具有无穷磁雷诺数的三维磁微极流体方程的整体适定性

黄华雄,蒲学科

(广州大学 数学与信息科学学院,广州 510006)

摘 要:主要研究了具有无穷磁雷诺数的三维磁微极流体方程在 T^3 上的 Cauchy 问题的整体适定性,证明了当初始磁场很接近于背景磁场并且也满足丢番图条件时,该 Cauchy 问题是整体适定的.

关键词:磁微极流体方程;丢番图条件;整体适定性

中图分类号:O175.21 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-2367(2024)04-0087-07

本文考虑如下的三维磁微极流体方程组

$$
\begin{cases}
\partial_t u-(\mu+\chi)\Delta u+u\cdot\nabla u-\widetilde{B}\cdot\nabla\widetilde{B}+\nabla\left(p+\dfrac{1}{2}|\widetilde{B}|^2\right)-2\chi\nabla\times v=0,\\
\partial_t v-\gamma\Delta v-\kappa\nabla\nabla\cdot v+4\chi v+u\cdot\nabla v-2\chi\nabla\times u=0,\\
\partial_t\widetilde{B}-\nu\Delta\widetilde{B}+u\cdot\nabla\widetilde{B}-\widetilde{B}\cdot\nabla u=0,\\
\nabla\cdot u=0,\nabla\cdot\widetilde{B}=0,
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中,$u=u(x,t)$是流体速度, $v=v(x,t)$是微旋转速度, $p=p(x,t)\in\mathbf{R}$ 是压力项, $\widetilde{B}=\widetilde{B}(x,t)$是磁场,$(t,x)\in\mathbf{R}^+\times T^3$. 参数 μ,χ 和$\dfrac{1}{\nu}$分别表示运动黏度、涡流黏度和磁雷诺数,γ 和κ 分别表示自旋转黏度.

由方程(1)的模型可知:当 $\widetilde{B}=0$ 时,方程(1)转化为微极流体方程.微极流体方程模型早在 1966 年由 ERINGEN[1]引入,并且近年来数学物理学家们对该模型也进行了大量的研究.比如:ZHU[2]分类证明了三维微极流体方程在 Fourier-Besov 空间中的适定性和不适定性.LIU 等[3]证明了带部分黏度和阻尼的三维微极流体方程的整体适定性.有关微极流体方程正则性、精确解的求法以及更多具体的性质描述可以查阅文献[4]以及其中的参考文献.

当 $v=0$ 且 $\chi=0$ 时,方程(1)转化为磁流体动力学(magneto hydrodynamics,MHD)方程.MHD 方程是由流体速度 $u(x,t)$和磁场 $\widetilde{B}(x,t)$耦合而成.由于它不具有磁微极流体方程中表述微旋转性质的方程,所以其不能表示与流体的微旋转相关的性质.但 MHD 方程本身也具有丰富的性质:它可以用来模拟像等离子体,液态金属以及盐水等导电流体的磁性.学者们对 MHD 方程的适定性、正则性以及衰减性等性质已经进行了非常广泛的研究.在此只回顾有关于 MHD 方程适定性方面的一些结果.比如:LIU 等[5]在调幅函数空间中研究不可压缩 MHD 方程的 Cauchy 问题,分别得到解的局部适定性和整体适定性;WEI 等[6]在 Sobolev 空间中通过构造比较函数证明了不可压缩 MHD 方程的整体适定性.CHEN 等[7]在 MHD 方程带有局部扩散(分别考虑只含黏性扩散和只含磁扩散的情形)且背景磁场满足丢番图条件下研究解的整体适定性.同时

收稿日期:2023-03-05;**修回日期:**2023-04-12.

基金项目:国家自然科学基金(118711720;广州市科技计划项目(202201020132).

作者简介:黄华雄(1997—),男,广东湛江人,广州大学硕士研究生,研究方向为偏微分方程,E-mail:huanghx6_6@163.com.

通信作者:蒲学科,E-mail:xuekepu@gzhu.edu.cn.

引用本文:黄华雄,蒲学科.具有无穷磁雷诺数的三维磁微极流体方程的整体适定性[J].河南师范大学学报(自然科学版),2024,52(4):87-93.(Huang Huaxiong,Pu Xueke.Global well-posedness of the 3D magneto-micropolar fluid equations with infinite magnetic reynolds[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2024,52(4):87-93.DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.03.05.0001.)

文献[7]中指出丢番图条件几乎适用于 T^3 向量场中所有的向量 $\omega\in T^3$(除去 ω 的分量为有理数或 ω 的一个分量为零的情形).此外感兴趣的读者也可以参考其他学者研究 MHD 方程解的适定性结果[8-10].

对于整个磁微极流体系统,我们知道磁微极流体方程是由 AHMADI 等[11]于 1974 年引入.磁微极流体方程理论的提出得益于 ERINGEN[1]提出的微极流体方程模型,通过在磁场作用下,研究微极流体所作的微旋转运动以及磁场与该运动之间的相互影响.在物理上,由于磁微极流体方程涉及物理中的磁场以及微旋转等特殊性质,所以它的现象非常丰富;而在数学上,由于其可包含 MHD 方程以及微极流体方程的情形,故其结构更复杂.因磁微极流体方程在流体领域中包含的现象足够丰富、性质特别,自该模型提出至今已有大批的学者对它展开研究.ROJAS-MEDAR 使用伽辽金方法推导得到三维磁微极流体方程强解的局部存在性和唯一性[12].当初始值处于函数空间 $H^s(T^3)$,$s>\dfrac{3}{2}$时,YUAN[13]通过 Littlewood-Paley 分解的方法建立了强解的局部存在性.磁微极流体方程的整体适定性是一个重要课题,对磁微极流体方程的整体适定性,当初始值的 H^1 范数足够小时,WANG 等[14]用能量方法建立了带混合部分黏度的磁微极流体方程解的整体存在性.WANG 等[15]研究了带混合部分黏度的 Cauchy 问题,并且得到了经典小解的整体适定性.LIU 等[16]证明了当方程带阻尼时强解的存在唯一性.对于高维($n\geq 3$)的带分数耗散的磁微极流体方程解的整体适定性.LIU 等[17]研究了分数阶三维磁微极方程,当 $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{5}{4}$ 时,证明了强解的整体存在性.与此同时,把条件优化后当 $\alpha\geq\dfrac{5}{4}$,$\alpha+\beta\geq\dfrac{5}{2}$ 和$\dfrac{3}{4}\leq 2-\alpha\leq\gamma$ 时,DENG 等[18]得到了三维磁微极方程的整体适定性.后来,对上述的条件继续进行优化,经重新定义后,当 $\alpha=\beta=\dfrac{5}{4}$,并且 γ 降低到$\dfrac{1}{2}$时,YUAN 等[19]也得到了三维磁微极方程的整体适定性.

1 主要结论

假设 ω 满足丢番图条件.也即:让 $\omega\in T^3$,$c>0$ 且 $r>2$;对任意的 $k\in\mathbf{Z}^3\backslash\{0\}$,有

$$|\omega\cdot k|\geq\frac{c}{|k|^r}. \tag{2}$$

为方便起见,用 B 表示(1)中的扰动($\widetilde{B}-\omega$),那么扰动(u,v,B)满足的方程为

$$\begin{cases}\partial_t u-(\mu+\chi)\Delta u+u\cdot\nabla u-B\cdot\nabla B-\omega\cdot\nabla B+\nabla(p+\dfrac{1}{2}|B|^2)+\nabla(\omega\cdot B)-2\chi\nabla\times v=0,\\ \partial_t v-\gamma\Delta v-\kappa\nabla\nabla\cdot v+4\chi v+u\cdot\nabla v-2\chi\nabla\times u=0,\\ \partial_t B-\nu\Delta B+u\cdot\nabla B-B\cdot\nabla u-\omega\cdot\nabla u=0,\\ \nabla\cdot u=0,\nabla\cdot B=0.\end{cases} \tag{3}$$

这也就是说,当初始条件为

$$t=0:u=u_0(x),v=v_0(x),B=B_0(x),x\in T^3, \tag{4}$$

将要证明方程(3)的解的整体存在性.

在文章中只研究以下的情形,也即当方程(3)带上初始条件(4)在指定系数 $\nu=0$,$\mu=\dfrac{3}{4}$,$\chi=\dfrac{1}{4}$,$\gamma=\kappa=1$ 的情形.本文的主要研究结果如下.

定理 1 对所有的 $N\geq 4r+7$,$r>2$;现在假设初始值$(u_0,v_0,B_0)\in H^N(T^3)$满足

$$\int_{T^3}u_0(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{T^3}v_0(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{T^3}B_0(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0, \tag{5}$$

则存在一个足够小的正常数 ε,且 $\|u_0\|_{H^N}+\|v_0\|_{H^N}+\|B_0\|_{H^N}\leq\varepsilon$.则对任意的 $t\in[0,+\infty)$,带初始值(4)的方程(3)有一个整体解$(u,v,B)\in C([0,+\infty);H^N)$满足以下不等式 $\|u(t)\|_{H^{r+4}}+\|v(t)\|_{H^{r+4}}+\|B(t)\|_{H^{r+4}}\leq C(1+t)^{-\frac{3}{2}}$,$\|u(t)\|_{H^N}+\|v(t)\|_{H^N}+\|B(t)\|_{H^N}\leq C\varepsilon$.

注 1　当初始值(u_0,v_0,B_0)满足式(5)，则方程(3)的解将会满足下列的性质.也即：对任意的$t\in[0,+\infty)$，有$\int_{T^3}u(t,x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{T^3}v(t,x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{T^3}B(t,x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.

注 2　丢番图条件(2)能否去掉，依然是一个具有挑战性的问题.

2　预备知识

为简单起见，列举出了一些常用的不等式和结果，它们将在本文的证明过程中反复地被使用.

引理 1　如果函数$g\in H^{s+r}(T^3)$满足$\int_{T^3}g\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，$s\in T$，$r>2$，当$\omega\in T^3$满足丢番图条件(2)时，则有

$$\|g\|_{H^s}\le C\|\omega\cdot\nabla g\|_{H^{s+r}}.\tag{6}$$

引理 2　让$k\ge1$，且函数$f,h\in H^s(T^3)$，则有

$$\|fh\|_{H^k}\le C(\|f\|_{L^\infty}\|h\|_{H^k}+\|h\|_{L^\infty}\|f\|_{H^k}),\tag{7}$$

$$\|\nabla^k(fh)-f\nabla^k h\|_{L^2}\le C(\|\nabla f\|_{L^\infty}\|h\|_{H^{k-1}}+\|h\|_{L^\infty}\|f\|_{H^k}).\tag{8}$$

引理 3　如果$k\ge1$，则有

$$\|B\|_{H^{k-1}}\le C\|\nabla^{k-1}B\|_{L^2},\ \|\nabla u\|_{H^k}\le C\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}.\tag{9}$$

3　能量估计

当$\nu=0,\mu=\frac{3}{4},\chi=\frac{1}{4},\gamma=\kappa=1$，则方程(3)被简化为

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u+u\cdot\nabla u-B\cdot\nabla B-\omega\cdot\nabla B+\nabla\left(p+\frac{1}{2}|B|^2\right)+\nabla(\omega\cdot B)-\frac{1}{2}\nabla\times v=0,\\ \partial_t v-\Delta v-\nabla\nabla\cdot v+v+u\cdot\nabla v-\frac{1}{2}\nabla\times u=0,\\ \partial_t B+u\cdot\nabla B-B\cdot\nabla u-\omega\cdot\nabla u=0,\\ \nabla\cdot u=0,\nabla\cdot B=0.\end{cases}\tag{10}$$

下面使用$L^2(T^3)$内积运算来推导高阶能量估计式，也即引理 4.引理 4 对证明定理 1 而言是不可缺少的.

引理 4　对所有的$l\in[0,N]$，$t\in[0,T]$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u(t)\|_{H^l}^2+\|v(t)\|_{H^l}^2+\|B(t)\|_{H^l}^2)+\|\nabla u(t)\|_{H^l}^2+\|\nabla v(t)\|_{H^l}^2+\|\nabla\cdot v(t)\|_{H^l}^2\le$$
$$C(\|u(t)\|_{H^3}+\|v(t)\|_{H^3}+\|B(t)\|_{H^3}+\|u(t)\|_{H^2}^2+\|B(t)\|_{H^2}^2)\times$$
$$(\|u(t)\|_{H^l}^2+\|v(t)\|_{H^l}^2+\|B(t)\|_{H^l}^2).\tag{11}$$

证明　首先，用$(\cdot,\cdot)$表示$L^2(T^3)$内积.当$l=0$时，将式(10)和(u,v,B)作L^2内积，得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2+\|B\|_{L^2}^2)+\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla v\|_{L^2}^2+\|\nabla\cdot v\|_{L^2}^2+$$
$$\|v\|_{L^2}^2=\int_{T^3}(\nabla\times u)\cdot v\mathrm{d}x.\tag{12}$$

使用 Hölder's 不等式和 Young's 不等式，可得：

$$\int_{T^3}(\nabla\times u)\cdot v\mathrm{d}x\le\|\nabla\times u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\le\frac{1}{4}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2.\tag{13}$$

结合式(12)、(13)，则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u\|_{L^2}^2+\|v\|_{L^2}^2+\|B\|_{L^2}^2)+\frac{3}{4}\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla v\|_{L^2}^2+\|\nabla\cdot v\|_{L^2}^2\le0.\tag{14}$$

当$1\le k\le l$时，将∇^k作用到方程(10)，然后再与$(\nabla^k u,\nabla^k v,\nabla^k B)$作$L^2$内积，可得：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla^k u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k v\|_{L^2}^2+\|\nabla^k B\|_{L^2}^2)+\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}v\|_{L^2}^2+\|\nabla^k(\nabla\cdot v)\|_{L^2}^2+$$
$$\|\nabla^k v\|_{L^2}^2=-\int_{T^3}\nabla^k(u\cdot\nabla u)\cdot\nabla^k u\mathrm{d}x+\int_{T^3}\nabla^k(B\cdot\nabla B)\cdot\nabla^k u\mathrm{d}x-\int_{T^3}\nabla^k(u\cdot\nabla v)\cdot$$
$$\nabla^k v\mathrm{d}x-\int_{T^3}\nabla^k(u\cdot\nabla B)\cdot\nabla^k B\mathrm{d}x+\int_{T^3}\nabla^k(B\cdot\nabla u)\cdot\nabla^k B\mathrm{d}x+$$
$$\int_{T^3}\nabla^k(\nabla\times u)\cdot\nabla^k v\mathrm{d}x=:J_1+J_2+J_3+J_4+J_5+J_6. \tag{15}$$

接下来,对 J_1-J_6 项分别进行估计.使用 Hölder's 不等式、式(7)、式(9)和 Young's 不等式,可得:

$$|J_5|\leq\|\nabla^k(B\cdot\nabla u)\|_{L^2}\|\nabla^k B\|_{L^2}\leq C(\|B\|_{L^\infty}^2+\|\nabla u\|_{L^\infty})\|\nabla^k B\|_{L^2}^2+\frac{1}{16}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2. \tag{16}$$

与 J_5 项的估计类似,只需把式(16)中的 B 转变为 u,可得 J_1 的估计式

$$|J_1|\leq C(\|u\|_{L^\infty}^2+\|\nabla u\|_{L^\infty})\|\nabla^k u\|_{L^2}^2+\frac{1}{16}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2. \tag{17}$$

使用分部积分有 $J_2=-\int_{T^3}\nabla^k(B\otimes B)\cdot\nabla^k\nabla u\mathrm{d}x$,使用式(7)和式(9),有

$$|J_2|\leq\|\nabla^k(B\otimes B)\|_{L^2}\|\nabla^k\nabla u\|_{L^2}\leq C\|B\|_{L^\infty}^2\|\nabla^k B\|_{L^2}^2+\frac{1}{16}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2. \tag{18}$$

由于散度为零,J_4 项可以改写为 $J_4=-\int_{T^3}(\nabla^k(u\cdot\nabla B)-(u\cdot\nabla\nabla^k B))\cdot\nabla^k B\mathrm{d}x$.利用 Hölder's 不等式、式(8)和式(9)、Young's 不等式,可得:

$$|J_4|\leq\|(\nabla^k(u\cdot\nabla B)-(u\cdot\nabla\nabla^k B)\|_{L^2}\|\nabla^k B\|_{L^2}\leq C(\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^k B\|_{L^2}+$$
$$\|\nabla B\|_{L^\infty}\|\nabla^k u\|_{L^2})\|\nabla^k B\|_{L^2}\leq\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^k B\|_{L^2}^2+$$
$$C\|\nabla B\|_{L^\infty}(\|\nabla^k u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k B\|_{L^2}^2). \tag{19}$$

对于 J_3 项的估计,与估计 J_4 的方法一样,也即有

$$|J_3|\leq\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla^k v\|_{L^2}^2+C\|\nabla v\|_{L^\infty}(\|\nabla^k u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k v\|_{L^2}^2). \tag{20}$$

对于 J_6 项的估计,使用 Hölder's 不等式和 Young's 不等式,可得:

$$|J_6|\leq\|\nabla^k(\nabla\times u)\|_{L^2}\|\nabla^k v\|_{L^2}\leq\frac{1}{4}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k v\|_{L^2}^2. \tag{21}$$

结合以上的估计式(15)~(21),并使用嵌入不等式,则有:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla^k u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k v\|_{L^2}^2+\|\nabla^k B\|_{L^2}^2)+\frac{9}{16}\|\nabla^{k+1}u\|_{L^2}^2+\|\nabla^{k+1}v\|_{L^2}^2+$$
$$\|\nabla^k(\nabla\cdot v)\|_{L^2}^2\leq C(\|\nabla u\|_{H^2}+\|\nabla v\|_{H^2}+\|\nabla B\|_{H^2}+\|u\|_{H^2}^2+\|B\|_{H^2}^2)\times$$
$$(\|\nabla^k u\|_{L^2}^2+\|\nabla^k v\|_{L^2}^2+\|\nabla^k B\|_{L^2}^2). \tag{22}$$

最后,结合式(14)和式(22),则可推导出式(11).这就完成了引理 4 的证明.

4 一个关键的估计

引理 5 假设对某些 $0<\delta<1$,有 $\sup_{t\in[0,T]}(\|u(t)\|_{H^N}+\|v(t)\|_{H^N}+\|B(t)\|_{H^N})\leq\delta$,则

$$-\sum_{0\leq s\leq r+3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{T^3}\nabla^s u\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x+\frac{9}{16}\|\omega\cdot\nabla B\|_{H^{r+3}}^2\leq$$
$$C\delta^2\|B\|_{H^3}^2+(2+C\delta)\|u\|_{H^{r+5}}^2+\frac{1}{4}\|\nabla v\|_{H^{r+3}}^2. \tag{23}$$

证明 将 $\nabla^s(0\leq s\leq r+3)$ 作用到方程(10)中的第 1 个式子,然后与 $\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)$ 作内积.

$$\|\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\|_{L^2}^2=\int_{T^3}\nabla^s(\partial_t u)\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x-\int_{T^3}\nabla^s(\Delta u)\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x+$$

$$\int_{T^3}\nabla^s(u\cdot\nabla u)\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x-\int_{T^3}\nabla^s(B\cdot\nabla B)\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x-$$
$$\frac{1}{2}\int_{T^3}\nabla^s(\nabla\times v)\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x=:K_1+K_2+K_3+K_4+K_5,\tag{24}$$

这里用到恒等式$(\nabla^s\nabla(p+\frac{1}{2}|B|^2),\nabla^s(\omega\cdot\nabla B))=0,(\nabla^s\nabla(\omega\cdot B),\nabla^s(\omega\cdot\nabla B))=0.$

使用分部积分并结合式(10)中的第 3 个方程,则有

$$K_1=\int_{T^3}\nabla^s\partial_t u\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{T^3}\nabla^s u\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x-\int_{T^3}\nabla^s u\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla\partial_t B)\mathrm{d}x=$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{T^3}\nabla^s u\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x+\int_{T^3}\nabla^s(\omega\cdot\nabla u)\cdot\nabla^s(\partial_t B)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{T^3}\nabla^s u\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x-$$
$$\int_{T^3}\nabla^s(\omega\cdot\nabla u)\cdot\nabla^s(u\cdot\nabla B)\mathrm{d}x+\int_{T^3}\nabla^s(\omega\cdot\nabla u)\cdot\nabla^s(B\cdot\nabla u)\mathrm{d}x+\int_{T^3}\nabla^s(\omega\cdot\nabla u)\cdot$$
$$\nabla^s(\omega\cdot\nabla u)\mathrm{d}x=:\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{T^3}\nabla^s u\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x+K_{11}+K_{12}+K_{13}.$$

运用 Hölder's 不等式、式(7)和嵌入不等式,则

$$|K_{11}|\leq\|\nabla^s(\omega\cdot\nabla u)\|_{L^2}\|\nabla^s(u\cdot\nabla B)\|_{L^2}\leq C\delta\|u\|_{H^{s+1}}^2.$$

类似地,有$|K_{12}|\leq C\delta\|u\|_{H^{s+1}}^2$以及$|K_{13}|\leq C\|(\omega\cdot\nabla u)\|_{H^s}^2\leq\|u\|_{H^{s+1}}^2$.因此

$$|K_1|\leq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{T^3}\nabla^s u\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x+(1+C\delta)\|u\|_{H^{s+1}}^2.\tag{25}$$

类似地,可以得到

$$|K_2|\leq\|\nabla^{s+2}u\|_{L^2}^2+\frac{1}{16}\|\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\|_{L^2}^2.\tag{26}$$

$$|K_3|\leq C\delta^2\|\nabla u\|_{H^s}^2+\frac{1}{16}\|\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\|_{L^2}^2,\tag{27}$$

$$|K_4|\leq C\delta^2\|B\|_{H^3}^2+\frac{1}{16}\|\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\|_{L^2}^2,\tag{28}$$

$$|K_5|\leq\frac{1}{4}\|\nabla^{s+1}v\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\|_{L^2}^2.\tag{29}$$

联合式(24)～(29),即可推导出式(23).

5　证明主要的定理

假设存在 $T>0$,方程(10)的唯一解为$(u,v,B)\in C([0,T];H^N)$,且对某个 $0<\delta<1$,有$\sup\limits_{t\in[0,T]}(\|u(t)\|_{H^N}+\|v(t)\|_{H^N}+\|B(t)\|_{H^N})\leq\delta$.

首先,让式(11)中的 $l=r+4$,然后用常数 A 与式(11)相乘;最后把它与式(23)相加,可得:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{A(\|u\|_{H^{r+4}}^2+\|v\|_{H^{r+4}}^2+\|B\|_{H^{r+4}}^2)-\sum_{0\leq s\leq r+3}\int_{T^3}\nabla^s u\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x\}+A(\|\nabla u\|_{H^{r+4}}^2+$$
$$\|\nabla v\|_{H^{r+4}}^2+\|\nabla\cdot v\|_{H^{r+4}}^2)+\frac{9}{16}\|\omega\cdot\nabla B\|_{H^{r+3}}^2\leq CA\delta(\|u\|_{H^{r+4}}^2+\|v\|_{H^{r+4}}^2)+CA(\|u\|_{H^3}+$$
$$\|v\|_{H^3}+\|B\|_{H^3})\|B\|_{H^{r+4}}^2+(2+C\delta)\|u\|_{H^{r+5}}^2+C\delta^2\|B\|_{H^3}^2+\frac{1}{4}\|\nabla v\|_{H^{r+3}}^2,\tag{30}$$

这里的常数 $A>1$,从式(6)可推导出

$$\|B\|_{H^3}\leq C\|\omega\cdot\nabla B\|_{H^{r+3}}.\tag{31}$$

对所有的 $N\geq 2r+5$,由插值不等式可以推得:

$$\|B\|_{H^{r+4}}{}^2\leq\|B\|_{H^3}\|B\|_{H^N}\leq C\delta\|\omega\cdot\nabla B\|_{H^{r+3}}.\tag{32}$$

使用式(32)、Young's 不等式和式(31),可得$CA\|B\|_{H^3}\|B\|_{H^{r+4}}^2\leq CA\delta\|\omega\cdot\nabla B\|_{H^{r+3}}^2$.

现在使用式(32)和 Young′s 不等式,有 $CA(\|u\|_{H^3}+\|v\|_{H^3})\|B\|^2_{H^{r+4}}\leq CA\delta(\|u\|^2_{H^{r+4}}+\|v\|^2_{H^{r+4}}+\|\omega\cdot\nabla B\|^2_{H^{r+3}}$.由$\int_{T^3}u(t,x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{T^3}v(t,x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$,可推出 $\|u\|_{H^{r+5}}\leq C\|\nabla u\|_{H^{r+4}}$,这就得到 $CA\delta\|u\|^2_{H^{r+4}}\leq CA\delta\|u\|^2_{H^{r+5}}\leq CA\delta\|\nabla u\|^2_{H^{r+4}}$.类似地,有 $CA\delta\|v\|^2_{H^{r+4}}\leq CA\delta\|\nabla v\|^2_{H^{r+4}}$.定义 $E(t)=A(\|u\|^2_{H^{r+4}}+\|v\|^2_{H^{r+4}}+\|B\|^2_{H^{r+4}})-\sum\limits_{0\leq s\leq r+3}\int_{T^3}\nabla^s u\cdot\nabla^s(\omega\cdot\nabla B)\mathrm{d}x$,$G(t)=A(\|\nabla u\|^2_{H^{r+4}}+\|\nabla v\|^2_{H^{r+4}}+\|\nabla\cdot v\|^2_{H^{r+4}})+\dfrac{9}{16}\|\omega\cdot\nabla B\|^2_{H^{r+3}}$.现在,让 $A>1$,则有

$$E(t)\geq(\|u\|^2_{H^{r+4}}+\|v\|^2_{H^{r+4}}+\|B\|^2_{H^{r+4}}).\tag{33}$$

固定一个足够小的 $\delta>0$,则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+\frac{1}{2}G(t)\leq 0.\tag{34}$$

使用插值不等式,可得 $\|B\|^2_{H^{r+4}}\leq\|B\|^{\frac{1}{2}}_{H^N}\|B\|^{\frac{3}{2}}_{H^3}\leq C\delta^{\frac{1}{2}}\|\omega\cdot\nabla B\|^{\frac{3}{2}}_{H^{r+3}}$,因此推得 $E(t)\leq C(\|u\|^2_{H^{r+4}}+\|v\|^2_{H^{r+4}}+\|B\|^2_{H^{r+4}})\leq C\|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^{r+4}}\|u\|^{\frac{3}{2}}_{H^{r+4}}+C\|v\|^{\frac{1}{2}}_{H^{r+4}}\|v\|^{\frac{3}{2}}_{H^{r+4}}+C\delta^{\frac{1}{2}}\|\omega\cdot\nabla B\|^{\frac{3}{2}}_{H^{r+3}}\leq(G(t))^{\frac{3}{4}}$.即,$E(t)^{\frac{4}{3}}\leq G(t)$.最后,结合式(34),可得$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t)+cE(t)^{\frac{4}{3}}\leq 0$,因此

$$E(t)\leq C(1+t)^{-3}.\tag{35}$$

让式(11)中的 $l=N$,可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|u(t)\|^2_{H^N}+\|v(t)\|^2_{H^N}+\|B(t)\|^2_{H^N})\leq C(\|u(t)\|_{H^3}+\|v(t)\|_{H^3}+\|B(t)\|_{H^3}+\|u(t)\|^2_{H^2}+\|B(t)\|^2_{H^2})\times(\|u(t)\|^2_{H^N}+\|v(t)\|^2_{H^N}+\|B(t)\|^2_{H^N}).\tag{36}$$

从式(33)和(35)中,可以得出

$$\int_0^t(\|u(s)\|_{H^3}+\|v(s)\|_{H^3}+\|B(s)\|_{H^3}+\|u(s)\|^2_{H^2}+\|B(s)\|^2_{H^2})\mathrm{d}s\leq C.$$

然后在式(36)中使用 Gronwall's 不等式,则有

$$\|u(t)\|^2_{H^N}+\|v(t)\|^2_{H^N}+\|B(t)\|^2_{H^N}\leq C(\|u_0(t)\|^2_{H^N}+\|v_0(t)\|^2_{H^N}+\|B_0(t)\|^2_{H^N})\leq C\varepsilon^2.$$

让 ε 足够小,则有 $C\varepsilon\leq\dfrac{\delta}{2}$,能够把在时间上的局部解扩展为整体解.证毕.

参 考 文 献

[1] ERINGEN A C.Theory of micropolar fluids[J].Journal of Mathematics and Mechanics,1966.DOI:10.1512/IUMJ.1967.16.16001.

[2] ZHU W P.Sharp well-posedness and ill-posedness for the 3-D micropolar fluid system in Fourier-Besov spaces[J].Nonlinear Analysis:Real World Applications,2019,46:335-351.

[3] LIU S Q,SI Z J.Global well-posedness of the 3D micropolar equations with partial viscosity and damping[J].Applied Mathematics Letters,2020,109:106543.

[4] LUKASZEWICZ G.Micropolar fluids:theory and applications[M].Birkhäuser Boston:Springer Science Business Media,1999.

[5] LIU Q,CUI S B.Well-posedness for the incompressible magneto-hydrodynamic system on modulation spaces[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,2012,389(2):741-753.

[6] WEI D Y,ZHANG Z F.Global well-posedness of the MHD equations via the comparison principle[J].Science China Mathematics,2018,61(11):2111-2120.

[7] CHEN W J,ZHANG Z F,ZHOU J F.Global well-posedness for the 3-D MHD equations with partial diffusion in the periodic domain[J].Science China Mathematics,2022,65(2):309-318.

[8] WU J H.Generalized MHD equations[J].Journal of Differential Equations,2003,195(2):284-312.

[9] WU J H,ZHU Y.Global solutions of 3D incompressible MHD system with mixed partial dissipation and magnetic diffusion near an equilibrium[J].Advances in Mathematics,2021,377:107466.

[10] MELO W G,SANTOS T S R,ZINGANO P R.Global well-posedness of the 3D generalized MHD equations in Lei-Lin-Gevrey and Lei-Lin spaces[J].Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik,2020,71(6):1-12.

[11] AHMADI G,SHAHINPOOR M.Universal Stability of Magneto-Micropolar Fluid Motions[J].International Journal of Engineering Sci-

ence，1974，12(7)：657-663.

[12] ROJAS-MEDAR M A. Magneto-micropolar fluid motion: existence and uniqueness of strong solution[J]. Mathematische Nachrichten, 1997, 188(1): 301-319.

[13] YUAN J. Existence theorem and blow-up criterion of the strong solutions to the magneto-micropolar fluid equations[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2008, 31(9): 1113-1130.

[14] WANG Y X, WANG K Y. Global well-posedness of 3D magneto-micropolar fluid equations with mixed partial viscosity[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2017, 33: 348-362.

[15] WANG Y Z, LI W J. Global well-posedness of 3D magneto-micropolar fluid equations with mixed partial viscosity near an equilibrium[J]. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2021, 72(1): 1-23.

[16] LIU H, SUN C F, MENG F W. Global well-posedness of the 3D magneto-micropolar equations with damping[J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 94: 38-43.

[17] LIU H, SUN C F, XIN J. Well-posedness for the hyperviscous magneto-micropolar equations[J]. Applied Mathematics Letters, 2020, 107: 106403.

[18] DENG L H, SHANG H F. Global well-posedness for n-dimensional magneto-micropolar equations with hyperdissipation[J]. Applied Mathematics Letters, 2021, 111: 106610.

[19] YUAN B Q, ZHANG P P. Global well-posedness for the 3D magneto-micropolar equations with fractional dissipation[J]. New Zealand Journal of Mathematics, 2021, 51: 119-130.

Global well-posedness of the 3D magneto-micropolar fluid equations with infinite magnetic reynolds

Huang Huaxiong, Pu Xueke

(School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: In this paper, the global well-posedness of Cauchy problem for the 3D magneto-micropolar fluid equations with infinite magnetic Reynolds number is studied. It is proved that the Cauchy problem in the periodic domain T^3 is globally well-posed when the initial magnetic field is very close to the background magnetic field and satisfy the Diophantine condition.

Keywords: magneto-micropolar fluid equations; Diophantine condition; global well-posedness

[责任编校　陈留院　赵晓华]

(上接第 56 页)

Research on intelligent irrigation system based on high-precision sensors and convolutional neural networks

Xu Shizhou, Lu Chenshuo, Zhang Mengjie, Cheng Xiaoxiao, Zhong Yiming

(College of Electronic and Electrical Engineering, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: In order to realize intelligent and precise irrigation, image recognition technology based on convolutional neural network was applied in irrigation system with STM32 as the main control board. Combined with EC-5 soil moisture and temperature sensors to detect soil moisture and real-time temperature, image recognition technology is used to identify plant leaf status under different soil drought conditions. Precision irrigation is achieved by combining crop leaf state and soil moisture. The software design of each functional module was completed in Keil5, and the collected data was compared with the values set through the main control board to realize precise irrigation of plants. At the same time, users can observe the soil moisture and plant status in real time on the mobile phone, and can also operate remotely through the mobile phone. The test shows that this system can realize the precise irrigation of plants.

Keywords: STM32 main control board; convolutional neural network; EC-5 Soil moisture sensor; vegetative state; irrigate

[责任编校　杨浦　刘洋]