文章编号:1000-2367(2020)03-0019-07 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2020.03.004

具有非线性扩散和时滞的 HollingⅢ类功能性反应捕食系统的稳定性分析

梁桂珍[1],赵晓[1,2]

(1.新乡学院 数学与信息科学学院,河南 新乡 453003;2.郑州大学 数学与统计学院,郑州 450000)

摘 要:研究了一类具有非线性扩散和 HollingⅢ类功能性反应且同时具有连续时滞和离散时滞的非自治捕食竞争系统.运用比较定理,得到系统一致持久生存的充分条件.利用 Liapunov 稳定性理论,得到相应周期系统正周期解存在唯一及全局渐近稳定的充分条件.最后,通过数值模拟来验证结论的正确性.

关键词:非线性扩散;时滞;HollingⅢ类功能反应;一致持久;全局渐近稳定

中图分类号:O175.13 **文献标志码**:A

在现实生活中,种群栖息地有时会遭到破坏和分裂,从而导致一些种群数量下降以致灭绝,为了防止和减少种群的灭绝,有关扩散现象的研究是十分必要的.文献[1]将扩散分为线性扩散和非线性扩散,近年来,有关线性扩散系统[2-3]的研究已有很多,但关于非线性扩散[4-5]的研究却较少.此外,人们普遍认为在种群间相互作用中时滞是不可避免的,文献[6]研究了时滞对生物种群渐近性态的影响.随着生物数学和人工神经网络等学科的发展,越来越多的学者注意到现实问题所受时滞影响,同时考虑到连续时滞和离散时滞情况[7].本文在文献[8]的基础之上,研究一类同时具有连续时滞和离散时滞的 HollingⅢ类功能反应和非线性扩散的 3 种群生态系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)= x_1(t)[b_1(t)-a_1(t)x_1(t)-c_1(t)z(t)-\dfrac{d_1(t)x_1(t)y(t)}{1+\alpha(t)x_1^2(t)}]+D_1(t)x_1(t)[x_2(t)-x_1(t)],\\ \dot{x}_2(t)= x_2(t)[b_2(t)-a_2(t)x_2(t)]+D_2(t)x_2(t)[x_1(t)-x_2(t)],\\ \dot{z}(t)= z(t)[b_3(t)-a_3(t)z(t)-a_4(t)\displaystyle\int_{-\tau_1}^{0}k(s)z(t+s)\mathrm{d}s-c_2(t)x_1(t)-\dfrac{d_2(t)z(t)y(t)}{1+\beta(t)z^2(t)}],\\ \dot{y}(t)= y(t)[-b_4(t)-a_5(t)y(t)+\dfrac{e_1(t)x_1^2(t-\tau_2)}{1+\alpha(t)x_1^2(t-\tau_2)}+\dfrac{e_2(t)z^2(t-\tau_3)}{1+\beta(t)z^2(t-\tau_3)}],\end{cases}\tag{1}$$

其中,$x_1(t)$,$y(t)$,$z(t)$ 分别表示 t 时刻在斑块 I 中种群 X,Y,Z 的密度,$x_2(t)$ 表示 t 时刻种群 X 在斑块 II 中的密度;种群 X 可以在斑块 I 和 II 之间相互扩散,且为非线性扩散,扩散率为 $D_i(t)(i=1,2)$,而种群 Y,Z 被限制在斑块 I 内活动;食饵种群 X,Z 是互相竞争的,捕食者种群 Y 具有 HollingⅢ 类功能性反应;$a_i(t)(i=1,2,3,4,5)$ 反映种群的密度制约因素,$b_i(t)(i=1,2,3,4)$ 表示种群在 t 时刻的内禀增长率,$\int_{-\tau_1}^{0}k(s)z(t+s)\mathrm{d}s$ 表示过去一段历史时期的种群规模对当前种群规模增长的总体影响,参数 τ_2,τ_3 表示捕食者的消化时滞或妊娠时滞,它代表只有成年捕食者才能繁育下一代.

设 $f(x)$ 是$[0,+\infty)$ 上连续有界的正周期函数,为讨论方便,记

收稿日期:2018-07-29;**修回日期**:2019-03-11.

基金项目:国家自然科学基金(11871238);河南省高等学校重点科研项目(20B110014);新乡学院科技创新项目(12ZB17).

作者简介(通信作者):梁桂珍(1964-),女,内蒙古临河人,新乡学院教授,研究方向为生物数学,E-mail:lgz3361@163.com.

$$f^L=\inf_{x\in[0,+\infty)} f(x),\ f^U=\sup_{x\in[0,+\infty)} f(x).$$

在本文中,对系统(1)总有以下假设成立:

(H_1) $a_k(t),b_j(t),c_i(t),d_i(t),e_i(t),D_i(t),\alpha(t),\beta(t)$ 均为连续有界的严格正 ω 周期函数,且满足

$$\min\{a_k^L,b_j^L,c_i^L,d_i^L,e_i^L,D_i^L,\alpha^L,\beta^L\}>0,$$
$$\max\{a_k^U,b_j^U,c_i^U,d_i^U,e_i^U,D_i^U,\alpha^U,\beta^U\}<+\infty,(i=1,2;j=1,2,3,4;k=1,2,3,4,5).$$

(H_2) $k(s)$ 是定义在 $[-\tau_1,0]$ 上的非负分段连续函数,且有 $\int_{-\tau_1}^0 k(s)\mathrm{d}s=1$.

系统(1)的初始条件为

$$x_i(s)=\Phi_i(s),z(s)=\Phi_3(s),y(s)=\Phi_4(s),i=1,2,\ \Phi_j(0)>0,j=1,2,3,4,s\in[-\tau_1,0],\tag{2}$$

其中,$\tau=\max\{\tau_1,\tau_2,\tau_3\}$,$\Phi=(\Phi_1(s),\Phi_2(s),\Phi_3(s),\Phi_4(s))\in C([-\tau,0],R_+^4)$,而 $C([-\tau,0],R_+^4)$ 是由将 $[-\tau_1,0]$ 映入 R_+^4 的非负连续函数构成的 Banach 空间.这里

$$R_+^4=\{x_1,x_2,x_3,x_4\in R_+^4\mid x_1>0,x_2>0,x_3>0,x_4>0\}.$$

1 一致持久性

定义 1 如果存在一个紧区域 $D\subset \mathrm{Int}R_+^4$,使得系统(1)满足初始条件(2)的每一个解 $X(t)=(x_1(t),x_2(t),z(t),y(t))$ 都进入并最终滞留在区域 D 中,则称系统(1)是一致持久的.

引理 1 R_+^4 是系统(1)满足条件(2)的正向不变集.

证明 设 $X(t)=(x_1(t),x_2(t),z(t),y(t))$ 是系统(1)满足初始条件(2)的任一解.由(1)的前两个方程和(2)式得:$x_1(t)=x_1(0)\exp(\int_0^t(b_1(s)-a_1(s)x_1(s)-c_1(s)z(s)-\dfrac{d_1(s)x_1(s)y(s)}{1+\alpha(t)x_1^2(s)}+D_1(s)(x_2(s)-x_1(s)))\mathrm{d}s)>0$,$x_2(t)=x_2(0)\exp(\int_0^t(b_2(s)-a_2(s)x_2(s)+D_2(s)(x_1(s)-x_2(s)))\mathrm{d}s)>0$.

结合(1)式可知,$x_1(t)>0,x_2(t)>0(t\geq-\tau)$.

当 $t\in[0,\tau]$ 时,$(t-\tau)\in[-\tau,0]$,由(2)知,$x_1(t-\tau)>0$.由(1)的后两个方程可知,

$$y(t)\geq y(0)\exp(\int_0^t(-b_4^L-a_5^Ly(s)+\frac{e_1^U}{\alpha^L}+\frac{e_2^U}{\beta^L})\mathrm{d}s)>0,$$

$$z(t)\geq z(0)\exp(\int_0^t(b_3(s)-a_3(s)z(s))\mathrm{d}s)>0.$$

故当 $t\in[0,\tau]$ 时,$y(t)>0,z(t)>0$.当 $t\in[\tau,2\tau]$ 时,$(t-\tau)\in[0,\tau]$,同理可证,$y(t)>0,z(t)>0$.依此可证得,$y(t)>0,z(t)>0(t\in[0,+\infty))$.结合(2)式可知,$y(t)>0,z(t)>0(t\geq-\tau)$.

故满足条件(2)的周期系统(1)的任一解都为正,且集合 R_+^4 是周期系统(1)的正向不变集.

定理 1 令 $X(t)=(x_1(t),x_2(t),z(t),y(t))$ 表示系统(1)满足初始条件(2)的任意正解,若有 (H_3) $e_1^U\beta^L+e_2^U\alpha^L-b_4^L\alpha^L\beta^L>0$,则存在 $T>0$,使得当 $t>T$ 时有

$$x_i(t)\leq M_1(i=1,2),z(t)\leq M_2,y(t)\leq M_3,\tag{3}$$

其中 $0<M_i^*\leq M_i(i=1,2,3)$,$M_1^*=\max\{\dfrac{b_1^U}{a_1^L},\dfrac{b_2^U}{a_2^L}\}$,$M_2^*=\dfrac{b_3^U}{a_3^L}$,$M_3^*=\dfrac{e_1^U\beta^L+e_2^U\alpha^L-b_4^L\alpha^L\beta^L}{a_5^L\alpha^L\beta^L}$.

证明 令 $V(t)=\max\{x_1(t),x_2(t)\}$,则 $V(t)$ 沿系统(1)正解的右上导数为

(1)若 $V(t)=x_1(t)$,则 $D^+V(t)=\dot{x}_1(t)\leq x_1(t)[b_1^U-a_1^Lx_1(t)]$.

(2)若 $V(t)=x_2(t)$,则 $D^+V(t)=\dot{x}_2(t)\leq x_2(t)[b_2^U-a_2^Lx_2(t)]$.由上述条件可得 $D^+V(t)\leq x_i(t)[b_i^U-a_i^Lx_i(t)](i=1,2)$.

由上式,有(Ⅰ)如果 $\max\{x_1(0),x_2(0)\}\leq M_1$,则 $\max\{x_1(t),x_2(t)\}\leq M_1,t\geq0$;

(Ⅱ)如果 $\max\{x_1(0),x_2(0)\}>M_1$,令 $-\alpha=\max\{M_1(b_1^U-a_1^LM_1),M_1(b_2^U-a_2^LM_1)\},\alpha>0$.

考虑下面 3 种情况.

(a)当 $x_1(0) > x_2(0)$ 时，则 $V(0) = x_1(0) > M_1$，由函数连续性可知，存在 $\varepsilon > 0$，使得当 $t \in [0,\varepsilon)$ 时，有 $V(t) = x_1(t) > M_1$，$D^+ V(t) = \dot{x}_1(t) \le x_1(t)[b_1^U - a_1^L x_1(t)] < -\alpha < 0$.

(b)当 $x_1(0) < x_2(0)$ 时，则 $V(0) = x_2(0) > M_1$，同样存在 $\varepsilon > 0$，使得当 $t \in [0,\varepsilon)$ 时，有

$$V(t) = x_2(t) > M_1,\ D^+ V(t) = \dot{x}_2(t) \le x_2(t)[b_2^U - a_2^L x_2(t)] < -\alpha < 0.$$

(c)当 $x_1(0) = x_2(0)$ 时，则 $V(0) = x_1(0) = x_2(0) > M_1$，即存在 $\varepsilon > 0$，使得当 $t \in [0,\varepsilon)$ 时，有

$$V(t) > M_1,\ D^+ V(t) < -\alpha < 0. \tag{4}$$

综合以上 3 种情况有，如果 $V(0) > M_1$，则 $V(t)$ 至少以速率 α 严格单调递减，从而存在 $T_1 > 0$，使得当 $t \ge T_1$ 时，有 $V(t) = \max\{x_1(t), x_2(t)\} \le M_1$.

由系统(1)的第 3 个方程可知 $\dot{z}(t) \le z(t)[b_3^U - a_3^L z(t)]$.取 $M_2^* = \dfrac{b_3^U}{a_3^L}$.

(i)假设 $z(t)$ 关于 M_2^* 不振荡，即存在一个 $T_2 > T_1 + \tau_1 > 0$，使得

$$z(t) < M_2^*,\ t \ge T_2, \tag{5}$$

或者

$$z(t) > M_2^*,\ t \ge T_2. \tag{6}$$

如果(5)式成立，取 $M_2 = M_2^* + \varepsilon$，故 $z(t) < M_2$.

如果(6)式成立，则存在 $t_1^* > T_2$，使得 $z(t_1^*) > M_2^*$，于是对任意 $t > t_1^* > T_2$，有 $z(t) \le z(t_1^*) \cdot \exp\int_{t_1^*}^{t} [b_3^U - a_3^L z(s)]\mathrm{d}s < z(t_1^*)$.取 $M_2 = z(t_1^*)$，则对 $\forall t > t_1^*$，有 $z(t) < M_2$.

(ii)假设 $z(t)$ 关于 M_2^* 振荡.令 $z(\bar{t})$ 表示 $z(t)$ 任意局部极大值，则有 $0 = \dot{z}(\bar{t}) \le z(\bar{t})[b_3^U - a_3^L z(\bar{t})]$.

从而 $z(\bar{t}) \le M_2^*$. 又因为 $z(\bar{t})$ 是 $z(t)$ 的任意局部极大值，所以 $z(t) < M_2$ 最终成立.

由系统(1)的第 4 个方程可知 $\dot{y}(t) \le y(t)[-b_4^L - a_5^L y(t) + \dfrac{e_1^U}{\alpha^L} + \dfrac{e_2^U}{\beta^L}]$.取 $M_3^* = \dfrac{e_1^U \beta^L + e_2^U \alpha^L - b_4^L \alpha^L \beta^L}{a_5^L \alpha^L \beta^L}$.

与第 3 个方程的讨论过程类似，即存在一个 $T_3 > T_2 + \tau > 0$，使得 $y(\bar{t}) \le M_3^*$.

又因为 $y(\bar{t})$ 是 $y(t)$ 的任意局部极大值，所以 $y(t) < M_3$ 最终成立.

定理 2　假设(H_3)成立，系统(1)满足 (H_4)$b_1^L > c_1^U M_2 + d_1^U M_1 M_3$，($H_5$)$b_3^L > a_4^U M_2 + c_2^U M_1 + d_2^U M_2 M_3$，($H_6$) $\dfrac{e_1^L m_1^2}{1 + \alpha^U M_1^2} + \dfrac{e_2^L m_2^2}{1 + \beta^U M_2^2} > b_4^U$. 则系统(1)是一致持久的.其中 $0 < m_i \le m_i^*$ $(i = 1,2,3)$，$m_1^* = \min\{\dfrac{b_1^L - c_1^U M_2 - d_1^U M_1 M_3}{a_1^U}, \dfrac{b_2^L}{a_2^U}\}$，$m_2^* = \dfrac{b_3^L - a_4^U M_2 - c_2^U M_1 - d_2^U M_2 M_3}{a_3^U}$，$m_3^* = \dfrac{e_1^L m_1^2}{a_5^L(1 + \alpha^U M_1^2)} + \dfrac{e_2^L m_2^2}{a_5^L(1 + \beta^U M_2^2)} - \dfrac{b_4^U}{a_5^L}$.

证明　设 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), z(t), y(t))$ 是系统(1)满足初始条件(2)的任意正解.根据系统(1)的前两个方程及定理 1 可知 $\dot{x}_1(t) \ge x_1(t)[b_1^L - a_1^U x_1(t) - c_1^U M_2 - d_1^U M_1 M_3] + D_1(t) x_1(t)[x_2(t) - x_1(t)]$，$\dot{x}_2(t) \ge x_2(t)[b_2^L - a_2^U x_2(t)] + D_2(t) x_2(t)[x_1(t) - x_2(t)]$.

令 $V_1(t) = \min\{x_1(t), x_2(t)\}$，类似于定理 1 的证明可得：

若 $V_1(0) \ge m_1$，则 $V_1(t) \ge m_1$，其中 $t \ge 0$；

若 $V_1(0) < m_1$，则存在 $\overline{T_1} > T > 0$，当 $t \ge \overline{T_1}$ 时，有 $V_1(t) \ge m_1$.

由系统(1)的第 3 个方程和定理 1 可知 $\dot{z}(t) \ge z(t)[b_3^L - a_3^U z(t) - a_4^U M_2 - c_2^U M_1 - d_2^U M_2 M_3]$.令 $m_2^* = \dfrac{b_3^L - a_4^U M_2 - c_2^U M_1 - d_2^U M_2 M_3}{a_3^U}$.

类似于定理 1 的证明可得存在 $\overline{T_3} > \overline{T_2}$，有 $z(t) \ge m_2$，$t \ge \overline{T_3}$.

由系统(1)的第 4 个方程可得 $\dot{y}(t) \geq y(t)[-b_4^L - a_5{}^U M_3 + \frac{e_1^L m_1^2}{1+\alpha^U M_1^2} + \frac{e_2^L m_2^2}{1+\beta^U M_2^2}]$. 令 $m_3^* = \frac{e_1^L m_1^2}{a_5^L(1+\alpha^U M_1^2)} + \frac{e_2^L m_2^2}{a_5^L(1+\beta^U M_2^2)} - \frac{b_4^U}{a_5^L}$.

由假设(H_6)可知,$m_3^* > 0$.与定理 1 的讨论过程类似,即存在$\overline{T_4} > 0$,使得当 $t > \overline{T_4}$时,有 $y(t) \geq m_3$.

因此,取 $T = \max\{\overline{T_1}, \overline{T_2}, \overline{T_3}, \overline{T_4}\} > 0$, $\forall t > T$,有 $x_i(t) \geq m_1 (i=1,2)$, $z(t) \geq m_2$, $y(t) \geq m_3$.

结合定理 1,记

$$G = \{(x_1(t), x_2(t), z(t), y(t)) \mid m_1 \leq x_i(t) \leq M_1, m_2 \leq z(t) \leq M_2, m_3 \leq y(t) \leq M_3, i=1,2\}.$$

显然,G 是R_+^4 中与边界有正距离的有界紧域,且有系统(1) 中的每一个满足初始条件(2) 的正解最终进入并滞留在 G 中,即系统(1) 是一致持久的.

2 正周期解的存在性与全局渐近稳定性

根据假设(H_1)可知,系统(1)的所有系数都是 ω 周期函数,因此系统(1) 是一个周期系统.记系统(1) 满足初值 $X_0 = (x_1^0, x_2^0, z^0, y^0)$ 的解为 $X(t, X_0) = (x_1(t, X_0), x_2(t, X_0), z(t, X_0), y(t, X_0))$.

定义一个 Poincare 映射 $A: R_+^4 \to R_+^4$, $A(X_0) = X(\omega, X_0)$, $X_0 \in R_+^4$.因此,系统(1) 的周期解的存在性等价于映射 A 的不动点的存在性.

定理 3(Brouwer 不动点定理)[9] 设 B 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭单位球,又设 $T: B \to B$ 是一个连续映射,那么 T 必有一个不动点 $x \in B$.

定理 4 若周期系统(1)满足条件(H_1)~(H_6),则系统(1)至少存在一个严格正的 ω-周期解.

证明 由定理 2 的证明过程可知,紧域 $G \subset \mathrm{Int}R_+^4$ 且是周期系统(1) 的正向不变集.显然 G 是R_+^4 内的有界的、闭的、凸子集.由 $X_0 \in G$ 可得 $X(t, X_0) \in G$,即 $AG \subset G$.又由解对初值的连续性可知 A 是连续的,由定理 3 知 A 在G 中至少有一个不动点,从而系统(1) 在 G 中至少存在一个严格正的ω-周期解.

定义 2[10] 系统(1)的周期解 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), z(t), y(t))$ 全局渐近稳定是指对于系统(1) 的任一具有正初值的解 $U(t) = (u_1(t), u_2(t), w(t), v(t))$,对于 $t \in [0, +\infty)$, 都满足

$$\lim_{t \to +\infty} |x_i(t) - u_i(t)| = 0 (i=1,2), \lim_{t \to +\infty} |z(t) - w(t)| = 0, \lim_{t \to +\infty} |y(t) - v(t)| = 0.$$

此全局渐近稳定性保证了周期解的唯一性.

引理 2[11] 如果 $f(x)$ 在$[0, +\infty)$ 上非负且一致连续,$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x < +\infty$,那么 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

定理 5 假设系统(1)满足条件(H_1)~(H_6)及下列条件:

(H_7) $A_i > 0 (i=1,2,3,4)$, 其中 $A_1 = a_1^L + D_1^L - D_2^U - c_2^U - \frac{d_1^U M_3(1+\alpha^U M_1^2) + 2e_1^U M_1}{(1+\alpha^L m_1^2)^2}$, $A_2 = a_2^L + D_2^L - D_1^U$, $A_3 = a_3^L - a_4^U - c_1^U - \frac{d_2^U M_3(1+\beta^U M_2^2) + 2e_2^U M_2}{(1+\beta^L m_2^2)^2}$, $A_4 = a_5^L - \frac{d_1^U M_1(1+\alpha^U M_1^2)}{(1+\alpha^L m_1^2)^2} - \frac{d_2^U M_2(1+\beta^U M_2^2)}{(1+\beta^L m_2^2)^2}$. 则系统(1)存在全局渐近稳定的正周期解.

证明 设 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), z(t), y(t))$ 是周期系统(1)满足初始条件(2)的一个正 ω-期解,其存在性可由定理 4 保证. $U(t) = (u_1(t), u_2(t), w(t), v(t))$ 是系统(1)满足初始条件(2)的任意正解.

作变换 $\bar{x}_i(t) = \ln x_i(t)$, $\bar{z}(t) = \ln z(t)$, $\bar{y}(t) = \ln y(t)$, $\bar{u}_i(t) = \ln u_i(t)$, $\bar{w}(t) = \ln w(t)$, $\bar{v}(t) = \ln v(t)$, $i=1,2$. 构造 Liapunov 函数 $V_1(t) = \sum_{i=1}^{2} |\bar{x}_i(t) - \bar{u}_i(t)| + |\bar{z}(t) - \bar{w}(t)| + |\bar{y}(t) - \bar{v}(t)| + a_4^U \int_{-\tau_1}^{0} k(s) \int_{t+s}^{t} |z(\theta) - w(\theta)| \mathrm{d}\theta \mathrm{d}s$.

下面计算并估计 $V_1(t)$ 沿着系统(1)的右上导数

$$D^+V_1(t)\le\frac{\bar{x}_1-\bar{u}_1}{|\bar{x}_1-\bar{u}_1|}\{-a_1(t)(x_1-u_1)-c_1(t)(z-w)+D_1(t)(x_2-u_2)-D_1(t)(x_1-u_1)-d_1(t)[\frac{x_1y}{1+\alpha(t)x_1^2}-\frac{u_1v}{1+\alpha(t)u_1^2}]\}+\frac{\bar{x}_2-\bar{u}_2}{|\bar{x}_2-\bar{u}_2|}\{-a_2(t)(x_2-u_2)+D_2(t)(x_1-u_1)-D_2(t)(x_2-u_2)\}+\frac{\bar{z}-\bar{w}}{|\bar{z}-\bar{w}|}\{-a_3(t)(z-w)-a_4(t)\int_{-\tau_1}^{0}k(s)[z(t+s)-w(t+s)]\mathrm{d}s-c_2(t)(x_1-u_1)-d_2(t)[\frac{zy}{1+\beta(t)z^2}-\frac{wv}{1+\beta(t)w^2}]\}+\frac{\bar{y}-\bar{v}}{|\bar{y}-\bar{v}|}\{-a_5(t)(y-v)+e_1(t)[\frac{x_1^2(t-\tau_2)}{1+\alpha(t)x_1^2(t-\tau_2)}-\frac{u_1^2(t-\tau_2)}{1+\alpha(t)u_1^2(t-\tau_2)}]+e_2(t)[\frac{z^2(t-\tau_3)}{1+\beta(t)z^2(t-\tau_3)}-\frac{w^2(t-\tau_3)}{1+\beta(t)w^2(t-\tau_3)}]\}+a_4^U|z-w|-a_4^U\int_{-\tau_1}^{0}k(s)[z(t+s)-w(t+s)]\mathrm{d}s.$$

利用放缩可得：

$$D^+V_1(t)\le-[a_1^L+D_1^L-D_2^U-c_2^U-\frac{d_1^UM_3(1+\alpha^UM_1^2)}{(1+\alpha^Lm_1^2)^2}]|x_1-u_1|-[a_2^L+D_2^L-D_1^U]|x_2-u_2|-[a_3^L-a_4^U-c_1^U-\frac{d_2^UM_3(1+\beta^UM_2^2)}{(1+\beta^Lm_2^2)^2}]|z-w|-[a_5^L-\frac{d_1^UM_1(1+\alpha^UM_1^2)}{(1+\alpha^Lm_1^2)^2}-\frac{d_2^UM_2(1+\beta^UM_2^2)}{(1+\beta^Lm_2^2)^2}]|y-v|+\frac{2e_1^UM_1}{(1+\alpha^Lm_1^2)^2}|x_1(t-\tau_2)-u_1(t-\tau_2)|+\frac{2e_2^UM_2}{(1+\beta^Lm_2^2)^2}|z(t-\tau_3)-w(t-\tau_3)|.\tag{7}$$

构造 Liapunov 函数

$$V_2(t)=\frac{2e_1^UM_1}{(1+\alpha^Lm_1^2)^2}\int_{t-\tau_2}^{t}|x_1(s)-u_1(s)|\,\mathrm{d}s,\quad V_3(t)=\frac{2e_2^UM_2}{(1+\beta^Lm_2^2)^2}\int_{t-\tau_3}^{t}|z(s)-w(s)|\,\mathrm{d}s.$$

则有

$$\begin{aligned}D^+V_2(t)&\le\frac{2e_1^UM_1}{(1+\alpha^Lm_1^2)^2}[|x_1-u_1|-|x_1(t-\tau_2)-u_1(t-\tau_2)|],\\ D^+V_3(t)&\le\frac{2e_2^UM_2}{(1+\beta^Lm_2^2)^2}[|z-w|-|z(t-\tau_3)-w(t-\tau_3)|].\end{aligned}\tag{8}$$

定义 $V(t)=V_1(t)+V_2(t)+V_3(t)$，由(7)式和(8)式得

$$D^+V(t)\le-[a_1^L+D_1^L-D_2^U-c_2^U-\frac{d_1^UM_3(1+\alpha^UM_1^2)+2e_1^UM_1}{(1+\alpha^Lm_1^2)^2}]|x_1(t)-u_1(t)|-[a_2^L+D_2^L-D_1^U]|x_2(t)-u_2(t)|-[a_3^L-a_4^U-c_1^U-\frac{d_2^UM_3(1+\beta^UM_2^2)+2e_2^UM_2}{(1+\beta^Lm_2^2)^2}]|z(t)-w(t)|-[a_5^L-\frac{d_1^UM_1(1+\alpha^UM_1^2)}{(1+\alpha^Lm_1^2)^2}-\frac{d_2^UM_2(1+\beta^UM_2^2)}{(1+\beta^Lm_2^2)^2}]|y(t)-v(t)|.\tag{9}$$

由(9)式和(H_7)得

$$D^+V(t)\le-(\sum_{i=1}^{2}A_i|x_i(t)-u_i(t)|+A_3|z(t)-w(t)|+A_{\{4\}}|y(t)-v(t)|).$$

根据(H_7)可知,存在 $\gamma=\min\{A_1,A_2,A_3,A_4\}>0$,使得

$$D^+V(t)\leq-\gamma\Big(\sum_{i=1}^{2}|x_i(t)-u_i(t)|+|z(t)-w(t)|+|y(t)-v(t)|\Big),$$

对上式两端求从 T 到 t 的积分,可得 $V(t)+\gamma\int_T^t\Big(\sum_{i=1}^{2}|x_i(s)-u_i(s)|+|z(s)-w(s)|+|y(s)-v(s)|\Big)\mathrm{d}s<V(T)<+\infty$. 其中 $t\geq T$,从而可知 $\limsup_{t\to+\infty}\int_0^t\Big(\sum_{i=1}^{2}|x_i(s)-u_i(s)|+|z(s)-w(s)|+|y(s)-v(s)|\Big)\mathrm{d}s\leq\dfrac{V(T)}{\gamma}<+\infty$. 所以 $\sum_{i=1}^{2}|x_i(t)-u_i(t)|+|z(t)-w(t)|+|y(t)-v(t)|\in L^1[T,+\infty)$. 根据系统(1)正解的一致持久性及其导数的有界性可知 $\sum_{i=1}^{2}|x_i(t)-u_i(t)|+|z(t)-w(t)|+|y(t)-v(t)|$ 在 $[T,+\infty)$ 上是一致连续的,由引理 3 可得 $\lim_{t\to+\infty}\Big(\sum_{i=1}^{2}|x_i(t)-u_i(t)|+|z(t)-w(t)|+|y(t)-v(t)|\Big)=0$,即有 $\lim_{t\to+\infty}|x_i(t)-u_i(t)|=0(i=1,2)$, $\lim_{t\to+\infty}|z(t)-w(t)|=0$, $\lim_{t\to+\infty}|y(t)-v(t)|=0$. 故由定义 2 可知系统(1)的 ω-周期解 $X(t)$ 是全局渐近稳定的.

3　数值模拟

本节将通过数值模拟来验证定理 2 的正确性,即周期系统(1)的持续生存的充分条件.为此,构建如下系统:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_1(t)\Big[6+\cos t-(3+\cos t)x_1(t)-\dfrac{1}{3}z(t)-\dfrac{(0.2+0.05\sin t)x_1(t)y(t)}{1+x_1^2(t)}\Big]+\\ \qquad(2+0.5\cos t)x_1(t)[x_2(t)-x_1(t)],\\ \dot{x}_2(t)=x_2(t)[4+\sin t-(3+\sin t)x_2(t)]+(2+\sin t)x_2(t)[x_1(t)-x_2(t)],\\ \dot{z}(t)=z(t)\Big[8+\cos t-(4+\cos t)z(t)-\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_{-0.1}^{0}(15\cos s)z(t+s)\mathrm{d}s-\\ \qquad\dfrac{1}{5}x_1(t)-\dfrac{(0.2+0.05\cos t)z(t)y(t)}{1+z^2(t)}\Big],\\ \dot{y}(t)=y(t)\Big[-0.1-(5+\cos t)y(t)+\dfrac{(6+\cos t)x_1^2(t-0.1)}{1+x_1^2(t-0.1)}+\dfrac{(4+\sin t)z^2(t-0.2)}{1+z^2(t-0.2)}\Big].\end{cases}\tag{10}$$

显然,该系统是 2π 周期系统,且满足定理 2 的所有条件,其中取 $M_1=3.5,M_2=3,M_3=2.7,m_1=0.4,m_2=0.66,m_3=0.02$,即:

$$e_1^U\beta^L+e_2^U\alpha^L-b_4^L\alpha^L\beta^L=7+4-0.1=10.9>0,$$
$$b_1^L-c_1^UM_2-d_1^UM_1M_3=5-1-2.362\ 5=1.637\ 5>0,$$
$$b_3^L-a_4^UM_2-c_2^UM_1-d_2^UM_2M_3=7-1-0.7-2.025=3.275>0,$$
$$\frac{e_1^Lm_1^2}{1+\alpha^UM_1^2}+\frac{e_2^Lm_2^2}{1+\beta^UM_2^2}-b_4^U=0.06+0.13-0.1=0.09>0.$$

取定初始条件是 $x_1(0)=2,x_2(0)=2,z(0)=1,y(0)=1$,运用 MATLAB 软件数值模拟如图 1.

从图 1 可知,系统(10)是持久生存的,并且存在一个以 2π 为周期的正周期解,从而验证了定理 2 的正确性.

4　结　论

本文研究了一类具有非线性扩散和竞争关系的食饵种群,具有连续时滞和离散时滞的捕食者的 Holling Ⅲ型功能性反应的三种群捕食系统.通过比较定理、Brouwer 不动点定理和 Liapunov 函数的构造,分别获得

了该系统种群的持久生存和灭绝的充分条件以及正周期解的存在性和全局稳定性的充分条件.由定理 2 和定理 5 可知，该系统持久生存、正周期解全局稳定的充分条件与食饵种群竞争系数 c_1，c_2 和捕食功能性反应函数紧密相关.

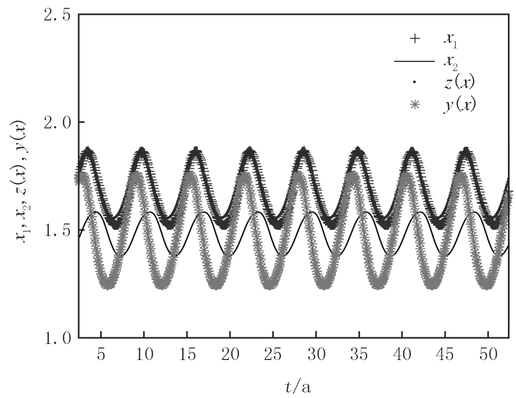

图1　系统(10)的持续生存图

Fig.1　Continuity map of system (10)

参 考 文 献

[1] ALLEN L J.Persistence and extinction in single species reaction diffusion models[J]. Bull Math Biol，1983，45：209-227.

[2] 刘志广.食饵庇护所对斑块环境下 Leslie-Gower 捕食系统的影响[J].生态学报，2018，38(8)：2958-2964.
Liu Z G.The effect of prey refuge in a patchy Leslie-Gower predation system[J].Acta Ecologica Sinica，2018，38(8)：2958-2964.

[3] 刘俊，刘曦，邰淑静，等.一类非自治捕食扩散系统的周期解及其渐近稳定性[J].数学的实践与认识，2013，43(20)：285-290.
LIU J，LIU X，TAI S J，et al.The periodic solutions and asymptotic stability for a class of nonautonomous predator-prey systems[J]. Mathematics in Practice and Theory，2013，43(20)：285-290.

[4] ZHANG X，CHEN L S.The linear and nonlinear diffusion of the competitive Lotka-Volterra model[J].Nonlinear Analysis，2007，66：2767-2776.

[5] ZHOU X，SHI X，SONG X.Analysis of nonautonomous predator-prey model with nonlinear diffusion and time delay[J].Appl Math Comput，2008，15(1)：129-136.

[6] NINDJIN A F，AZIZ-ALAOUI M A，CADIVEL M.Analysis of a predator-prey model with modified Leslie-Gower and Holling-type Ⅱ schemes with time delay[J].Nonlinear Anal：Real World Appl，2006，7(5)：1104-1118.

[7] TENG Z D.Nonautonomous Lotka-Volterra system with delays[J].Journal of Differential Equations，2002，179：538-561.

[8] 郭俊凯，郑唯唯，余士跃.具扩散和 HollingⅡ类功能反应捕食系统的持久生存[J].纺织高校基础科学学报，2014，27(2)：177-181.
GUO J K，ZHENG W W，YU S Y.Persistence of a predator-prey system with diffusion and Holling Ⅱ functional response[J].Basic Sciences Journal of Textile Universities，2014，27(2)：177-181.

[9] 张恭庆，林源渠.泛函分析讲义[M].北京：北京大学出版社，2012.

[10] 马知恩，周义仓.微分方程定性与稳定性方法[M].北京：科学出版社，2011.

[11] BARBALAT I.Systems d'equations differentielles d'oscillations nonlineaires[J].Rev Roumaine Math Pures Appl，1959，4：267-270.

Stability analysis of Holling Ⅲ functional response predator-prey systems with nonlinear diffusion and delay

Liang Guizhen[1]，Zhao Xiao[1,2]

(1.Department of Mathematics and Information Science，Xinxiang Univesity，Xinxiang 453003，China；
2.Department of Mathematics and Statistics，Zhengzhou University，Zhengzhou 450000，China)

Abstract：A class of nonautonomous predator-prey competition systems with nonlinear diffusion and Holling Ⅲ functional reactions with continuous and discrete delays are studied in this paper.By using the comparison theorem，the sufficient conditions for the uniformly persistent existence of the system are obtained. With Liapunov stability theory，sufficient conditions for the existence，uniqueness and global asymptotic stability of positive periodic solutions for corresponding periodic systems are obtained.Numerical simulation illustrates the feasible of the main result.

Keywords：nonlinear diffusion；delay；Holling Ⅲ functional response；uniform persistence；global asymptotic stability

［责任编校　陈留院　赵晓华］