

PT 对称饱和非线性光波导中孤子对称破缺的研究

高亚琴¹, 李鹏飞²

(1.太原科技大学 应用科学学院,太原 030024;2.太原师范学院 物理系,太原 030031)

摘要:基于 PT 对称的饱和非线性波导模型,研究 PT 对称孤子的对称破缺现象.通过分析定态解的存在性,发现了 PT 对称的基态孤子和高阶孤子.当孤子功率增加,系统将会出现不对称形式的孤子.利用线性稳定性分析的方法研究了 PT 对称和不对称孤子的稳定性,结果发现 PT 对称的基态孤子的不稳定性诱发了孤子包络的对称性破缺,进而产生了不对称孤子.最后,研究了不同稳定性条件下孤子的动力学演化特性,并发现越过对称破缺点后 PT 对称的基态孤子具有振荡不稳定性,而 PT 对称的高阶孤子和不对称孤子具有一定的鲁棒性.

关键词:PT 对称性;饱和非线性;孤子;对称破缺

中图分类号:O437.5;TN818

文献标志码:A

1998 年 Bender 和 Boettcher 提出了满足宇称-时间反演(Parity Time,PT)对称的非厄米哈密顿算符具有纯的实数本征谱^[1].这一发现打破了量子力学中物理可观测量对应的算符为厄米算符的限制,建立了耗散系统与保守系统之间的联系,将量子力学的研究推广到复数域内^[2].尽管在理论方面取得了一定突破,但是在量子力学领域中通过实验证实 Bender 和 Boettcher 所提出的理论存在困难.由于量子力学中描述微观粒子的运动方程和经典光学中表述光傍轴传输的方程数学形式一致(薛定谔方程)^[3-4],所以光波导系统常用于模拟原子、分子的量子效应.另外,PT 对称系统中势函数为复函数,在光波导中势函数的实部和虚部具有明确的物理意义,即:偶对称的实部表示波导的折射率分布,奇对称的虚部表示增益和损耗^[5].PT 对称系统展现的新奇物理现象违背直观认识相,其中包括:损耗诱导的光学透明、光波的非互易传输、PT 对称破缺^[6-7].基于这些特性,新型的光学器件相继提出:PT 对称的光开关^[8]、单模激光器^[9]、放大器^[10]、单向传输的布拉格散射器^[11]、实现光波波段的隐身等^[12].PT 对称光学被自然杂志评为近十年中十大物理发现之一,促使人们在各个领域对 PT 对称系统展开研究^[13-15].

在非线性光学中,稳定性问题是孤子研究的一个重要方面,稳定的孤子抗扰动能能力强,可远距离的传输.因此,获得可稳定传输孤子对孤子的实际应用至关重要.在非线性波导中,孤子输入功率的增加以及增益和损耗效应的引入通常会降低孤子的稳定性.研究表明,不稳定性的增加会导致孤子出现对称破缺现象(包络形状由对称分布转为不对称分布的物理过程),因此,对称性破缺是非线性系统中光孤子的一个重要特性.更重要的是:孤子发生对称破缺后不对称孤子的稳定性通常会增强,这为实际应用提供了依据.

在无增益损耗的非线性波导耦合器以及具有双峰结构折射率分布的非线性波导中,随着孤子输入功率的增大孤子出现对称性破缺^[16-17].20 世纪 90 年代在无增益和损耗的非线性波导中,孤子的对称破缺现象是光孤子研究的热点问题.然而,在研究 PT 对称非线性波导的初始阶段,人们一直没有发现 PT 对称孤子的对称破缺现象,甚至一度认为在 PT 对称非线性波导中,并不存在不对称形式的孤子^[18].但是,最近的研究表明:在一类满足特定条件的 PT 对称势函数中,可以存在不对称形式的孤子^[19],这意味着 PT 对称的孤子也能发生对称性破缺.目前,有关 PT 对称孤子的对称破缺现象只集中于克尔非线性模型中,而其他种类的非线

收稿日期:2018-04-02;修回日期:2018-04-26.

基金项目:国家自然科学基金(11747063);太原科技大学博士人才项目(20152043).

作者简介:高亚琴(1987-),女,山西运城人,太原科技大学讲师,博士,研究方向为高能物理方向数值计算,E-mail:gyq610@163.com.

通信作者:李鹏飞,E-mail:lipf@tynu.edu.cn.

性波导涉及很少。

本文考虑 PT 对称的饱和非线性波导模型,讨论孤子对称破缺的现象.首先,研究 PT 对称孤子和不对称孤子的存在性问题.求解出孤子解后,通过线性稳定性分析方法研究孤子的稳定性,获取其稳定存在的参数区域,并进一步讨论孤子的动力学特性,获得具有良好鲁棒性的孤子解。

1 模型简介

在傍轴近似条件下,光波在饱和非线性平板波导中传输过程可以通过一维的无量纲的非线性薛定谔方程描述:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + U(\xi)\psi + \sigma \frac{|\psi|^2 \psi}{1 + S |\psi|^2} = 0, \quad (1)$$

其中 $\psi(\xi, \zeta)$ 表示光场的包络, ξ 和 ζ 分别表示横向和传输方向的坐标. $U(\xi) \equiv V(\xi) + iW(\xi)$ 表示复数势函数,其中势函数的实部表示光波导中线性折射率的分布,虚部表示增益和损耗.在 PT 对称的条件下,势函数满足 $U(\xi) = U^*(-\xi)$,其中“*”表示复共轭.由此可得,势函数的实部 $V(\xi)$ 是偶函数,即:线性折射率的分布为偶对称的形式.同时,势函数的虚部 $W(\xi)$ 为奇对称形式,即:增益和损耗效应要求相等. $\sigma = \pm 1$ 分别对应自聚焦(+)和自散焦(-)两种饱和和非线性的情况, S 表示饱和和非线性参数.方程(1)所描述的饱和非线性波导模型中可存在 PT 对称的带隙孤子^[20]、PT 对称的多峰孤子^[21]、PT 对称的缺陷孤子^[22]。

非线性光波导中 PT 对称孤子的对称破缺现象只能存在于一类特殊形式的 PT 对称势函数中,该势函数满足以下条件

$$U(\xi) = f^2(\xi) + i \frac{df(\xi)}{d\xi}. \quad (2)$$

方程中 $f(\xi)$ 是一个任意的实的偶函数.本文选取函数

$$f(\xi) = W_0 \left[\operatorname{sech}\left(\frac{\xi + \xi_0}{\chi_0}\right) + \operatorname{sech}\left(\frac{\xi - \xi_0}{\chi_0}\right) \right]. \quad (3)$$

由此可得,PT 对称的势函数的实部为

$$V(\xi) = W_0^2 \left[\operatorname{sech}\left(\frac{\xi + \xi_0}{\chi_0}\right) + \operatorname{sech}\left(\frac{\xi - \xi_0}{\chi_0}\right) \right], \quad (4)$$

其中, W_0^2 表征势函数实部的调制强度, ξ_0 表征势函数两个峰之间的间距, χ_0 则表征势函数单个峰的宽度. PT 对称的势函数的虚部则为

$$W(\xi) = -\frac{W_0}{\chi_0} \left[\operatorname{sech}\left(\frac{\xi + \xi_0}{\chi_0}\right) \tanh\left(\frac{\xi + \xi_0}{\chi_0}\right) + \operatorname{sech}\left(\frac{\xi - \xi_0}{\chi_0}\right) \tanh\left(\frac{\xi - \xi_0}{\chi_0}\right) \right]. \quad (5)$$

研究自聚焦非线性的情况.首先,考虑方程定态解的存在性问题.假设定态解的形式为

$$\Psi(\zeta, \xi) = \phi(\xi) \exp(i\beta\zeta),$$

其中 $\phi(\xi)$ 表示非线性情况下的光学模式.由于 PT 对称势函数的存在, $\phi(\xi)$ 本身是一个复函数, $|\phi(\xi)|^2$ 则表示光场强度的分布. β 表示光波沿着传输方向 ζ 的传播常数.

将定态解的形式代入到方程,得到下面的方程

$$\frac{d^2 \phi(\xi)}{d\xi^2} + U(\xi)\phi(\xi) + \frac{|\phi|^2 \phi}{1 + S |\phi|^2} - \beta\phi(\xi) = 0. \quad (6)$$

2 PT 对称孤子和不对称的孤子及其功率曲线

首先研究方程中孤子的存在性问题.对于方程和所表示的 PT 对称势函数,可能存在两种形式的孤子解,即:PT 对称孤子解和不对称的孤子解.这两种孤子解可以利用平方算符的方法对方程进行数值求解而得到^[23],具体结果见图 1.

首先分析饱和非线性参数 $S=1$ 的情况.图 1(a) 表示 PT 对称的势函数的实部和虚部,即:方程和.势函数的实部为偶对称的双峰结构,虚部为奇函数的分布形式.本文中,势函数的参数 $W_0 = 1.2$, ξ_0 势函数两个峰

之间的间距 $\xi_0 = 2$, 势函数的宽度 $\chi_0 = 1.2$. 在给定孤子功率的情况下, 其中孤子的功率定义为 $P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi|^2 d\xi$, 可以得到方程数值解, 即: 非线性的光学模式 $\phi(\xi)$ 以及对应的传播常数 β . 通过改变孤子功率可以求解出一系列的传播常数, 这些传播常数组成功率曲线. 图 1(b) 表示 PT 对称的基态(SS1)和高阶孤子对应的功率曲线, 其中高阶孤子包括双峰结构的孤子(SS2)和三峰结构的孤子(SS3). 随着孤子功率的增加, 在 PT 对称的基态孤子的功率曲线上出现一个分支, 该分支表示不对称孤子(AS)对应的功率曲线. 图 1(c) 表示 PT 对称的基态孤子的分布, 其实部是偶对称, 虚部为奇对称的形式, 即: 满足 PT 对称条件. 图 1(d) 表示不对称孤子的分布, 其中实部和虚部均呈现不对称的形式. 由此可见, 当孤子功率增加的时候, 基态孤子会出现由对称到不对称分布的转变, 也就是所谓的对称破缺现象.

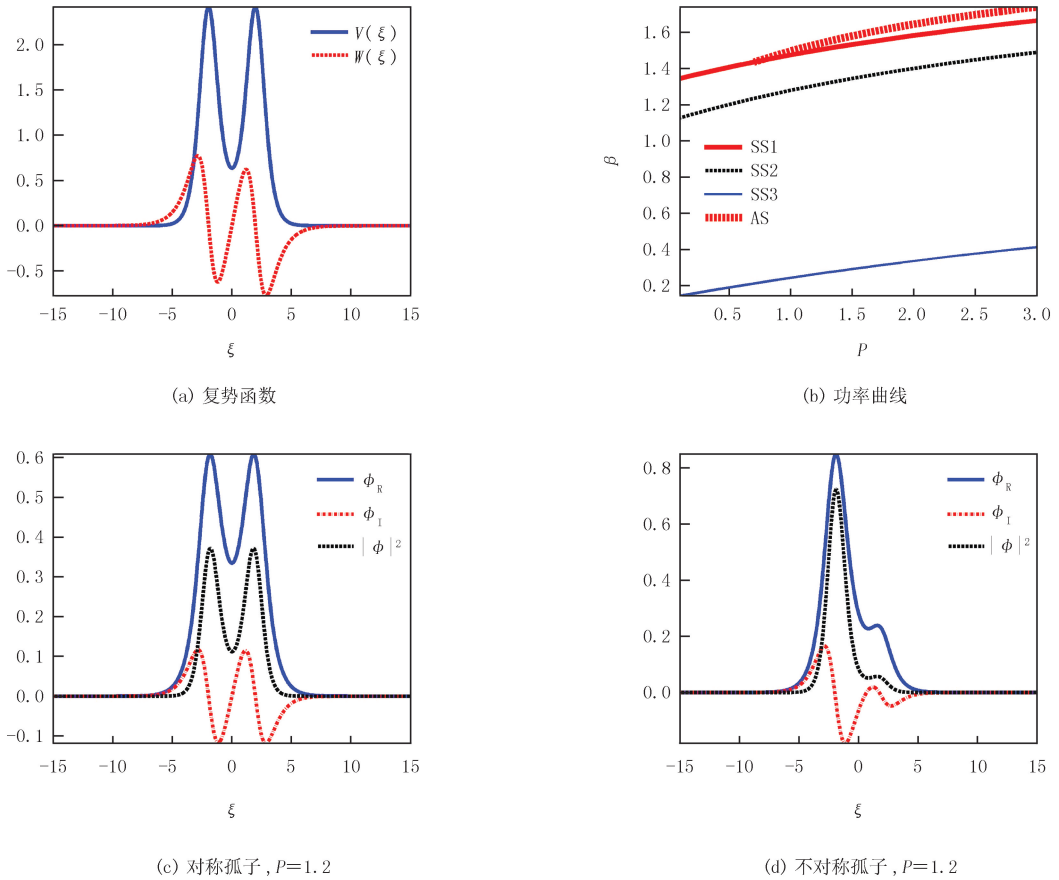


图 1 PT 对称孤子和不对称孤子的功率曲线

为了进一步研究孤子功率增长对 PT 对称孤子和不对称孤子分布的影响, 计算并给出孤子分布对孤子功率的依赖关系(图 2). 在此需要指出的是由于势函数是双峰结构, 所以 PT 对称的基态孤子和 PT 对称双峰结构的高阶孤子都具有双峰结构, 但是二者的实部和虚部的对称性正好相反. 由图 2 可得, 随着孤子功率的增加, PT 对称孤子的振幅不断增大. 不对称孤子的振幅也随着孤子功率的增加而增大, 不同的是其强度分布逐渐偏向于势函数的其中一个峰. 这表明随着孤子功率的增加, 不对称孤子的不对称度更将明显.

下面研究饱和和非线性强度对 PT 对称破缺现象的影响. 为了对比强弱两种饱和和非线性效应, 分别选取饱和和非线性参数, 并研究相应的 PT 对称孤子对称破缺现象. 如图 3 所示: 弱饱和和非线性对应的对称破缺的孤子功率为 0.5, 而强饱和和非线性情况下其对称破缺的孤子功率为 0.68, 这表明强的饱和和非线性对孤子的对称破缺有明显的抑制作用. 给出了强弱两种饱和和非线性效应情况下系统中最大传播常数所对应的孤子的分布, 见图 3(c)和(d). 结果显示, 随着孤子功率的增加, 一方面孤子形状从 PT 对称逐渐向不对称的形式转变; 另一方面, 不对称孤子的不对称度不断增加.

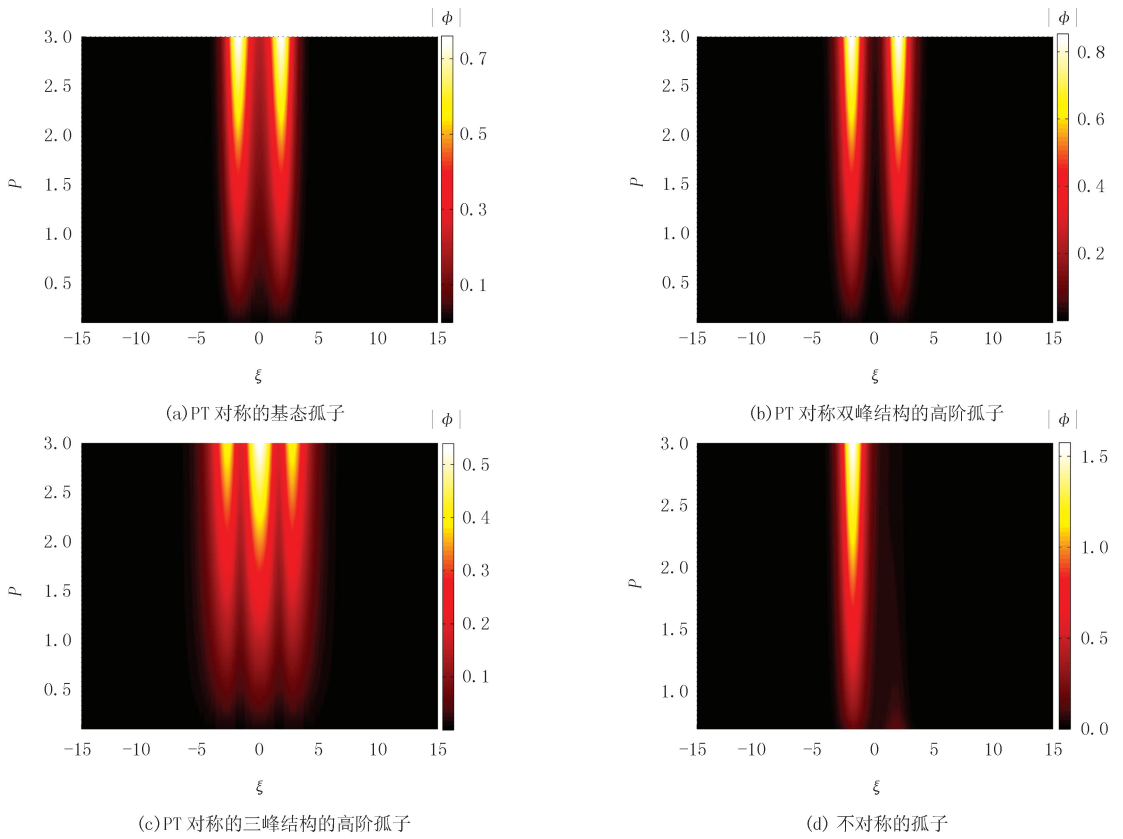
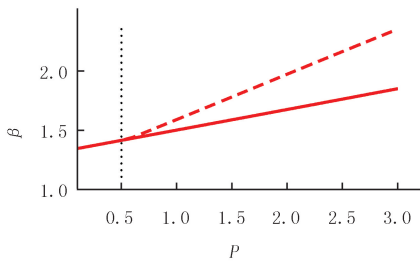
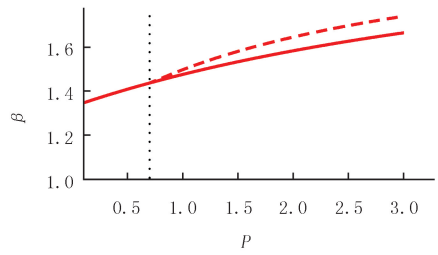


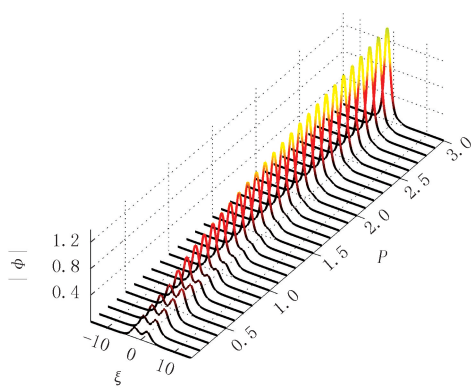
图 2 PT 对称孤子和不对称孤子对孤子分布和孤子功率之间的依赖关系



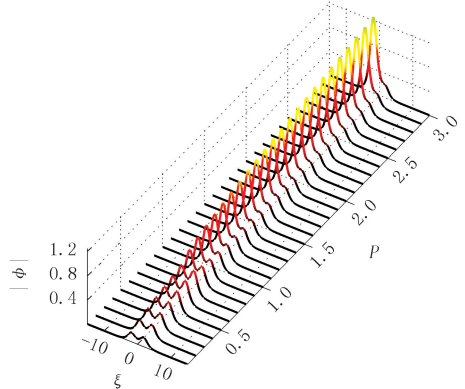
(a) 表示弱饱和和非线性 $S=0.1$ 情况下, PT 对称的基态孤子 (红色实线) 和不对称孤子 (红色虚线) 的功率曲线



(b) 表示强饱和和非线性 $S=1$ 情况下, PT 对称的基态孤子 (红色实线) 和不对称孤子 (红色虚线) 的功率曲线



(c) 弱饱和和非线性 $S=0.1$ 情况下, 孤子形状从 PT 对称到不对称转变过程



(d) 强饱和和非线性 $S=1$ 情况下, 孤子形状从 PT 对称到不对称转变的过程

图 3 不同的饱和和非线性强度对 PT 对称孤子对称破缺的影响. (a) 和 (b) 中垂直的虚线表示对称破缺对应的孤子功率

上述结果表明,对于 PT 对称的势函数,存在 PT 对称和不对称的孤子解,但是,引起 PT 对称孤子出现对称破缺现象的原因尚不清楚,因此,将进一步研究孤子的稳定性问题,并通过分析孤子的稳定性去阐明对称破缺现象的机制.

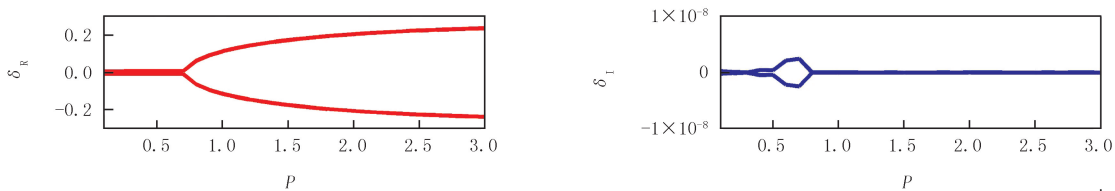
3 PT 对称孤子和不对称的孤子的稳定性

为了得到 PT 对称孤子和不对称的孤子的稳定性,通过线性稳定性分析的技术研究孤子的不稳定增长谱(见图 4).首先,定态的孤子解 $\phi(\xi)$ 将被施加一个扰动,扰动后的形式可以表示为

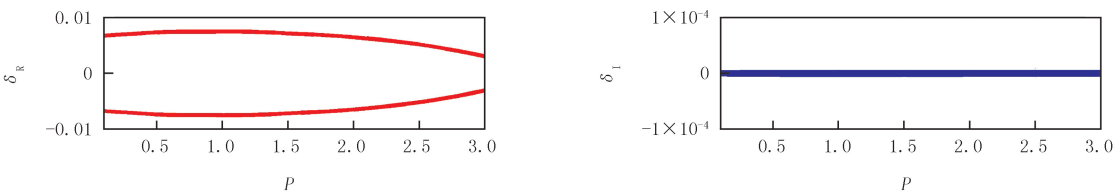
$$\psi(\zeta, \xi) = e^{i\beta\zeta} [\phi(\xi) + u(\xi) e^{\beta\zeta} + v^*(\xi) e^{-\beta\zeta}], \quad (7)$$

其中 β 为孤子的传播常数, $u(\xi)$ 和 $v(\xi)$ 是施加的微小扰动,并且满足 $|u|, |v| \ll |\phi|$. 在此基础上,将方程的形式代入到方程,同时忽略掉非线性项,可以得到线性化的本征值方程

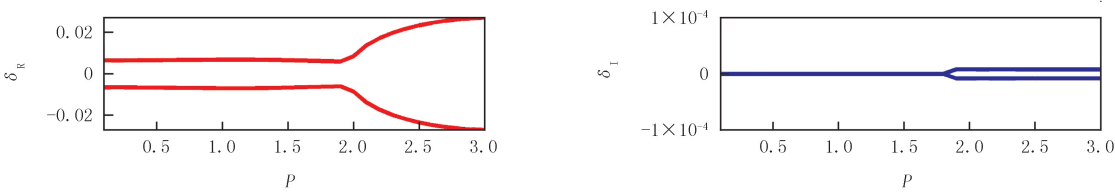
$$i \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (8)$$



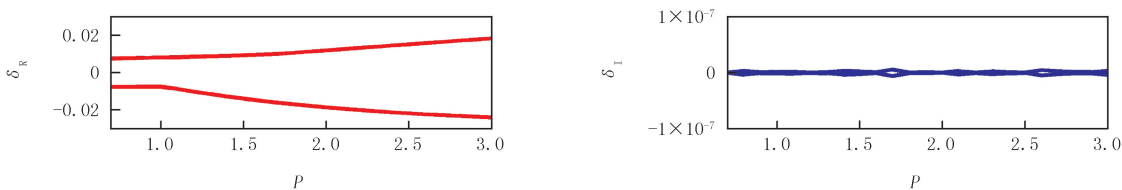
(a) PT 对称基态孤子的 δ 情况



(b) PT 对称双峰结构的高阶孤子线性稳定性分析的本征值



(c) PT 对称三峰结构的高阶孤子线性稳定性分析的本征值



(d) 不对称孤子线性稳定性分析的本征值

图 4 PT 对称孤子和不对称孤子的线性稳定性分析的本征值与孤子功率之间的依赖关系. 饱和和非线性参数 $S=1$

L_{11}, L_{12}, L_{21} 和 L_{22} 分别表示线性本征问题的矩阵元,其具体形式为

$$L_{11} = \frac{d^2}{d\xi^2} + U(\xi) - \beta + \sigma \frac{2|\phi|^2}{1+S|\phi|^2} - \sigma \frac{S|\phi|^4}{(1+S|\phi|^2)^2},$$

$$L_{22} = - \left[\frac{d^2}{d\xi^2} + U^*(\xi) - \beta + \sigma \frac{2|\phi|^2}{1+S|\phi|^2} - \sigma \frac{S|\phi|^4}{(1+S|\phi|^2)^2} \right],$$

$$L_{12} = \sigma \left[\frac{2\phi^2}{1+S|\phi|^2} - \frac{S\phi^2|\phi|^2}{(1+S|\phi|^2)^2} \right], L_{21} = \sigma \left[\frac{S\phi^{*2}|\phi|^2}{(1+S|\phi|^2)^2} - \frac{2\phi^{*2}}{1+S|\phi|^2} \right].$$

通过求解线性方程的本征值 δ , 可以得到孤子解的不稳定增长谱. 通常情况下, 本征值 δ 为复数, 实部表示孤子解的不稳定增长率, 虚部表示孤子传输过程中形状振荡. 理论上, 当本征值 δ 的实部的绝对值为零的时候, 孤子解是线性稳定的; 当本征值 δ 实部的绝对值不为零的时候, 孤子解为线性不稳定, 这种情况下孤子的振幅在传输过程中将指数增长, 最终导致孤子形状的畸变. 实际上, 对线性方程进行数值求解所得的本征值 δ 实部的绝对值的最小值并不严格等于零. 分别研究了 PT 对称的孤子和不对称孤子的线性稳定性问题的本征值. 由图 4(a) 可知, PT 对称的基态孤子在孤子功率小于 0.68 的情况下是线性稳定的. 这表明当 PT 对称的基态孤子开始不稳定时, 出现了不对称的孤子. 由此可见, PT 对称的基态孤子的不稳定性导致对称破缺, 进而产生不对称孤子.

图 4(b) 和 (c) 显示线性本征值实部的绝对值较小, 表明 PT 对称的高阶孤子具有弱不稳定性. 图 4(d) 则说明不对称孤子同样具有弱不稳定性. 除此之外, 发现对称孤子的线性本征值的实部以及虚部是成对出现, 并且关于零点横坐标对称分布, 而不对称孤子的线性本征值尽管是成对出现, 但是不具备对称性.

在图 5 中, 选取特定的孤子功率 $P=1.2$, 并给出相应的线性稳定性本征值谱, 由图 5(a) 可见, PT 对称的基态孤子不稳定增长率最大. 为了进一步验证线性稳定性的分析结果, 选取了图 5 中对应的孤子进行直接的数值模拟传输. 在传输的初始位置施加 5% 的随机扰动, 结果表明: PT 对称的基态孤子在传输过程体现了不稳定性, 传输很短的距离后振幅和形状开始周期性改变, 见图 6(a); PT 对称的高阶孤子和不对称孤子由于弱不稳定性的作用其振幅在传输过程中出现小的振荡, 但是形状保持不变. 这表明不对称孤子具有一定的鲁棒性.

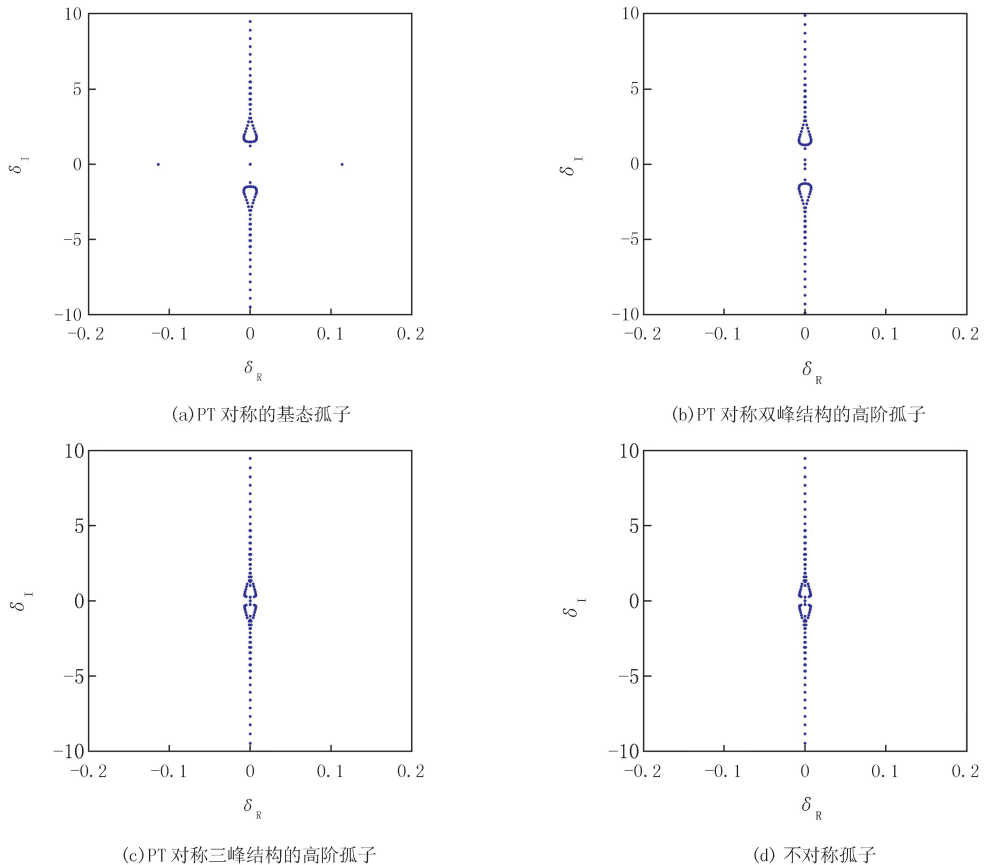


图 5 PT 对称孤子和不对称孤子对孤子线性稳定性分析的本征谱. 孤子功率 $P=1.2$, 饱和非线性参数 $S=1$

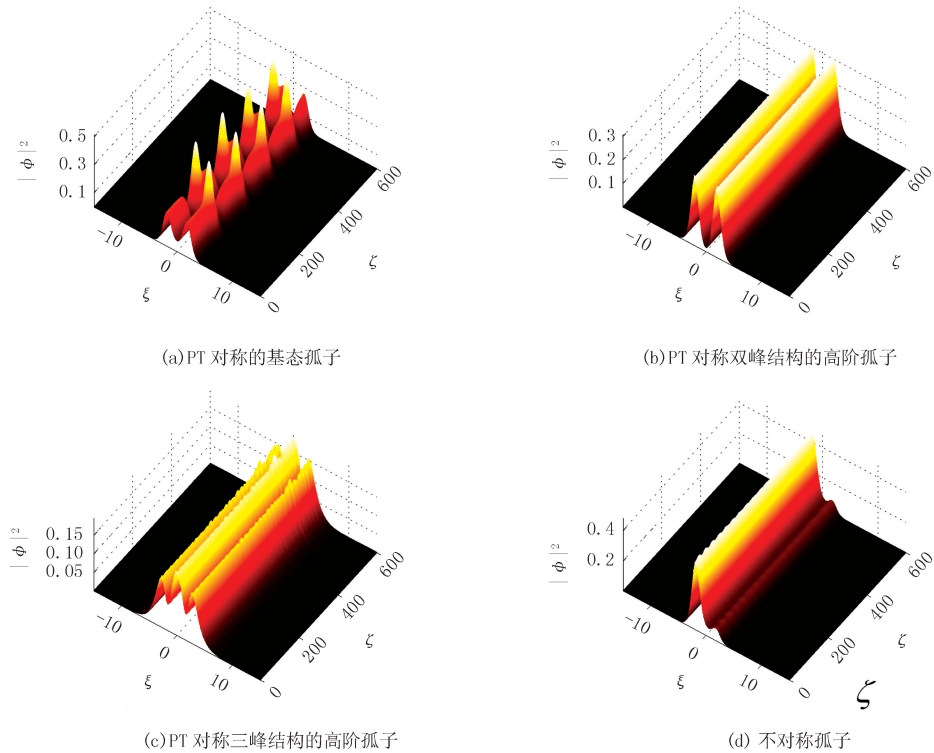


图 6 PT 对称孤子和不对称孤子对孤子动力学演化结果. 孤子功率 $P=1.2$, 饱和和非线性参数 $S=1$

4 结 论

本文以 PT 对称的饱和非线性波导为研究对象,分析了 PT 对称孤子对称破缺的现象.结果表明,该模型中存在 PT 对称基态和高阶孤子以及不对称孤子.通过线性稳定性分析发现 PT 对称的基态孤子的不稳定性导致对称破缺的现象.直接的数值模拟进一步验证了线性稳定性分析的结果,同时表明不对称孤子具有一定的鲁棒性.另外,发现孤子的对称破缺点与饱和和非线性的强弱有关.因此,在 PT 对称的饱和非线性波导中可以通过控制饱和和非线性的大小进而间接地改变孤子的破缺点,进而使得孤子的形状在对称和不对称的形式之间转变.

参 考 文 献

- [1] Bender C M,Boettcher S.Real spectra in non-Hermitian Hamiltonians having PT symmetry[J].Phys Rev Lett,1998,80(24):5243-5246.
- [2] Bender C M,Brody D C,Jones H F.Complex extension of quantum mechanics[J].Phys Rev Lett,2002,89(27):270401.
- [3] 毛长丹,吴红燕,陆樟献.含高阶色散效应的 NLS 方程的孤子解研究[J].河南师范大学学报(自然科学版),2009,37(1):78-81.
- [4] 尚晓星.五次非线性对光孤子传输的影响[J].河南师范大学学报(自然科学版),2010,38(5):108-110.
- [5] El-Ganainy R,Makris K G,Christodoulides D N, et al.Optical PT-symmetric structures[J].Opt Lett,2007,32(17):2632-2634.
- [6] Guo A,Salamo G J,Duchesne D, et al.Observation of PT -symmetry breaking in complex optical potentials[J].Phys Rev Lett,2009,103(9):093902.
- [7] Rüter C E,Makris K G,El-Ganainy R, et al.Observation of parity-time symmetry in optics[J].Nature Physics,2010,6:192-195.
- [8] Nazari F,Nazari M,Moravvej-Farshi M K.A 2×2 spatial optical switch based on PT-symmetry[J].Opt Lett,2011,36(22):4368-4370.
- [9] Lupu A,Benisty H,Degiron A.Switching using PT symmetry in plasmonic systems:positive role of the losses[J].Opt Exp,2013,21(18):21651-21668.
- [10] FENG Liang,WONG Zijing,MA Renmin,WANG Yuan,ZHANG Xiang,Single-mode laser by parity-time symmetry breaking[J].Science,2014,346(6212):972-975.
- [11] Lin Zin,Ramezani H,Eichelkraut T, et al.Unidirectional Invisibility Induced by PT-Symmetric Periodic Structures[J].Phys Rev Lett,2011,106(21):213901.

- [12] Feng L, Xu Y L, Fegadolli W S, et al. Experimental demonstration of a unidirectional reflectionless parity-time metamaterial at optical frequencies[J]. *Nature Materials*, 2013, 12(2): 108-113.
- [13] Konotop V V, Yang J K, Ze Y L. Nonlinear waves in PT-symmetric systems[J]. *Rev Mod Phys*, 2016, 88(3): 035002.
- [14] El-Ganainy R, Makris K G, Khajavikhan M, et al. Non-Hermitian physics and PT symmetry[J]. *Nature Physics*, 2018, 14: 11-19.
- [15] Feng L, El-Ganainy R, Ge L. Non-Hermitian photonics based on parity-time symmetry[J]. *Nature Photonics*, 2017, 11: 752-762
- [16] Akhmediev N, Ankiewicz A. Novel soliton states and bifurcation phenomena in nonlinear fiber couplers[J]. *Phys Rev Lett*, 1993, 70(16): 2395-2398.
- [17] Malomed B A, Skinner I M, Chu P L, et al. Symmetric and asymmetric solitons in twin-core nonlinear optical fiber[J]. *Phys Rev E*, 1996, 53(4): 4084-4091.
- [18] YANG Jianke. Can parity time symmetric potentials support families of non-parity time symmetric solitons? [J]. *Stud Appl Math*, 2014, 132: 332-353.
- [19] YANG Jianke. Symmetry breaking of solitons in two dimensional complex potentials[J]. *Phys Rev E*, 2015, 91(2): 023201.
- [20] CAO Pu, ZHU Xing, HE Yingji, et al. Gap solitons supported by parity-time-symmetric optical lattices with defocusing saturable nonlinearity[J]. *Opt Commun*, 2014, 316: 190-197.
- [21] ZHU Xing, LI Huagang. Multihump solitons in two-dimensional parity-time-symmetric optical lattices with focusing saturable nonlinearity[J]. *Eur Phys J D*, 2016, 70: 14.
- [22] LI Lei, LI Huagang, LAI Tianshu. Defect solitons in parity-time symmetric superlattices with focusing saturable nonlinearity[J]. *Opt Commun*, 2015, 349: 171-179.
- [23] Yang Jianke, Lakoba T I. Universally-convergent squared-operator iteration methods for solitary waves in general nonlinear wave equations[J]. *Stud Appl Math*, 2007, 118(2): 153-197.

Symmetry breaking of soliton in parity-time symmetric saturable nonlinearity waveguides

Gao Yaqin¹, Li Pengfei²

(1. College of Applied Science, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China;

2. Department of Physics, Taiyuan Normal University, Taiyuan 030031, China)

Abstract: Based on PT-symmetric saturable nonlinear waveguide model, we study the phenomenon of symmetry breaking. The existence of stationary solutions are analyzed. It is found that there exist the PT-symmetric fundamental soliton and high-order soliton. When the soliton power increases, solitons with asymmetric profiles appear in the system. Then, stabilities of PT-symmetric and asymmetric solitons are investigated by using the method of linear stability analysis, the results indicate that the symmetry breaking of solitons are triggered by the instability of PT-symmetric fundamental soliton, and this leads to asymmetric solitons in the system. Finally, we study the dynamical properties with different stabilities. It is found that PT-symmetric fundamental solitons are unstable with oscillatory amplitudes when the soliton power exceeds the symmetry breaking point. However, the corresponding PT-symmetric high-order solitons as well as asymmetric solitons are robust.

Keywords: PT-symmetry; saturable nonlinearity; soliton; symmetry breaking

[责任编辑 杨浦]