{3}{2}(u_xu_{xx}^2+u_x^3).\tag{8}$$

在 $\mathbf{R}$ 上关于 x 积分(8)式得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(\frac{1}{2}u^2+u_x^2+\frac{1}{2}u_{xx}^2)=-\frac{3}{2}\int u_x(u_x^2+u_{xx}^2).\tag{9}$$

对(9)式估计得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(\frac{1}{2}u^2+u_x^2+\frac{1}{2}u_{xx}^2)\leq\frac{3}{2}\int|u_x|(u_x^2+u_{xx}^2)\leq 3\sqrt{2}[\int(\frac{1}{2}u^2+u_x^2+\frac{1}{2}u_{xx}^2)]^{3/2}.\tag{10}$$

在区间 $[0,t]$ 上关于变量 t 积分(10)式得：$\int(\frac{1}{2}u^2+u_x^2+\frac{1}{2}u_{xx}^2)\leq\frac{1}{[1-(3\sqrt{2}t\|u_0\|_{H^2})/2]^2}\int(\frac{1}{2}u_0^2+u_{0,x}^2+\frac{1}{2}u_{0,xx}^2)$. 从而，

$$\|u\|_{H^2}^2\leq C\|u_0\|_{H^2}^2.\tag{11}$$

考虑 $u_0\in H^2(\mathbf{R})$ 满足 $\|u_0-Q\|_{H^2}\leq\tau_2$，$t\in[0,T)$，$u(t)$ 是 Cauchy 问题(2) 的解.从而，存在 C_1，$C_2>0$，使得 $C_1\leq\|u(t)\|_{H^2}\leq C_2$，$t\in[0,T)$.

性质 2　若 $\varepsilon(t)$ 由(7)式给出，则(P_1)正交条件：$(\varepsilon(t,x),Q_x)=(\varepsilon(t,x),\Lambda Q)=0$，$t\in[0,T)$；($P_2$)若 $\|u_0-Q\|_{H^2}\leq\tau_2$，那么 $\|\varepsilon(t)\|_{H^2}^2\leq C_1\tau_2^2+C_2$，$t\in[0,T)$；($P_3$) 对 $\forall\sigma>0$，$\exists R_0(\sigma)>0$，使得 $\|\varepsilon(t)\|_{L^2(|y|>R_0)}\leq\sigma$，$t\in[0,T)$.

证明　事实上，由(7)式和性质 1 知(P_1)成立(即 $\lambda(t)$ 和 $x(t)$ 参数的选择)；由(7) 式和函数 $u(t,x)$、Q 的 L^2 可积性可以导出(P_3).

由 $v(t,y)=\lambda^{1/2}(t)u(t,\lambda(t)y+x(t))=Q(y)+\varepsilon(t,y)$ 和不等式(11)可得 $\|\lambda^{-1/2}(t)[Q+\varepsilon]\|_{H^2}^2\leq C\|Q+\varepsilon_0\|_{H^2}^2$，即

$$\|Q\|_{H^2}^2+\|\varepsilon\|_{H^2}^2+\int(2Q\varepsilon+2Q_y\varepsilon_y+2Q_{yy}\varepsilon_{yy})\leq\lambda^4(t)C[\|Q\|_{H^2}^2+$$

$$\|\varepsilon_0\|_{H^2}^2+\int(2Q\varepsilon_0+2Q_y\varepsilon_{0,y}+2Q_{yy}\varepsilon_{0,yy})].$$

通过假设(H)和 Young 不等式，有

$$\|\varepsilon\|_{H^2}^2\leq\lambda^4(t)C\|\varepsilon_0\|_{H^2}^2+[\lambda^4(t)C+\lambda^2(t)]\|\varepsilon_0\|_{H^1}^2+[2\lambda(t)\|Q\|_{L^1}]\|\varepsilon_0\|_{H^1}+14\|Q\|_{L^2}^2,$$

即 $\|\varepsilon\|_{H^2}^2\leq C_1\|\varepsilon_0\|_{H^2}^2+C_2$. 因此，($P_2$)成立.

1.3　研究方法

首先，将方程(1)改写成如下的弱形式：

$$u_t=(I-\partial_x^2)^{-1}(2u_xu_{xx}+uu_{xxx}-3uu_x)=\frac{1}{2}p(x)*(2u_xu_{xx}+uu_{xxx}-3uu_x),\tag{12}$$

其中：$p(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$ 为 Poisson 核的 Fourier 变换，$*$ 表示空间卷积.

其次，将分解式(3)通过方程(12)式得到 ε 的控制方程：

$$\varepsilon_t=\frac{\lambda_t}{\lambda}(\Lambda Q+\Lambda\varepsilon)+\frac{x_t}{\lambda}(Q_y+\varepsilon_y)+D,\tag{13}$$

其中：$D=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{e}^{-|y|}*\left[\lambda^{-5/2}[(Q+\varepsilon)_y^2]_y+\lambda^{-5/2}(Q+\varepsilon)(Q+\varepsilon)_{yyy}-\frac{3}{2}\lambda^{-1/2}[(Q+\varepsilon)^2]_y\right]\right\}$.

最后，利用 $p(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$ 和孤波 Q 的指数衰减性对 ε 的控制方程进行估计.

2 ε 控制方程和参数的估计

2.1 Q 附近的线性化方程

分别令

$$v(t,y)=\lambda^{1/2}(t)u(t,\lambda(t)y+x(t)),\tag{14}$$

$$\varepsilon(t,y)=v(t,y)-Q(y)=\lambda^{1/2}(t)u(t,\lambda(t)y+x(t))-Q(y),\tag{15}$$

其中，如果 $y=(x-x(t))/\lambda(t)$，那么 $u(t,\lambda(t)y+x(t))$ 是方程(1)的解.

由(14)式知：

$$v_t(t,y)=\frac{1}{2}\lambda_t\lambda^{-1/2}(t)u(t,\lambda(t)y+x(t))+\lambda^{1/2}(t)u_t(t,\lambda(t)y+x(t))+$$
$$\lambda_ty\lambda^{1/2}(t)u_x(t,\lambda(t)y+x(t))+\lambda^{1/2}(t)x_tu_x(t,\lambda(t)y+x(t)),$$
$$v_y(t,y)=\lambda^{3/2}(t)u_x(t,\lambda(t)y+x(t)),v_{yy}(t,y)=\lambda^{5/2}(t)u_{xx}(t,\lambda(t)y+x(t)),$$
$$v_{yyy}(t,y)=\lambda^{7/2}(t)u_{xxx}(t,\lambda(t)y+x(t)).$$

从而得到关于 v 的方程：

$$\lambda^{-1/2}(t)v_t-\lambda_t\lambda^{-3/2}(t)\left(\frac{v}{2}+yv_y\right)-\lambda^{-3/2}(t)x_tv_y=$$
$$\frac{1}{2}\lambda(t)\mathrm{e}^{-|y|}*[2\lambda^{-4}(t)v_yv_{yy}+\lambda^{-4}(t)vv_{yyy}-3\lambda^{-2}(t)vv_y].$$

进一步得到：$v_t=\frac{\lambda_t}{\lambda}\left(\frac{v}{2}+yv_y\right)+\frac{x_t}{\lambda}v_y+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|y|}*[2\lambda^{-5/2}(t)v_yv_{yy}+\lambda^{-5/2}(t)vv_{yyy}-3\lambda^{-1/2}(t)vv_y]$.

将 $v(t,y)=Q(y)+\varepsilon(t,y)$ 代入上式可得 ε 的控制方程(13)式.

2.2 参数的方程和估计

命题 1(λ_t 和 x_t 的方程) 存在 $\alpha_2\in(0,\alpha_1)$，使得 $u(t)\in U_{\alpha_2}$，$t\in[0,T)$，则 λ 和 x 是时间 t 的 C^1 函数，且

$$\frac{\lambda_t}{\lambda}\int yQ\varepsilon+\frac{x_t}{\lambda}\left(-\int Q^2-\int Q_y\varepsilon_y\right)=(Q_y,D),\tag{16}$$

$$\frac{\lambda_t}{\lambda}\left(-\frac{1}{4}\int Q^2-\frac{3}{4}\int Q\varepsilon+\int y^2Q\varepsilon\right)+\frac{x_t}{\lambda}\int yQ\varepsilon=(\Lambda Q,D).\tag{17}$$

证明 Q_y 和 ΛQ 分别与 ε 的控制方程(13)式作内积，由分部积分计算可得(16)和(17)式.

对 $u(t)\in U_{\alpha_2}$，$t\in[0,T)$，若 $\|\varepsilon\|_{H^1}$ 足够小，那么，通过(6)式和上述的 α_2 可以得到

$$p(t)=:\left(\int yQ\varepsilon\right)^2+\left(\int Q^2+\int Q_y\varepsilon_y\right)\left(-\frac{1}{4}\int Q^2-\frac{3}{4}\int Q\varepsilon+\int y^2Q\varepsilon\right)<-\frac{1}{8}\left(\int Q^2\right)^2.\tag{18}$$

从而，可以得到如下关于 λ_t/λ 和 x_t/λ 的有界性：

引理 3(参数的估计) 存在 $\alpha_2\in(0,\alpha_1)$，使得 $u(t)\in U_{\alpha_2}$，$t\in[0,T)$，则

$$\left|\frac{\lambda_t}{\lambda}\right|+\left|\frac{x_t}{\lambda}\right|\le C_1\|\varepsilon_0\|_{H^1}^2+C_2.\tag{19}$$

证明　由(16)、(17)和(18)式可知：$\lambda_t/\lambda = p_1(t)/p(t)$ 和 $x_t/\lambda = p_2(t)/p(t)$，其中：

$$p_1(t)=(Q_y,D)\int yQ\varepsilon+(\Lambda Q,D)(\int Q^2+\int Q_y\varepsilon_y),$$

$$p_2(t)=(\Lambda Q,D)\int yQ\varepsilon+(Q_y,D)(\frac{1}{4}\int Q^2+\frac{3}{4}\int Q\varepsilon-\int y^2Q\varepsilon).$$

因为 $|p_1(t)|\leq C_1\|\varepsilon_0\|_{H^1}^2+C_2$ 和 $|p_2(t)|\leq C_1\|\varepsilon_0\|_{H^1}^2+C_2$，所以引理 3 得证.

3　定理及其证明

令 $f_1(t,y)=\frac{\lambda_t}{\lambda}(\frac{Q}{2}+yQ_y)$，$f_2(t,y)=\frac{x_t}{\lambda}Q_y+D$，则方程(13)式可改写为

$$\varepsilon_t-\frac{x_t}{\lambda}\varepsilon_y=\frac{\lambda_t}{\lambda}(\frac{\varepsilon}{2}+y\varepsilon_y)+f_1+f_2. \tag{20}$$

为了移除 $(\lambda_t/\lambda)(\varepsilon/2+y\varepsilon_y)$ 这一项，引进变换：

$$\eta(t,x)=\lambda^{-1/2}(t)\varepsilon(t,\lambda^{-1}(t)x). \tag{21}$$

记 $g_1(t,x)=\lambda^{-1/2}\cdot\frac{\lambda_t}{\lambda}\left(\frac{Q(\lambda^{-1}x)}{2}+xQ_x(\lambda^{-1}x)\right)$，$g_2(t,x)=\lambda^{1/2}\cdot\frac{x_t}{\lambda}Q_x(\lambda^{-1}x)+\bar{D}$，其中：$\bar{D}=\frac{1}{2}\lambda^{-1}\cdot e^{-|x|}*\{[(Q(\lambda^{-1}x)+\lambda^{-1/2}\eta)_x^2]_x+[Q(\lambda^{-1}x)+\lambda^{-1/2}\eta][Q(\lambda^{-1}x)+\lambda^{-1/2}\eta]_{xxx}-\frac{3}{2}[(Q(\lambda^{-1}x)+\lambda^{-1/2}\eta)^2]_x\}$，

则等式(20)可转化为

$$\eta_t-x_t\eta_x=\lambda^{-1/2}f_1(t,\lambda^{-1}x)+\lambda^{-1/2}f_2(t,\lambda^{-1}x)=g_1(t,x)+g_2(t,x). \tag{22}$$

令序列 (t_n) 满足 $t_n\in[0,T)$ 且 $t_n\to 0$.对 $n\in\mathbf{N}$，定义 η_n 为：

$$\eta_n(t,x)=\eta(t+t_n,x), \tag{23}$$

那么，由(22)式知：$(\eta_n)_t-x_t(t+t_n)(\eta_n)_x=g_1(t+t_n)+g_2(t+t_n)$，$(t,x)\in[0,T)\times\mathbf{R}$ 和 $\eta_n(0,x)=\eta(t_n,x)$，$x\in\mathbf{R}$.记 $a_1=\sup\limits_{t\in[0,T)}\|\varepsilon(t)\|_{L^2}$，$a_2=\sup\limits_{t\in[0,T)}\|\varepsilon(t)\|_{H^1}$，$a_3=\sup\limits_{t\in[0,T)}\|\varepsilon(t)\|_{H^2}$，其中 $\varepsilon(t)$ 由(15)式给出.

性质 3　若 $\eta(t)$ 由(21)式给出，则存在序列 $t_n\to 0$ 和 $\eta_T\in H^2(\mathbf{R})$ 满足

$$\text{当 } n\to+\infty \text{ 时}，\eta(t_n)\xrightarrow{\text{强}}\eta_T，\text{在 } L^2(\mathbf{R}) \text{ 上}.$$

证明　注意到 $\|\eta(t)\|_{L^2}=\|\varepsilon(t)\|_{L^2}$ 和 $\|\eta_x(t)\|_{L^2}=\lambda^{-1}(t)\|\varepsilon_y(t)\|_{L^2}$ 以及 $\|\eta_{xx}(t)\|_{L^2}=\lambda^{-1}(t)\|\varepsilon_{yy}(t)\|_{L^2}$，所以，

$$\|\eta(t)\|_{H^2}\leq\lambda_1^{-1}a_3,t\in[0,T). \tag{24}$$

令 (t_n) 为满足 $t_n\to 0$ 的序列.通过假设(H)和(P_3)，$\eta(t_n)$ 满足：

$$\forall\sigma>0,\exists R'_0(\sigma),\|\eta(t_n)\|_{L^2(|y|>R'_0)}\leq\sigma. \tag{25}$$

由(24)式知：$\|\eta(t_n)\|_{H^2}\leq Ca_3$.

因为 $H^2(\mathbf{R})$ 可以嵌入到 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$，所以，存在$(t_n)$的一个序列，仍不妨记为$(t_n)$和存在一个函数 $\eta_T\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ 满足：在 $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ 上，$\eta(t_n)\to\eta_T$，$n\to+\infty$.因为 $\|\eta(t_n)\|_{H^2}\leq Ca_3$，$\eta_T\in H^2(\mathbf{R})$ 和 $\|\eta_T\|_{H^2}\leq Ca_3$，所以，由(25)式可得：当 $n\to+\infty$ 时，$\eta(t_n)\xrightarrow{\text{强}}\eta_T$，在 $L^2(\mathbf{R})$ 上.

在 $[t_n,t+t_n]$ 上积分(19)式得：

$$|\lambda(t+t_n)-\lambda(t_n)|+|x(t+t_n)-x(t_n)|\leq C_1\|\varepsilon_0\|_{H^1}^2T+C_2, \tag{26}$$

其中：$[t_n,t+t_n]\subset[0,T)$.

进一步，令

$$\bar{\eta}_n(t,x)=\eta_n(t,x-x(t+t_n)+x(t_n)). \tag{27}$$

记

$$\bar{g}_1(\bar{t})=\lambda^{-1/2}(\bar{t})\cdot\frac{\lambda_t}{\lambda(\bar{t})}\left[\frac{Q(\tilde{x})}{2}+\bar{x}Q_x(\tilde{x})\right], \tag{28}$$

$$\bar{g}_2(\bar{t})=\lambda^{1/2}(\bar{t})\cdot\frac{x_t}{\lambda(\bar{t})}\cdot Q_x(\tilde{x})+\frac{1}{2}\lambda^{-1}(\bar{t})\mathrm{e}^{-|x|}*(2\Phi_x\Phi_{xx}+\Phi\Phi_{xxx}-3\Phi\Phi_x),\tag{29}$$

其中:记 $\tilde{x}=\lambda^{-1}(\bar{t})\bar{x}$,$\bar{t}=t+t_n$,$\bar{x}=x-x(t+t_n)+x(t_n)$ 和 $\Phi=Q(\tilde{x})+\lambda^{1/2}(\bar{t})\bar{\eta}_n$.

从而,$\bar{\eta}_n$ 满足:

$$(\bar{\eta}_n)_t=\bar{g}_1(\bar{t})+\bar{g}_2(\bar{t}).\tag{30}$$

对 $\bar{g}_1(\bar{t})$,$\bar{g}_2(\bar{t})$进行估计.

由假设(H)、(19)和(26)式可知:

$$|\bar{g}_1(\bar{t})|\leq Ca_2\mathrm{e}^{-|\lambda^{-1}(\bar{t})x|}\leq Ca_2\mathrm{e}^{-\lambda_2^{-1}|x|}.\tag{31}$$

为了更好地估计 $\bar{g}_2(\bar{t})$,下面将 $\bar{g}_2(\bar{t})$ 分为 3 个部分:

$$\bar{g}_2(\bar{t})=\bar{g}_{21}(\bar{t})+\bar{g}_{22}(\bar{t})+\bar{g}_{23}(\bar{t}),\tag{32}$$

其中:

$$\bar{g}_{21}(\bar{t})=\lambda^{1/2}(\bar{t})\cdot\frac{x_t}{\lambda(\bar{t})}\cdot Q_x(\tilde{x}),\tag{33}$$

$$\begin{aligned}\bar{g}_{22}(\bar{t})=\frac{1}{2}\lambda^{-1}(\bar{t})\mathrm{e}^{-|x|}*\{&2[Q_x(\tilde{x})Q_{xx}(\tilde{x})+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_{xx}+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xx}(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_x]+\\&[Q(\tilde{x})Q_{xxx}(\tilde{x})+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_{xxx}+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xxx}(\tilde{x})\bar{\eta}_n]-\\&3[Q(\tilde{x})Q_x(\tilde{x})+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_x+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\tilde{x})\bar{\eta}_n]\},\end{aligned}\tag{34}$$

$$\bar{g}_{23}(\bar{t})=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}*[2(\bar{\eta}_n)_x(\bar{\eta}_n)_{xx}+\bar{\eta}_n(\bar{\eta}_n)_{xxx}-3\bar{\eta}_n(\bar{\eta}_n)_x].\tag{35}$$

同样由假设(H)、(19)和(26)式可知:

$$|\bar{g}_{21}(\bar{t})|\leq Ca_2\mathrm{e}^{-|\lambda^{-1}(\bar{t})x|}\leq Ca_2\mathrm{e}^{-\lambda_2^{-1}|x|}.\tag{36}$$

为了估计 $\bar{g}_{22}(\bar{t})$ 和 $\bar{g}_{23}(\bar{t})$,需要估计 $\|\bar{\eta}_n\|_{H^2}$.

引理 4 若 $\bar{\eta}_n(t)$ 由(27)式给出且 $\|u_0-Q\|_{H^2}\leq\tau_2$,则 $\|\bar{\eta}_n\|_{H^2}^2\leq C_1\|\varepsilon_0\|_{H^2}^2+C_2$,$t\in[0,T)$.

证明 由(21)、(23)和(27)式知:$\bar{\eta}_n(t,x)=\lambda^{-1/2}(\bar{t})\varepsilon(\bar{t},\lambda^{-1}(\bar{t})\bar{x})$. 因为

$$\|\bar{\eta}_n\|_{H^2}^2\leq\int[\lambda^{-1}(\bar{t})\varepsilon^2+\lambda(\bar{t})\varepsilon_x^2+\lambda^3(\bar{t})\varepsilon_{xx}^2]\leq\lambda_2^4\|\varepsilon\|_{H^2}^2\leq C_1\|\varepsilon_0\|_{H^2}^2+C_2,$$

所以 $\|\bar{\eta}_n\|_{H^2}$ 一致有界.

引理 5 ($\bar{g}_{22}$ 和 $\bar{g}_{23}$ 的指数衰减) 若 $\bar{g}_{22}$ 和 $\bar{g}_{23}$ 分别由(34)、(35)式给出,则存在常数 C 和 $\delta_1,\delta_2>0$,对 $\bar{t}\in[0,T)$,$\forall x\in\mathbf{R}$,有 $|\bar{g}_{22}(\bar{t})|\leq C(a_2+a_3)(\mathrm{e}^{-\delta_1|x|}+\mathrm{e}^{-\delta_2|x|})$,$|\bar{g}_{23}(\bar{t})|\leq Ca_2a_3(\mathrm{e}^{-\delta_1|x|}+\mathrm{e}^{-\delta_2|x|})$. 进一步,

$$|\bar{g}_{22}(\bar{t})|\leq C(a_2+a_3)\mathrm{e}^{-\delta|x|},\tag{37}$$

$$|\bar{g}_{23}(\bar{t})|\leq Ca_2a_3\mathrm{e}^{-\delta|x|},\tag{38}$$

其中:$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$.

证明

$$\begin{aligned}\bar{g}_{22}(\bar{t})=\frac{1}{2}\lambda^{-1}(\bar{t})\mathrm{e}^{-|x|}*\{&[2Q_x(\tilde{x})Q_{xx}(\tilde{x})+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_{xx}+2\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xx}(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_x]+\\&[Q(\tilde{x})Q_{xxx}(\tilde{x})+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xxx}(\tilde{x})\bar{\eta}_n]-3[Q(\tilde{x})Q_x(\tilde{x})+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_x+\\&\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\tilde{x})\bar{\eta}_n]\}-\frac{1}{2}\lambda^{-1}(\bar{t})\int(\mathrm{e}^{-|x-\xi|})_\xi\cdot\lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_{\xi\xi},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|\bar{g}_{22}(\bar{t})|\leq\frac{1}{2}\lambda^{-1}(\bar{t})\mathrm{e}^{-|x|}*\{|&[2Q_x(\tilde{x})Q_{xx}(\tilde{x})+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_{xx}+2\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xx}(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_x]+\\&[Q(\tilde{x})Q_{xxx}(\tilde{x})+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xxx}(\tilde{x})\bar{\eta}_n]-3[Q(\tilde{x})Q_x(\tilde{x})+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_x+\\&\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\tilde{x})\bar{\eta}_n]|+|\lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_{xx}|\}.\end{aligned}$$

不妨记

$$A(\xi)=\{|[2Q_x(\tilde{x})Q_{xx}(\tilde{x})+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_{xx}+2\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xx}(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_x]+[Q(\tilde{x})Q_{xxx}(\tilde{x})+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_{xxx}(\tilde{x})\bar{\eta}_n]-3[Q(\tilde{x})Q_x(\tilde{x})+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_x+\lambda^{1/2}(\bar{t})Q_x(\tilde{x})\bar{\eta}_n]|+|\lambda^{1/2}(\bar{t})Q(\tilde{x})(\bar{\eta}_n)_{xx}|\},$$

从而，

$$|\bar{g}_{22}(\bar{t})|\leq\frac{1}{2}\lambda^{-1}(\bar{t})\int_{|x|\leq|\xi|}\mathrm{e}^{-|x-\xi|}\cdot A(\xi)+\frac{1}{2}\lambda^{-1}(\bar{t})\int_{|x|>|\xi|}\mathrm{e}^{-|x-\xi|}\cdot A(\xi).\tag{39}$$

对于(39)式右端的两个积分式，有如下的讨论：

情形 1　当 $|x|\leq|\xi|$ 时，那么，存在一个常数 $\delta_1>0$，使得 $|\xi|=(1+\delta_1)|x|$，即：$\xi=(1+\delta_1)x$ 或者 $\xi=-(1+\delta_1)x$.

1) 若 $\xi=(1+\delta_1)x$，则 $\int_{|x|\leq|\xi|}\mathrm{e}^{-|x-\xi|}\cdot A(\xi)=\int_{|x|\leq|\xi|}\mathrm{e}^{-|x-(1+\delta_1)x|}\cdot A(\xi)=\mathrm{e}^{-\delta_1|x|}\int_{|x|\leq|\xi|}A(\xi)$；

2) 若 $\xi=-(1+\delta_1)x$，则 $\int_{|x|\leq|\xi|}\mathrm{e}^{-|x-\xi|}\cdot A(\xi)=\int_{|x|\leq|\xi|}\mathrm{e}^{-|x+(1+\delta_1)x|}\cdot A(\xi)=\mathrm{e}^{-(2+\delta_1)|x|}\int_{|x|\leq|\xi|}A(\xi)$.

从而：

$$\int_{|x|\leq|\xi|}\mathrm{e}^{-|x-\xi|}\cdot A(\xi)\leq\mathrm{e}^{-\delta_1|x|}\int_{|x|\leq|\xi|}A(\xi).\tag{40}$$

情形 2　当 $|x|>|\xi|$ 时，那么，存在一个常数 $\delta_2>0$，使得 $|\xi|=(1-\delta_2)|x|$. 由三角不等式可知：

$$\int_{|x|>|\xi|}\mathrm{e}^{-|x-\xi|}\cdot A(\xi)\leq\int_{|x|>|\xi|}\mathrm{e}^{|\xi|-|x|}\cdot A(\xi)=\mathrm{e}^{-\delta_2|x|}\int_{|x|>|\xi|}A(\xi).\tag{41}$$

因此，综合(39)、(40)、(41)及假设(H)可得：

$$|\bar{g}_{22}(\bar{t})|\leq C\mathrm{e}^{-\delta_1|x|}\int_{|x|\leq|\xi|}A(\xi)+C\mathrm{e}^{-\delta_2|x|}\int_{|x|>|\xi|}A(\xi)\leq C(\mathrm{e}^{-\delta_1|x|}+\mathrm{e}^{-\delta_2|x|})\int A(\xi)\leq C(5\|\bar{\eta}_n\|_{H^1}+2\|\bar{\eta}_n\|_{H^2}+4\|\bar{\eta}_n\|_{L^2})(\mathrm{e}^{-\delta_1|x|}+\mathrm{e}^{-\delta_2|x|})\leq C(a_2+a_3)(\mathrm{e}^{-\delta_1|x|}+\mathrm{e}^{-\delta_2|x|}).$$

接下来，估计 $\bar{g}_{23}(\bar{t})$. 由于 $|\bar{g}_{23}(\bar{t})|\leq\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}*[|(\bar{\eta}_n)_x(\bar{\eta}_n)_{xx}-3\bar{\eta}_n(\bar{\eta}_n)_x|+|\bar{\eta}_n(\bar{\eta}_n)_{xx}|]$. 不妨记 $B(\xi)=|(\bar{\eta}_n)_x(\bar{\eta}_n)_{xx}-3\bar{\eta}_n(\bar{\eta}_n)_x|+|\bar{\eta}_n(\bar{\eta}_n)_{xx}|$. 故 $|\bar{g}_{23}(\bar{t})|\leq\frac{1}{2}\int_{|x|\leq|\xi|}\mathrm{e}^{-|x-\xi|}\cdot B(\xi)+\frac{1}{2}\int_{|x|>|\xi|}\mathrm{e}^{-|x-\xi|}\cdot B(\xi)$.

同理可得：$|\bar{g}_{23}(\bar{t})|\leq C\mathrm{e}^{-\delta_1|x|}\int_{|x|\leq|\xi|}B(\xi)+C\mathrm{e}^{-\delta_2|x|}\int_{|x|>|\xi|}B(\xi)\leq C(\mathrm{e}^{-\delta_1|x|}+\mathrm{e}^{-\delta_2|x|})\int B(\xi)\leq C(\|\bar{\eta}_n\|_{H^1}\|\bar{\eta}_n\|_{H^2}+3\|\bar{\eta}_n\|_{L^2}\|\bar{\eta}_n\|_{H^1}+\|\bar{\eta}_n\|_{L^2}\|\bar{\eta}_n\|_{H^2})(\mathrm{e}^{-\delta_1|x|}+\mathrm{e}^{-\delta_2|x|})\leq Ca_2a_3(\mathrm{e}^{-\delta_1|x|}+\mathrm{e}^{-\delta_2|x|})$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，不难得到(37) 和(38) 式.

不妨令 $\theta_1=\min\{\delta,\lambda_2^{-1}\}$，由(31)、(36)和引理 5 知：

$$|\bar{g}_1(\bar{t})|\leq Ca_2\mathrm{e}^{-\theta_1|x|},\tag{42}$$

$$|\bar{g}_{21}(\bar{t})|\leq Ca_2\mathrm{e}^{-\theta_1|x|},\ |\bar{g}_{22}(\bar{t})|\leq C(a_2+a_3)\mathrm{e}^{-\theta_1|x|},\ |\bar{g}_{23}(\bar{t})|\leq Ca_2a_3\mathrm{e}^{-\theta_1|x|}.\tag{43}$$

引理 6（$\bar{g}_1+\bar{g}_2$ 的指数衰减）　若 $\bar{g}_1+\bar{g}_2$ 由(28) 和(29) 式给出，则对 $\bar{t}\in[0,T)$，$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $|\bar{g}_1(\bar{t})+\bar{g}_2(\bar{t})|\leq Ca_3\mathrm{e}^{-\theta_1|x|}$，其中 C 为常数和 $\theta_1>0$.

证明　由(32)、(42)和(43)式可得

$$|\bar{g}_1(\bar{t})+\bar{g}_2(\bar{t})|\leq|\bar{g}_1(\bar{t})|+|\bar{g}_2(\bar{t})|\leq|\bar{g}_1(\bar{t})|+|\bar{g}_{21}(\bar{t})|+|\bar{g}_{22}(\bar{t})|+|\bar{g}_{23}(\bar{t})|\leq Ca_3\mathrm{e}^{-\theta_1|x|}.$$

引理 7　若 $\bar{\eta}_n$ 由(30) 式给出，则对 $t\in[0,T)$，$\forall x\in\mathbf{R}$，有 $|\bar{\eta}_n(t)|\leq Ca_3T\mathrm{e}^{-\theta_1|x|}+|\bar{\eta}_n(0)|$，其中 C 为常数和 $\theta_1>0$.

证明　由(30)式和引理 6 可知：

$$|(\bar{\eta}_n)_t|\leq|\bar{g}_1(\bar{t})+\bar{g}_2(\bar{t})|\leq Ca_3\mathrm{e}^{-\theta_1|x|}.\tag{44}$$

对不等式(44),在区间 $[0,t](t<T)$ 上关于时间变量积分得:

$$|\bar{\eta}_n(t)|\leq Ca_3Te^{-\theta_1|x|}+|\bar{\eta}_n(0)|. \tag{45}$$

定理 1 假设 $u(t)$ 为 Cauchy 问题(2)满足 $u_0\in H^2(\mathbf{R})$ 的解且(H)成立,$\varepsilon(t)$ 由(15)式给出.那么,存在常数 $\theta>0$ 使得 $|\varepsilon(t,y)|\leq Ca_3Te^{-\theta|y|}+|\lambda^{1/2}(t)\varepsilon_0|$,对 $t\in[0,T)$,$\forall y\in\mathbf{R}$.

证明 由(21)、(23)和(27)式知:

$$\bar{\eta}_n(t,x)=\lambda^{-1/2}(t)\varepsilon(t,\lambda^{-1/2}(t)(x-x(t))),n\rightarrow+\infty. \tag{46}$$

所以,通过(45)和(46)式可知:$|\varepsilon(t,y)|\leq Ca_3Te^{-\theta|y|}+|\lambda^{1/2}(t)\varepsilon_0|$,其中 $\theta=\lambda_1\theta_1$,定理 1 得证.

致谢:非常感谢匿名审稿人仔细阅读原稿并提出改进文稿的建议性意见.

参 考 文 献

[1] Fokas A,Fuchssteiner B.Symplectic structures,their Bäcklund transformation and hereditary Symmetries[J].Phys D,1981,4:47-66.

[2] Lenells J.Conservation laws of the Camassa-Holm equation[J].J Phys A,2005,38:869-880.

[3] Camassa R,Holm D.An integrable shallow water equation with peaked solitons[J].Phys Rev Lett,1993,71:1661-1664.

[4] Constantin A .On the scattering problem for the Camassa-Holm equation[J].Proc R Soc Lond,2001,457:953-970.

[5] Lenells J .Traveling wave solutions of the Camassa-Holm equation[J].J Differential Equations,2005,217:393-430.

[6] Li Y,Olver P.Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation[J].J Differential Equations,2000,162:27-63.

[7] Constantin A,Strauss W.Stability of the Camassa-Holm solitons[J].J Nonlinear Sci,2002,12:415-422.

[8] Constantin A,Strauss W.Stability of peakons[J].Comm Pure Appl Math,2000,53:603-610.

[9] Johnson R S.On solutions of the Camassa-Holm equation[J].Proc Roy Soc London A,2003,459:1687-1708.

[10] Constantin A.Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation:a geometric approach[J].Ann Inst Fourier (Grenoble),2000,50:321-362.

[11] Constantin A,Escher J.Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations[J].Acta Math,1998,181:229-243.

[12] Constantin A,Escher J.On the blow-up rate and the blow-up set of breaking waves for a shallow water equation[J].Math Z,2000,233:75-91.

[13] Martel Y,Merle F,Raphaël P.Blow up for the critical gKdV equation I:dynamics near the soliton[J].Acta Math,2014,212:59-140.

[14] Martel Y,Merle F.A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg-de Vries Equation[J].J Math Pures Appl,2000,79:339-425.

[15] Martel Y,Merle F.Instability of solitons for the critical generalized Korteweg-de Vries equation[J].Geom Funct Anal,2001,11:74-123.

Solutions of the Camassa-Holm equation near the soliton

Ding Danping, Lu Wei

(Faculty of Science,Jiangsu University,Zhenjiang 212013,China)

Abstract: In this paper, solutions of the Camassa-Holm equation near the soliton is decomposed by pseudo-conformal transformation as follow: $\lambda^{1/2}(t)u(t,\lambda(t)y+x(t))=Q(y)+\varepsilon(t,y)$, and the residuals ε is estimated: $|\varepsilon(t,y)|\leq Ca_3Te^{-\theta|y|}+|\lambda^{1/2}(t)\varepsilon_0|$. We prove that the solution of the Cauchy problem and the soliton Q is sufficiently close as $y\rightarrow\infty$, and the approximation degree of the solution and Q is the same as that of initial data and Q if initial value and the soliton are close enough, besides the energy distribution of ε is consistent with the distribution of the soliton Q in H^2.

Keywords: Camassa-Holm equation; pseudo-conformal transformation; the decomposition of solution; soliton

[责任编校 陈留院]