

黎曼流形上二次曲率泛函临界度量的刚性结果

黄广月,陈玉

(河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘要:主要研究紧致黎曼流形上有关二次曲率泛函临界度量的刚性结果.使用有关 Weyl 曲率张量的不等式估计与散度定理,得到了临界度量是 Einstein 度量以及常截面曲率度量的分类结果.

关键词:临界度量;Cotton 张量;Einstein 度量

中图分类号:O186.12

文献标志码:A

设 (M^n, g) 是 n 维的黎曼流形,其中 $n \geq 3$. Catino^[1] 研究了有关二次曲率泛函

$$F_t = \int_M |\text{Ric}|^2 + t \int_M R^2, t \in \mathbf{R} \tag{1}$$

的一些刚性结果,其中 Ric 和 R 分别是 Ricci 曲率和数量曲率. Besse^[2] 观察到 Einstein 度量是 F_t 限制在 $M_1(M^n)$ 上的临界度量,其中 $M_1(M^n)$ 是体积为 1 的度量类空间.但是,临界度量并不都是 Einstein 度量.自然的问题是:在什么条件下, F_t 泛函的临界度量是 Einstein 度量.例如,对于积分条件下的刚性结果,见文献 [3-5]. 本文主要研究在 Cotton 张量为零的条件下,临界度量的分类结果.

为了方便定理的陈述,先介绍相关的几何量.利用 Weyl 曲率张量与黎曼曲率张量的关系式:

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jk} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

则有

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(A_{ik}g_{jl} - A_{il}g_{jk} + A_{jl}g_{ik} - A_{jk}g_{il}) = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(\dot{R}_{ik}g_{jl} - \dot{R}_{il}g_{jk} + \dot{R}_{jl}g_{ik} - \dot{R}_{jk}g_{il}) - \frac{R}{n(n-1)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \tag{2}$$

其中 $\dot{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{n}R g_{ij}$ 满足 $\text{tr}(\dot{R}_{ij}) = 0$, Schouten 张量 A_{ij} 定义为:

$$A_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2(n-1)}Rg_{ij} = \dot{R}_{ij} + \frac{n-2}{2n(n-1)}Rg_{ij}.$$

Cotton 张量与 Schouten 张量的关系为:

$$C_{ijk} = A_{kj,i} - A_{ki,j} = \dot{R}_{kj,i} - \dot{R}_{ki,j} + \frac{n-2}{2n(n-1)}(R_{,i}g_{jk} - R_{,j}g_{ik}). \tag{3}$$

从(3)式可以看出: Cotton 张量关于前两个指标是反对称的,且关于任何两个指标求迹为零.

黎曼度量 g 是 F_t 在 $M_1(M^n)$ 上的临界度量(见文献[1])当且仅当

$$\Delta R_{ij} = (1+2t)R_{,ij} - \frac{2t}{n}(\Delta R)g_{ij} - 2R_{ikl}R_{kl} - 2tRR_{ij} + \frac{2}{n}(|R_{ij}|^2 + tR^2)g_{ij}, \tag{4}$$

$$[n+4(n-1)t]\Delta R = (n-4)[|R_{ij}|^2 + tR^2 - \lambda], \tag{5}$$

收稿日期:2018-04-09;修回日期:2018-11-10.

基金项目:国家自然科学基金(11371018;11671121).

作者简介(通信作者):黄广月(1976-),男,河南濮阳人,河南师范大学教授,博士,研究方向为几何分析, E-mail: hgy@henannu.edu.cn.

其中 $\lambda = F_t(g)$. 特别的, (4) 式等价于

$$\Delta \dot{R}_{ij} = (1+2t)R_{,ij} - \frac{1+2t}{n}(\Delta R)g_{ij} - 2R_{ikjl}\dot{R}_{kl} - \frac{2+2nt}{n}R\dot{R}_{ij} + \frac{2}{n}|\dot{R}_{ij}|^2 g_{ij}. \quad (6)$$

定理 1 设紧致黎曼流形 (M^n, g) 具有正数量曲率且 Cotton 张量为零, g 是在 $M_1(M^n)$ 上关于泛函 F_t 的临界度量, 其中:

$$\begin{cases} t \geq -\frac{3}{8}, & n=3; \\ t > -\frac{1}{3}, & n=4; \\ t > -\frac{3n-4}{2n(n-1)}, & n \geq 5. \end{cases} \quad (7)$$

如果

$$|W - \frac{n-4}{\sqrt{2n(n-2)}} \text{Ric} \otimes g| < \sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)}} \left(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n} + 1 \right) R, \quad (8)$$

则 M^n 是 Einstein 流形. 特别的, 如果 $n=3$, 则 M^n 的截面曲率为正常数; 如果

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} < t \leq -\frac{4-\sqrt{2}}{12}, & n=4; \\ -\frac{11}{40} < t \leq -\frac{44-3\sqrt{15}}{160}, & n=5; \\ -\frac{(3n-4)}{2n(n-1)} < t \leq -\left(\frac{3n-4}{2n(n-1)} - \frac{1}{2nC_n} \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} \right), & n \geq 6, \end{cases} \quad (9)$$

则 $M^n (n \geq 4)$ 的截面曲率为正常数, 其中常数 C_n 由 (18) 式给出.

注 在文献 [6] 中, Sheng-Wang 研究了有关 Bach 平坦 (即 $\frac{1}{n-3}W_{ijkl,kl} + \frac{1}{n-2}W_{ijkl}R^{kl} := B_{ij} = 0$) 条件

下临界度量的分类结果. 利用 $W_{ijkl,l} = -\frac{n-3}{n-2}C_{ijk}$ 知: 当 $n \geq 4$ 时, $C_{ijk} = 0$ 等价于 Weyl 曲率张量调和.

定理 2 设 (M^n, g) 具有正数量曲率的紧致黎曼流形, g 是在 $M_1(M^n)$ 上关于泛函 F_t 的临界度量. 如果

$$|W + \frac{2}{\sqrt{2n(n-2)}} \text{Ric} \otimes g| \leq \sqrt{\frac{n-1}{8(n-2)}} \left[\frac{2(n-4)}{[n+4(n-1)t]} \frac{F_t(g) - |\dot{R}_{ij}|^2}{R} - \left(\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n[n+4(n-1)t]} \right) R \right], \quad (10)$$

其中 $t \leq -\frac{1}{2}$, $F_t(g) < |\dot{R}_{ij}|^2$, 则 M^n 一定是 Einstein 流形. 特别的, 如果 $n=3$, 则 M^n 的截面曲率为正常数.

1 主要结果的证明

如果度量 g 是泛函 F_t 的临界度量, 则从 (6) 式得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta |\dot{R}_{ij}|^2 &= |\nabla \dot{R}_{ij}|^2 + \dot{R}_{ij}\Delta \dot{R}_{ij} = |\nabla \dot{R}_{ij}|^2 + (1+2t)\dot{R}_{ij}R_{,ij} - \\ &2R_{ikjl}\dot{R}_{kl}\dot{R}_{ij} - \frac{2+2nt}{n}R|\dot{R}_{ij}|^2 = |\nabla \dot{R}_{ij}|^2 + (1+2t)\dot{R}_{ij}R_{,ij} - \\ &\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n(n-1)}R|\dot{R}_{ij}|^2 + \frac{4}{n-2}\dot{R}_{ij}\dot{R}_{jk}\dot{R}_{ki} - 2W_{ikjl}\dot{R}_{kl}\dot{R}_{ij}. \end{aligned} \quad (11)$$

对 (11) 式两边进行积分得

$$0 = \int_M |\nabla \dot{R}_{ij}|^2 - \int_M \left(2W_{ikjl}\dot{R}_{kl}\dot{R}_{ij} - \frac{4}{n-2}\dot{R}_{ij}\dot{R}_{jk}\dot{R}_{ki} + \frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n(n-1)}R|\dot{R}_{ij}|^2 \right) -$$

$$(1+2t) \int_M \dot{R}_{ij,j} R_{,i} = \int_M |\nabla \dot{R}_{ij}|^2 - \int_M (2W_{ijkl} \dot{R}_{kl} \dot{R}_{ij} - \frac{4}{n-2} \dot{R}_{ij} \dot{R}_{jk} \dot{R}_{ki} + \frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n(n-1)} R |\dot{R}_{ij}|^2) - \frac{(n-2)(1+2t)}{2n} \int_M |\nabla R|^2, \tag{12}$$

其中在第 2 个等式中使用了 $\dot{R}_{ij,j} = \frac{n-2}{2n} R_{,i}$. 因此,得到了下面的结果.

引理 1 设 (M^n, g) 是紧致的黎曼流形, g 是在 $M_1(M^n)$ 上关于泛函 F_t 的临界度量, 则

$$\int_M |\nabla \dot{R}_{ij}|^2 = \int_M (2W_{ijkl} \dot{R}_{jl} \dot{R}_{ik} - \frac{4}{n-2} \dot{R}_{ij} \dot{R}_{jk} \dot{R}_{ki} + \frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n(n-1)} R |\dot{R}_{ij}|^2 + \frac{(n-2)(1+2t)}{2n} |\nabla R|^2). \tag{13}$$

如果 $C_{ijk} = 0$, 则从(3)式知 Schouten 张量 A_{ij} 是 Codazzi 张量. 因此,

$$\begin{aligned} \Delta A_{ij} &= A_{ij,kk} = A_{ik,jk} = A_{ik,kj} + A_{lk} R_{lij} + A_{il} R_{lkj} = A_{ik,kj} - A_{lk} R_{ikjl} + A_{il} R_{lj} = \\ &\dot{R}_{ik,kj} + \frac{n-2}{2n(n-1)} R_{,ij} - R_{ikjl} \dot{R}_{kl} + \dot{R}_{ki} \dot{R}_{jk} + \frac{1}{n} R \dot{R}_{ij} = \frac{n-2}{2n} R_{,ij} + \\ &\frac{n-2}{2n(n-1)} R_{,ij} + \frac{n}{n-2} \dot{R}_{ki} \dot{R}_{jk} + \frac{1}{n-1} R \dot{R}_{ij} - W_{ijkl} \dot{R}_{kl} - \frac{1}{n-2} |\dot{R}_{ij}|^2 g_{ij}. \end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned} \Delta \dot{R}_{ij} &= \frac{n-2}{2n} R_{,ij} + \frac{n}{n-2} \dot{R}_{ki} \dot{R}_{jk} + \frac{1}{n-1} R \dot{R}_{ij} - W_{ijkl} \dot{R}_{kl} - \\ &\frac{1}{n-2} |\dot{R}_{ij}|^2 g_{ij} - \frac{n-2}{2n(n-1)} ((\Delta R) g_{ij} - R_{,ij}), \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\Delta \dot{R}_{ij}|^2 &= |\nabla \dot{R}_{ij}|^2 + \dot{R}_{ij} \Delta \dot{R}_{ij} = |\nabla \dot{R}_{ij}|^2 + \frac{n-2}{2(n-1)} R_{,ij} R_{ij} + \\ &\frac{n}{n-2} \dot{R}_{ki} \dot{R}_{jk} \dot{R}_{ij} + \frac{1}{n-1} R |\dot{R}_{ij}|^2 - W_{ijkl} \dot{R}_{kl} \dot{R}_{ij}. \end{aligned} \tag{14}$$

对(14)式进行积分得到了下面的结论.

引理 2 设 (M^n, g) 是紧致的黎曼流形. 如果 Cotton 张量为零, 则

$$\int_M |\nabla \dot{R}_{ij}|^2 = \int_M (W_{ijkl} \dot{R}_{kl} \dot{R}_{ij} - \frac{1}{n-1} R |\dot{R}_{ij}|^2 - \frac{n}{n-2} \dot{R}_{ki} \dot{R}_{jk} \dot{R}_{ij} + \frac{(n-2)^2}{4n(n-1)} |\nabla R|^2). \tag{15}$$

为了证明本文的主要定理, 还需要下面的两个引理.

引理 3^[7-8] 设 (M^n, g) 是黎曼流形. 对于任意的实常数 $\rho \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} |-W_{ijkl} \dot{R}_{jl} \dot{R}_{ik} + \rho \dot{R}_{ij} \dot{R}_{jk} \dot{R}_{ki}| &\leq \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} (|W|^2 + \\ \frac{2(n-2)\rho^2}{n} |\dot{R}_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}} |\dot{R}_{ij}|^2 &= \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} |W + \frac{\rho}{\sqrt{2n}} \text{Ric} \otimes g| |\dot{R}_{ij}|^2. \end{aligned} \tag{16}$$

引理 4 设 (M^n, g) 是 Einstein 流形, 其中 $n \geq 4$. 则

$$\int_M \left(\frac{1}{n} R - C_n |W| \right) |W|^2 \leq 0, \tag{17}$$

其中:

$$C_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{6}}{4}, & n = 4; \\ \frac{4\sqrt{10}}{15}, & n = 5; \\ \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} + \frac{n^2-n-4}{2\sqrt{n(n-1)(n+1)(n-2)}}, & n \geq 6. \end{cases} \tag{18}$$

证明 由文献[9-10]知

$$\begin{aligned}\Delta W_{ijkl} &= \frac{2}{n}R W_{ijkl} - 2(2W_{ipkq}W_{pjql} + \frac{1}{2}W_{klpq}W_{pqij}), \\ 2W_{ijkl}W_{ipkq}W_{pjql} + \frac{1}{2}W_{ijkl}W_{klpq}W_{pqij} &\leq C_n |W|^3.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta |W_{ijkl}|^2 &= |\nabla W|^2 + \frac{2}{n}R |W|^2 - 2(2W_{ipkq}W_{pjql} + \frac{1}{2}W_{klpq}W_{pqij})W_{ijkl} \geq \\ &2(\frac{1}{n}R - C_n |W|) |W|^2.\end{aligned}\quad (19)$$

积分(19)式得(17)式.

定理 1 的证明 由(13)式和(15)式得

$$\begin{aligned}0 = \int_M [-W_{ijkl}\dot{R}_{jl}\dot{R}_{ik} - \frac{n-4}{n-2}\dot{R}_{ij}\dot{R}_{jk}\dot{R}_{ki} - \frac{1}{n-1}(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n} + 1)R |\dot{R}_{ij}|^2 - \\ \frac{n-2}{2n}((1+2t) - \frac{n-2}{2(n-1)}) |\nabla R|^2].\end{aligned}$$

应用 $\rho = -\frac{n-4}{n-2}$ 的不等式(16)得

$$\begin{aligned}0 \leq \int_M [\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} |W - \frac{n-4}{\sqrt{2n(n-2)}} \text{Ric} \otimes g| - \frac{1}{n-1}(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n} + \\ 1)R] |\dot{R}_{ij}|^2 - \frac{n-2}{2n}((1+2t) - \frac{n-2}{2(n-1)}) |\nabla R|^2].\end{aligned}\quad (20)$$

明显地,当 t 满足(7)式时

$$\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n} + 1 > 0, (1+2t) - \frac{n-2}{2(n-1)} \geq 0.$$

因此在(8)式下,由(20)式得到

$$\begin{aligned}0 \leq \int_M [\sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} |W - \frac{n-4}{\sqrt{2n(n-2)}} \text{Ric} \otimes g| - \frac{1}{n-1}(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n} + \\ 1)R] |\dot{R}_{ij}|^2 - \frac{n-2}{2n}((1+2t) - \frac{n-2}{2(n-1)}) |\nabla R|^2] \leq 0,\end{aligned}\quad (21)$$

这表明 $\dot{R}_{ij} = 0$ 且 g 是 Einstein 度量.由于 $\dot{R}_{ij} = 0$, 这时(8)式变为:

$$|W| < \sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)}} \left(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n} + 1 \right) R.\quad (22)$$

因此有

$$C_n |W| < \sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)}} \left(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n} + 1 \right) C_n R.\quad (23)$$

如果 $n=3$, 利用 3 维流形的 Weyl 曲率张量为零可知(23)式恒成立; 如果 $n \geq 4$, 则在条件(9)式下,

$$\sqrt{\frac{2}{(n-1)(n-2)}} \left(\frac{2(n-2)+2n(n-1)t}{n} + 1 \right) C_n R \leq \frac{1}{n} R,$$

恒成立, 从而利用(17)式知 Weyl 曲率张量也为零. 因此, 利用(2)式知 M^n 的截面曲率是正常数.

这完成了定理 1 的证明.

定理 2 的证明 由(11)式和(5)式分别得到

$$\begin{aligned}\Delta |\dot{R}_{ij}|^2 &= 2 |\nabla \dot{R}_{ij}|^2 + 2(1+2t) \dot{R}_{ij}R_{,ij} - \frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} R |\dot{R}_{ij}|^2 + \\ &\frac{8}{n-2} \dot{R}_{ij}\dot{R}_{jk}\dot{R}_{ki} - 4W_{ikjl} \dot{R}_{kl} \dot{R}_{ij},\end{aligned}$$

$$\Delta R^2 = 2 |\nabla R|^2 + 2R\Delta R = 2 |\nabla R|^2 + \frac{2(n-4)}{n+4(n-1)t} R |\dot{R}_{ij}|^2 + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n[n+4(n-1)t]} R^3 - \frac{2(n-4)\lambda}{n+4(n-1)t} R.$$

由于对于任意的两个函数 $u, v, \Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v}\Delta u - \frac{u}{v^2}\Delta v - 2\nabla\left(\frac{u}{v}\right) \nabla \ln v$, 因此

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R^2}\right) &= \frac{1}{R^2}\Delta |\dot{R}_{ij}|^2 - \frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R^4}\Delta R^2 - 2\nabla\left(\frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R^2}\right) \nabla \ln(R^2) = \frac{2}{R^2} |\nabla \dot{R}_{ij}|^2 - \\ &\frac{2}{R^4} |\nabla R|^2 |\dot{R}_{ij}|^2 + \frac{2(1+2t)}{R^2} \dot{R}_{ij} R_{,ij} - 2\nabla\left(\frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R^2}\right) \nabla \ln(R^2) + \frac{8}{(n-2)R^2} \dot{R}_{ij} \dot{R}_{jk} \dot{R}_{ki} - \\ &\frac{4}{R^2} W_{ijkl} \dot{R}_{kl} \dot{R}_{ij} + \frac{2(n-4)\lambda}{(n+4(n-1)t)} \frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R^3} - \frac{2(n-4)}{(n+4(n-1)t)} \frac{|\dot{R}_{ij}|^4}{R^3} - \\ &\left[\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)}\right] \frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R} = \\ &\frac{2}{R^4} |R\dot{R}_{ij,k} - R_{,k}\dot{R}_{ij}|^2 - \nabla\left(\frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R^2}\right) \nabla \ln(R^2) + \\ &\frac{8}{(n-2)R^2} \dot{R}_{ij} \dot{R}_{jk} \dot{R}_{ki} - \frac{4}{R^2} W_{ijkl} \dot{R}_{kl} \dot{R}_{ij} + \frac{2(1+2t)}{R^2} \dot{R}_{ij} R_{,ij} - \\ &\left[\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)}\right] \frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R} + \\ &\frac{2(n-4)\lambda}{(n+4(n-1)t)} \frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R^3} - \frac{2(n-4)}{(n+4(n-1)t)} \frac{|\dot{R}_{ij}|^4}{R^3}. \end{aligned} \tag{24}$$

令 $f = \ln R^2, u = \frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R^2}$, 则(24)式等价于

$$\begin{aligned} \Delta_{(-f)} u &= \frac{2}{R^4} |R\dot{R}_{ij,k} - R_{,k}\dot{R}_{ij}|^2 + \frac{8}{(n-2)R^2} \dot{R}_{ij} \dot{R}_{jk} \dot{R}_{ki} - \frac{4}{R^2} W_{ijkl} \dot{R}_{kl} \dot{R}_{ij} + \\ &\frac{2(1+2t)}{R^2} \dot{R}_{ij} R_{,ij} - \left[\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)}\right] \frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R} + \\ &\frac{2(n-4)\lambda}{(n+4(n-1)t)} \frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R^3} - \frac{2(n-4)}{(n+4(n-1)t)} \frac{|\dot{R}_{ij}|^4}{R^3}. \end{aligned}$$

对上式两边关于加权测度 $e^f dV$ 进行积分, 得

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \left(\frac{2}{R^4} |R\dot{R}_{ij,k} - R_{,k}\dot{R}_{ij}|^2 + \frac{4}{R^2} (-W_{ijkl} \dot{R}_{kl} \dot{R}_{ij} + \frac{2}{n-2} \dot{R}_{ij} \dot{R}_{jk} \dot{R}_{ki}) - \right. \\ &\frac{2(n-4)}{(n+4(n-1)t)} \frac{|\dot{R}_{ij}|^4}{R^3} + \frac{2(n-4)\lambda}{(n+4(n-1)t)} \frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R^3} - \left. \left[\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)} \right] \frac{|\dot{R}_{ij}|^2}{R} - \frac{(n-2)(1+2t)}{n} |\nabla R|^2 R^{-2} \right) e^f, \end{aligned} \tag{25}$$

其中使用了有关加权测度的散度定理:

$$\int_M \frac{2(1+2t)}{R^2} \dot{R}_{ij} R_{,ij} e^f = 2(1+2t) \int_M \dot{R}_{ij} R_{,ij} = -\frac{(n-2)(1+2t)}{n} \int_M |\nabla R|^2 R^{-2} e^f.$$

当 $t \leq -\frac{1}{2}$, 对(25)式利用具有 $\rho = \frac{2}{n-2}$ 的不等式(16)得

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_M \left[-\frac{4}{R^2} \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} \left| W + \frac{2}{\sqrt{2n(n-2)}} \text{Ric} \otimes g \right| + \frac{2(n-4)}{(n+4(n-1)t)} \frac{\lambda - |\dot{R}_{ij}|^2}{R^3} - \right. \\ &\left. \left[\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)} \right] \frac{1}{R} \right] |\dot{R}_{ij}|^2 e^f. \end{aligned} \tag{26}$$

当 $t \leq -\frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{2(n-4)}{n+4(n-1)t} < 0,$$

$$\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)} < 0.$$

因此当满足(10)式时

$$0 \geq \int_M \left[-\frac{4}{R^2} \sqrt{\frac{n-2}{2(n-1)}} \left| W + \frac{2}{\sqrt{2n}(n-2)} \text{Ric} \otimes g \right| + \frac{2(n-4)}{(n+4(n-1)t)} \frac{\lambda - |\dot{R}_{ij}|^2}{R^3} - \left[\frac{4(n-2)+4n(n-1)t}{n(n-1)} + \frac{2(n-4)(1+nt)}{n(n+4(n-1)t)} \right] \frac{1}{R} \right] |\dot{R}_{ij}|^2 e^f \geq 0, \quad (27)$$

从而得到 $\dot{R}_{ij} = 0$, 即 M^n 是 Einstein 流形.

因此完成了定理 2 的证明.

参 考 文 献

- [1] Catino G. Some rigidity results on critical metrics for quadratic functionals[J]. Calc Var Partial Differential Equations, 2015, 54: 2921-2937.
- [2] Besse A. Einstein Manifolds[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
- [3] Gursky M, Viaclovsky J. A new variational characterization of three-dimensional space forms[J]. Invent Math, 2001, 145: 251-278.
- [4] Gursky M, Viaclovsky J. Rigidity and stability of Einstein metrics for quadratic curvature functionals[J]. J Reine Angew Math, 2015, 700: 37-91.
- [5] Huang G, Chen L. Some characterizations on critical metrics for quadratic curvature functions[J]. Proc Amer Math Soc, 2018, 146: 385-395.
- [6] Sheng W, Wang L. Bach-flat critical metrics for quadratic curvature functionals[J]. Ann Glob Anal Geom, 2018, 54: 365-375.
- [7] Huang G. Rigidity of Riemannian manifolds with positive scalar curvature[J]. Ann Glob Anal Geom, 2018, 54: 257-272.
- [8] Fu H, Peng J. Rigidity theorems for compact Bach-flat manifolds with positive constant scalar curvature[J]. Hokkaido Math J, 2018, 47: 581-605.
- [9] Hebey E, Vaugon M. Effective L_p pinching for the concircular curvature[J]. J Geom Anal, 1996, 6: 531-553.
- [10] Huang G. Integral pinched gradient shrinking ρ -Einstein solitons[J]. J Math Anal Appl, 2017, 451: 1045-1055.

Some rigidity results for critical metrics of quadratic curvature functionals on Riemannian manifolds

Huang Guangyue, Chen Yu

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: In this paper, we study some rigidity results for Einstein metrics as the critical points of a family of known quadratic curvature functionals on compact manifolds. Using some estimates with respect to the Weyl curvature tensor and divergence theorems, we obtain that a critical metric must be Einstein or constant sectional curvature.

Keywords: critical metric; Cotton tensor; Einstein metric

[责任编辑 陈留院 赵晓华]