文章编号:1000-2367(2021)05-0027-06 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2021.05.004

三维不可压磁流体方程的整体解

葛玉丽,邵曙光

(南阳师范学院 数学与统计学院,河南 南阳 473061)

摘　要:主要研究带有拉普拉斯耗散和磁扩散的三维磁流体力学系统,在有限能量情形下得到了方程的经典解.选择稳态情形下的 Beltrami 流作为初值,利用截断函数技术方法和先验估计证明了方程组的整体正则性.

关键词:磁流体方程组;有限能量;整体解;Beltrami 流;正则性

中图分类号:O175 **文献标志码:**A

1　模型简介

本文研究带有拉普拉斯耗散和磁扩散的三维不可压缩磁流体动力学方程(Magneto-hydrodynamics Equation,MHD)的初值问题(Initial-value Problem,IVP).

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u + \nabla p = h \cdot \nabla h + \Delta u, x \in \mathbf{R}^3, t > 0, \\ h_t + u \cdot \nabla h = h \cdot \nabla u + \Delta h, x \in \mathbf{R}^3, t > 0, \\ \nabla \cdot u = \nabla \cdot h = 0, x \in \mathbf{R}^3, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), h(x,0) = h_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

这里 $u=(u_1,u_2,u_3)^{\mathrm{T}}$ 表示流体速度,$h=(h_1,h_2,h_3)^{\mathrm{T}}$ 表示磁场,p 表示流体压力,方程组(1)称为三维不可压缩磁流体动力学方程组的初值问题模型.

不可压缩 Navier-Stokes 方程可以看作是恒定磁场下磁流体力学系统的一个特例.目前已经有很多关于 Navier-Stokes 方程整体存在性的结果,比如文献[1]及其参考文献,稍微遗憾的是,这些参考文献的大多数结果只考虑了小初值情形下的全局存在性.近段时间以来,文献[2-9]研究了大初值情形下整体解的存在性.在开展进一步讨论之前,首先回顾一下不可压缩磁流体动力学领域中的一些重要结果.文献[10]构建了三维 MHD 方程组强解的局部存在性和 Leray-Hopf 弱解的整体存在性.文献[11]关于完美电阻磁流体动力学方程组建立了一个非平凡爆破准则,该爆破准则仅依赖于 $L_t^1(BMO)$ 范数下速度场的旋度.文献[12]利用螺旋度的特殊结构,导出了三维不可压缩 Navier-Stokes 方程的一个新的能量恒等式,构造了一类临界范数可以任意大的 Navier-Stokes 方程的有限能量光滑解.在三维情形下,文献[13]研究了非平凡磁场时 MHD 方程的大初值轴对称解.文献[14]研究了理想磁流体系统的局部 $C^{1,\alpha}$ 解.

受到文献[12]研究方法和结果的启发,本文考虑适当的稳态 Beltrami 流情形下,当速度场在大部分空间域中与对应的涡量场几乎平行时,MHDIVP 系统(1)的适定性问题.利用文献[12]的一个衰减估计,关于初始值和解做一个合适的截断,得到了一类有限能量解.通过对对流项的非线性消除结构的使用,证明了针对这类初值,MHDIVP 系统(1)有整体适定性.

本文将在给定的函数集合 $\Phi(\kappa, A)$ 中选择合适的初始值,构造一个大的整体经典解.这里集合 $\Phi(\kappa, A)$ 的定义如下:

收稿日期:2021-02-23;**修回日期:**2021-06-03.

基金项目:国家自然科学基金(11771031;11801285);南阳师范学院科学技术研究重点项目(19031).

作者简介(通信作者):邵曙光(1980—),男,河南驻马店人,南阳师范学院副教授,博士,研究方向为微分方程,E-mail:shaoshuguang0927@126.com.

$$\Phi(\kappa,A)=\left\{g\in L^1_{\rm loc}(\mathbf{R}^3)\,\middle|\,\nabla\cdot g=0,\nabla\times g=\kappa g,\ |g(x)|\leq\frac{A}{1+|x|}\right\},\tag{2}$$

有关这个函数集合的性质将在第 2 部分详细介绍.令 χ 为标准的截断函数,具体定义如下:

$$\chi\equiv1,\ |x|\leq1;\chi\equiv0,\ |x|\geq2;\ |\nabla^k\chi|\leq2,(0\leq k\leq2),\tag{3}$$

$$\chi_M(x)=\chi\left(\frac{x}{M}\right),M>0.\tag{4}$$

对于 $\nu_0\in\Phi(\kappa,A)$,适当添加一些扰动并采用$(u_0=\chi_M\nu_0+b_0,h_0)$作为初始值,这里的 b_0 和 h_0 都很小,然而初始值(u_0,h_0)不再是小初值.由于这种系统的特殊结构,可以利用运算技巧和先验估计来解决这个问题.本文的主要研究结论如下:

定理 1 如果 χ 是满足(3)和(4)式的任意标准截断函数,并且满足 $M\geq M_0$,$\|(b_0,h_0)\|_{H^1}\leq M^{-\frac{1}{2}}$,$\nu_0\in\Phi(\kappa,A)$,那么对于任意大于零的常数 κ,存在一个仅依赖于 A 的正常数 M_0,使得带有初值$(\chi_M\nu_0+b_0,h_0)$的三维不可压磁流体动力学系统(1)是整体适定的.

2 函数集合

为了证明的需要,根据文献[1]给出集合 $\Phi(\kappa,A)$中函数的一个具体例子,然后根据文献[12]的研究方法,给出这个函数的一个衰减估计.假设 y 是 S^2 的单位外法向量,$n(y)$是单位切向量,且 $n(y)\in T_yS^2$,$a(y)$是一个光滑函数,其支集远离 $n(y)$的奇点.对于常数 $\kappa>0$,$A>0$,令

$$g(x)=\int_{S^2}[n(y)\sin\langle\kappa y,x\rangle+y\times n(y)\cos\langle\kappa y,x\rangle]\,a(y)\mathrm{d}_{\sigma_y},x\in\mathbf{R}^3,\tag{5}$$

一旦验证函数 $g(x)$满足性质(2),则易知 $g(x)$属于 $\Phi(\kappa,A)$,这里不再详细推导,可以参考文献[12].

首先,回顾一下经典的热方程

$$\nu_t=\Delta\nu,\nu(0,x)=\nu_0.\tag{6}$$

假设 $\nu_0\in\Phi(\kappa,A)$,则可以确定 $\nu\in\Phi(\kappa,A)$,并且(6)式的解为

$$\nu(t,x)=\mathrm{e}^{-\kappa^2t}\nu_0(x).\tag{7}$$

事实上,用旋度算子作用到(6)式上,容易看到 $\kappa^{-1}\nabla\times u$ 也是(6)式的解.由唯一性可以得到方程

$$\nabla\times u=\kappa\nu.\tag{8}$$

方程(8)隐含着 $\nabla\cdot u=0$,同时也隐含着 $\nu_t=\Delta\nu=-\nabla\times\nabla\times\nu=-\kappa^2\nu$.进一步,由方程(2)和方程(7)可以得到

$$|\nu(t,x)|+|\nabla\nu(t,x)|\leq C\frac{\mathrm{e}^{-\kappa\nu t}}{1+|x|}.\tag{9}$$

3 定理 1 的证明

首先,可以利用标准的截断技术和小摄动参数建立(u,h)在空间 $L_t^\infty H_x^1$ 中的整体有界性,有了这个结果,就能够说明系统的解是一个整体经典解.

假设(u,h)是初值为(u_0,h_0)时,三维不可压缩磁流体动力学方程组系统(1)的唯一解,其中 $u_0=\chi_M\nu_0+b_0$,且 $\|(b_0,h_0)\|_{H^1}\leq M^{-\frac{1}{2}}$,与系统(1)相关的压力 p 可以表示为 $p=-\Delta^{-1}\nabla\cdot[\nabla\cdot(u\otimes u)]+\Delta^{-1}\nabla\cdot[\nabla\cdot(h\otimes h)]$.定义 $b=u-\chi_M\nu$,结合(6)式可以得到关于 b 和 h 的方程

$$\begin{cases}b_t-\Delta b=-\nabla p+h\cdot\nabla h-b\cdot\nabla b+f_1,\\h_t-\Delta h=h\cdot\nabla b-b\cdot\nabla h+f_2,\\\nabla b=-\nu\cdot\nabla\chi_M,\nabla\cdot h=0,\\b(0,x)=b_0,h(0,x)=h_0.\end{cases}\tag{10}$$

这里的 f_1 和 f_2 由下式给出

$$f_1=\nu\Delta\chi_M+2(\nabla\chi_M\cdot\nabla)\nu-\chi_M\nu\cdot\nabla b-b\cdot\nabla(\chi_M\nu)-\chi_M^2\nu\cdot\nabla\nu-\chi_M(\nu\cdot\nabla\chi_M)\nu,$$

$$f_2 = h \cdot \nabla(\chi_M \nu) - \chi_M \nu \cdot \nabla h.$$

用 b 乘以系统(10) 的第一个方程，用 h 乘以系统(10) 的第二个方程，然后关于空间积分可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|b\|_{L^2}^2 + \|h\|_{L^2}^2) + \|\nabla b\|_{L^2}^2 + \|\nabla h\|_{L^2}^2 = \int p \nabla \cdot b - \int (b \cdot \nabla b) b - \int (b \cdot \nabla h) h + \int f_1 b + \int f_2 h, \tag{11}$$

上述计算用到了 $\nabla \cdot h = 0$.结合 p 和 f_1 的表达式，可以得到

$$\int p \nabla \cdot b + \int f_1 b - \int (b \cdot \nabla b) b = \int (-\Delta^{-1} \nabla \cdot [b \cdot \nabla b + \chi_M \nu \cdot \nabla b + b \cdot \nabla(\chi_M \nu) + \chi_M^2 \nu \cdot \nabla \nu + \chi_M (\nu \cdot \nabla \chi_M) \nu] \nabla \cdot b) \mathrm{d}x - \int [b \cdot \nabla b + \chi_M \nu \cdot \nabla b + b \cdot \nabla(\chi_M \nu) + \chi_M^2 \nu \cdot \nabla \nu + \chi_M (\nu \cdot \nabla \chi_M) \nu] \cdot b \mathrm{d}x + \int \Delta^{-1} \nabla \cdot (h \cdot \nabla h) \nabla \cdot b \mathrm{d}x + \int (\Delta \chi_M \nu \cdot b + 2(\nabla \chi_M \cdot \nabla) \nu \cdot b) \mathrm{d}x = \int (b \cdot \nabla b)(\Delta^{-1} \nabla \nabla \cdot b - b) \mathrm{d}x + \int [\chi_M \nu \cdot \nabla b + b \cdot \nabla(\chi_M \nu) + \chi_M^2 \nu \cdot \nabla \nu + \chi_M (\nu \cdot \nabla \chi_M) \nu](\Delta^{-1} \nabla \nabla \cdot b - b) \mathrm{d}x - \int (h \cdot \nabla h)(\Delta^{-1} \nabla \nabla \cdot b) \mathrm{d}x + \int [\Delta \chi_M \nu \cdot b + 2(\nabla \chi_M \cdot \nabla) \nu \cdot b] \mathrm{d}x.$$

为了估计等式(11)右边的项，把它分为以下 4 个部分

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|b\|_{L^2}^2 + \|h\|_{L^2}^2) + \|\nabla b\|_{L^2}^2 + \|\nabla h\|_{L^2}^2 = K_1 + K_2 + K_3 + K_4, \tag{12}$$

其中，

$$K_1 = \int (b \cdot \nabla b)(\Delta^{-1} \nabla \times \nabla \times b) \mathrm{d}x - \int (b \cdot \nabla h) h \mathrm{d}x - \int (h \cdot \nabla h)(\Delta^{-1} \nabla \nabla \cdot b) \mathrm{d}x,$$

$$K_2 = \int [\chi_M \nu \cdot \nabla b + b \cdot \nabla(\chi_M \nu) + \chi_M (\nu \cdot \nabla \chi_M) \nu](\Delta^{-1} \nabla \times \nabla \times b) \mathrm{d}x + \int [\Delta \chi_M \nu \cdot b + 2(\nabla \chi_M \cdot \nabla) \nu \cdot b] \mathrm{d}x,$$

$$K_3 = \int (\chi_M^2 \nu \cdot \nabla \nu)(\Delta^{-1} \nabla \times \nabla \times b) \mathrm{d}x,$$

$$K_4 = \int [h \cdot \nabla(\chi_M \nu) \cdot h - \chi_M \nu \cdot \nabla h \cdot h] \mathrm{d}x,$$

等式(12)的表示用到了等式 $\nabla \times \nabla \times b = \nabla \nabla \cdot b - \Delta b$.

下面分别对 K_1, K_2, K_3, K_4 分别进行估计.根据 Caldron-Zygmund 定理可知，对于 Riesz 算子 Z 和 $1 < p < \infty$，有 $\|Zf\|_p \leq C\|f\|_p$. 由此可以得到

$$|K_1| \leq \left|\int (b \cdot \nabla b) \Delta^{-1} \nabla \times \nabla \times b \mathrm{d}x\right| + \left|\int (b \cdot \nabla h) h \mathrm{d}x\right| + \left|\int (h \cdot \nabla h) \Delta^{-1} \nabla \nabla \cdot b \mathrm{d}x\right| \leq C\|b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^2}\|\Delta^{-1} \nabla \times \nabla \times b\|_{L^6} + C\|b\|_{L^3}\|\nabla h\|_{L^2}\|h\|_{L^6} + C\|b\|_{L^3}\|\nabla h\|_{L^2}\|h\|_{L^6} \leq C\|b\|_{L^3}\|\nabla b\|_{L^2}\|b\|_{L^6} + C\|b\|_{L^3}\|\nabla h\|_{L^2}\|h\|_{L^6} \leq C\|b\|_{L^3}(\|\nabla b\|_{L^2}^2 + \|\nabla h\|_{L^2}^2).$$

联系关于 ν 和 $\nabla \nu$ 的估计(9)式，关于 K_2 可以得到

$$|K_2| \leq C\|\chi_M \nu\|_{L^\infty}\|\nabla b\|_{L^2}\|\Delta^{-1} \nabla \times \nabla \times b\|_{L^2} + C\|\nabla(\chi_M \nu)\|_{L^\infty}\|b\|_{L^2}\|\Delta^{-1} \nabla \times \nabla \times b\|_{L^2} + CM^{-1}\|\nu^2\|_{L^2(|x| \leq 2M)}\|\Delta^{-1} \nabla \times \nabla \times b\|_{L^2} + CM^{-2}\|\nu\|_{L^2(|x| \leq 2M)}\|b\|_{L^2} + CM^{-1}\|\nabla \nu\|_{L^2(M < |x| \leq 2M)}\|b\|_{L^2} \leq CM^{-2}\mathrm{e}^{-\kappa^2 t} + \frac{1}{4}\|\nabla b\|_{L^2}^2 + C\mathrm{e}^{-\kappa^2 t}\|b\|_{L^2}^2,$$

关于 K_3，应用分部积分法和等式 $\nu \cdot \nabla \nu = -\nu \times (\nabla \times \nu) + \frac{1}{2}\nabla|\nu|^2 = \frac{1}{2}\nabla|\nu|^2$，有

$$|K_3| = \left|\int (\chi_M^2 \nu \cdot \nabla \nu)(\Delta^{-1} \nabla \times \nabla \times b) \mathrm{d}x\right| \leq \left|\int \chi_M^2 (-\nu \times (\nabla \times \nu) + \frac{1}{2}\nabla|\nu|^2) \Delta^{-1} \nabla \times \nabla \times b \mathrm{d}x\right| \leq$$

$$C\left|\int\chi_M^2\nabla|\nu|^2\cdot\Delta^{-1}\nabla\times\nabla\times b\,\mathrm{d}x\right|\leq C\left|\int\chi_M|\nu|^2\nabla\chi_M\cdot\Delta^{-1}\nabla\times\nabla\times b\,\mathrm{d}x\right|\leq$$

$$CM^{-1}\|\nu\|_{L^4(|x|\leq 2M)}\|b\|_{L^2}\leq CM^{-2}\mathrm{e}^{-2\kappa^2 t}+C\mathrm{e}^{-2\kappa^2 t}\|b\|_{L^2}^2.$$

应用类似的方法,关于 K_4 有

$$|K_4|\leq\|\nabla(\chi_M\nu)\|_{L^\infty}\|h\|_{L^2}^2+\|\chi_M\nu\|_{L^\infty}\|\nabla h\|_{L^2}\|h\|_{L^2}\leq C\mathrm{e}^{-\kappa^2 t}\|h\|_{L^2}^2+\frac{1}{4}\|\nabla h\|_{L^2}^2.$$

综合以上关于 K_1,K_2,K_3,K_4 的估计,可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|b\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2)+\left(\frac{3}{4}-CJ\right)(\|\nabla b\|_{L^2}^2+\|\nabla h\|_{L^2}^2)\leq$$

$$C\mathrm{e}^{-\kappa^2 t}(\|b\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2)+CM^{-1}\mathrm{e}^{-\kappa^2 t},\tag{13}$$

其中,$J=\|b\|_{L^3}+\|h\|_{L^3}$.

其次,作用旋度算子到方程(10)上,并对 $\nabla\times b$ 和 $\nabla\times h$ 作 L_2 内积,可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla\times b\|_{L^2}^2+\|\nabla\times h\|_{L^2}^2)+\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}^2+\|\nabla\nabla\times h\|_{L^2}^2=$$

$$L_1+L_2+L_3+L_4+L_5+L_6,\tag{14}$$

等式(14)中

$$L_1=\int\nabla\times(h\cdot\nabla h)\nabla\times b,L_2=-\int\nabla\times(b\cdot\nabla b)\nabla\times b,L_3=\int\nabla\times(h\cdot\nabla b)\nabla\times h,$$

$$L_4=-\int\nabla\times(b\cdot\nabla h)\nabla\times h,L_5=\int\nabla\times f_1\nabla\times b,L_6=\int\nabla\times f_2\nabla\times h,$$

接下来将对 L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,L_6 分别进行估计.利用分部积分公式和熟知的估计 $\|\nabla f\|_{L^2}\leq C(\|\nabla\cdot f\|_{L^2}+\|\nabla\times f\|_{L^2})$,进一步可得

$$|L_1|\leq\left|\int(h\cdot\nabla h)\nabla\times\nabla\times b\right|\leq C\|h\|_{L^3}\|\nabla h\|_{L^6}\|\nabla\times\nabla\times b\|_{L^2}\leq C\|h\|_{L^3}(\|\nabla\cdot h\|_{L^6}+$$

$$\|\nabla\times h\|_{L^6})\|\nabla\times\nabla\times b\|_{L^2}\leq C\|h\|_{L^3}\|\nabla\nabla\times h\|_{L^2}\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}\leq$$

$$C\|h\|_{L^3}(\|\nabla\nabla\times h\|_{L^2}^2+\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}^2).$$

关于 L_2,注意到 $\nabla\cdot b=-\nu\cdot\nabla\chi_M$,应用索伯列夫不等式可得

$$|L_2|\leq C\|b\|_{L^3}(\|\nabla\cdot b\|_{L^6}+\|\nabla\times b\|_{L_6})\|\nabla\times\nabla\times b\|_{L^2}\leq C\|b\|_{L^3}\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}^2+$$

$$CM^{-1}\mathrm{e}^{-\kappa^2 t}\|b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla b\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\times\nabla\times b\|_{L^2}\leq C\|b\|_{L^3}\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}^2+$$

$$\frac{1}{8}(\|\nabla b\|_{L^2}^2+\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}^2)+CM^{-4}\mathrm{e}^{-4\kappa^2 t}\|b\|_{L^2}^2.$$

同理,关于 L_3 可得

$$|L_3|\leq C\|h\|_{L^3}(\|\nabla\cdot b\|_{L^6}+\|\nabla\times b\|_{L^6})\|\nabla\times\nabla\times b\|_{L^2}\leq C\|h\|_{L^3}\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}\|\nabla\nabla\times$$

$$h\|_{L^2}+CM^{-1}\mathrm{e}^{-\kappa^2 t}\|h\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla h\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\nabla\times\nabla\times h\|_{L^2}\leq C\|h\|_{L^3}(\|\nabla\nabla\times h\|_{L^2}^2+$$

$$\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}^2)+\frac{1}{8}(\|\nabla h\|_{L^2}^2+\|\nabla\nabla\times h\|_{L^2}^2)+CM^{-4}\mathrm{e}^{-4\kappa^2 t}\|h\|_{L^2}^2.$$

关于 L_4,容易推出它是有界的,如下所示

$$|L_4|\leq\|b\|_{L^3}\|\nabla\times b\|_{L^6}\|\nabla\times\nabla\times h\|_{L^2}\leq\|b\|_{L^3}\|\nabla\nabla\times h\|_{L^2}^2.$$

为了估计 L_5,把 L_5 分为两个部分,即 $L_5=L_{51}+L_{52}$,其中

$$L_{51}=\int\nabla\times(\nu\nabla\chi_M+2(\nabla\chi_M\cdot\nabla)\nu)\nabla\times b,$$

$$L_{52}=-\int\nabla\times(\chi_M\nu\cdot\nabla b+b\cdot\nabla(\chi_M\nu)+\chi_M^2\nu\cdot\nabla\nu+\chi_M(\nu\cdot\nabla\chi_M)\nu)\nabla\times b.$$

再次利用分部积分,进一步得到

$$|L_{51}|\leq CM^{-2}\|\nu\|_{L^2(|x|\leq 2M)}\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}+CM^{-1}\|\nabla\nu\|_{L^2(M<|x|\leq 2M)}\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}\leq$$

$$CM^{-1}\mathrm{e}^{-2\kappa^2 t}+\frac{1}{8}\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}^2, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}|L_{52}|\le{}&C(\|\chi_M\|_{L^\infty}\|\nabla b\|_{L^2}+\|\nabla(\chi_M)\nu\|_{L^\infty}\|b\|_{L^2}+\|\nabla\chi_M\|_{L^\infty}\|\nu\|_{L^4}^2)\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}\le\\&C\mathrm{e}^{-2\kappa^2 t}(\|\nabla b\|_{L^2}+\|b\|_{L^2})\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}+CM^{-1}\mathrm{e}^{-2\kappa^2 t}\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}\le C\mathrm{e}^{-\kappa^2 t}(\|\nabla\times b\|_{L^2}+\\&\|\nu\cdot\nabla\chi_M\|_{L^2}+\|b\|_{L^2})\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}+\frac{1}{16}\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}^2+CM^{-2}\mathrm{e}^{-4\kappa^2 t}\le\\&C\mathrm{e}^{-2\kappa^2 t}(\|\nabla\times b\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2)+\frac{1}{8}\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}^2+CM^{-1}\mathrm{e}^{-2\kappa^2 t},\end{aligned} \tag{16}$$

结合(15)和(16)式就得到了关于 L_5 的估计结果.

最后估计 L_6,得到如下结果

$$\begin{aligned}|L_6|\le{}&C(\|h\|_{L^2}\|\nabla(\chi_M\nu)\|_{L^\infty}+\|\chi_M\nu\|_{L^\infty}\|\nabla h\|_{L^2})\|\nabla\nabla\times h\|_{L^2}\le C\mathrm{e}^{-\kappa^2 t}(\|\nabla\times h\|_{L^2}+\\&\|h\|_{L^2})\|\nabla\nabla\times h\|_{L^2}\le C\mathrm{e}^{-2\kappa^2 t}(\|\nabla\times h\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2)+\frac{1}{8}\|\nabla\nabla\times h\|_{L^2}^2.\end{aligned}$$

综合以上关于 L_1,L_2,L_3,L_4,L_5,L_6 的估计结果,由(14)式进一步可以得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla\times b\|_{L^2}^2+\|\nabla\times h\|_{L^2}^2)+\left(\frac{5}{8}-CJ\right)(\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}^2+\|\nabla\nabla\times h\|_{L^2}^2)\le\frac{1}{8}(\|\nabla b\|_{L^2}^2+\\&\|\nabla h\|_{L^2}^2)+C\mathrm{e}^{-\kappa^2 t}(\|\nabla\times b\|_{L^2}^2+\|\nabla\times h\|_{L^2}^2+\|b\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2)+CM^{-1}\mathrm{e}^{-2\kappa^2 t},\end{aligned} \tag{17}$$

其中,$J=\|b\|_{L^3}+\|h\|_{L^3}$.

最后,结合(13)和(17)式的估计结果,有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|b\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2+\|\nabla\times b\|_{L^2}^2+\|\nabla\times h\|_{L^2}^2)+\left(\frac{5}{8}-CJ\right)(\|\nabla b\|_{L^2}^2+\\&\|\nabla h\|_{L^2}^2+\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}^2+\|\nabla\nabla\times h\|_{L^2}^2)\le C\mathrm{e}^{-\kappa^2 t}(\|b\|_{L^2}^2+\|h\|_{L^2}^2+\\&\|\nabla\times b\|_{L^2}^2+\|\nabla\times h\|_{L^2}^2)+CM^{-1}\mathrm{e}^{-2\kappa^2 t}.\end{aligned} \tag{18}$$

由此可知,如果对于任意的 $0\le t\le T$,成立 $CJ=C(\|b\|_{L^3}+\|h\|_{L^3})\le\frac{1}{8}$,则根据格朗沃尔不等式可得

$$\begin{aligned}&\|b(t)\|_{L^2}^2+\|h(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla\times b(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla\times h(t)\|_{L^2}^2+\int_0^T(\|\nabla b(t)\|_{L^2}^2+\|\nabla h(t)\|_{L^2}^2+\\&\|\nabla\nabla\times b\|_{L^2}^2+\|\nabla\nabla\times h\|_{L^2}^2)\mathrm{d}t\le CM^{-1}.\end{aligned} \tag{19}$$

再由索伯列夫嵌入定理

$$\begin{aligned}C(\|b\|_{L^3}+\|h\|_{L^3})\le{}&C(\|b\|_{L^2}+\|\nabla b\|_{L^2}+\|\nabla\times b\|_{L^2}+\|h\|_{H^1}+\\&\|\nabla\times h\|_{L^2}),0<t<T,\end{aligned}$$

以及初始值假设 $\|(b_0,h_0)\|_{H^1}\le M^{-\frac{1}{2}}$,利用标准的连续性方法可知对任意的 $t>0$,(19)式恒成立,若假设 M 充分大,则进一步可得

$$\|(b(t,\cdot),h(t\ \cdot))\|_{H^1}\le CM^{-\frac{1}{2}},t>0.$$

由于 $b=u-\chi_M\nu$,易知 (u,h) 在空间 $L_t^\infty H_x^1$ 中整体有界,这个结果表明 MHD 系统(1)有一个整体经典解.

定理 1 证明完毕.

参 考 文 献

[1] MAJDA A,BERTOZZI A.Vorticity and Incompressible Flow.Names[M].Cambridge:Cambridge University Press,2002.

[2] CHEMIN J Y,GALLAGHER I.On the global wellposedness of the 3-D Navier-Stokes equations with large initial data[J].Ann Sci De Norm Sup,2006,39(4):679-698.

[3] CHEMIN J Y,GALLAGHER I.Wellposedness and stability results for the Navier-Stokes equations in $\mathbf{R}^3$[J].Ann Inst H Poincaré Anal Non Linéaire,2009,26(2):599-624.

[4] CHEMIN J Y,GALLAGHER I.Large,global solutions to the Navier-Stokes equations,slowly varying in one direction[J].Trans Amer Math Soc,2010,362(6):2859-2873.

[5] CHEMIN J Y, GALLAGHER I, PAICU M. Global regularity for some classes of large solutions to the Navier-Stokes equations[J]. Ann of Math, 2011, 173(2): 983-1012.

[6] HE C, HUANG X D, WANG Y. On Some New Global Existence Result of 3D Magnetohydrodynamic Equtions[J]. Nonlinearity, 2014, 27(2): 343-354.

[7] LIN F H, XU L, ZHANG P. Global Small Solutions to 2D incompressible MHD System[J]. Journal of Differential Equations, 2015, 259(10): 5440-5485.

[8] SHAO S G, WANG S, XU W Q, et al. Global existence for the 2D Navier-Stokes flow in the exterior of a moving or rotating obstacle[J]. Kinetic and Related Models, 2016, 9(4): 767-776.

[9] SHAO S G, WANG S, XU W Q. Global regularity for a model of Navier-Stokes equations with logarithmic sub-dissipation[J]. Kinetic and Related Models, 2018, 11(1): 179-190.

[10] DUVAUT G, LIONS J L. Inéquations en thermoélasticité et magnéto-hydrodyna-mique[J]. Arch Rational Mech Anal, 1972, 46(4): 241-279.

[11] LEI Z, ZHOU Y. BKM's criterion and global weak solutions for magnéto-hydrod-ynamics with zero viscosity[J]. DCDS-A, 2009, 25(2): 575-583.

[12] LEI Z, LIN F H, ZHOU Y. Structure of Helicity and Gobal Solutions of Incompressible Navier-Stokes Equations[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2015, 218: 1417-1430.

[13] LEI Z. On Axially Symmetric Incompressible Magnetohydrodynamics in Three Dimensions[J]. Journal of Differential Equations, 2015, 259(7): 3202-3215.

[14] SHAO S G, WANG S, XU W Q, et al. On the local? solution of ideal magnetohydrodynamical equations[J]. DCDS-A, 2017, 37(4): 2103-2113.

Global solution of 3D incompressible magnetohydrodynamics equations

Ge Yuli, Shao Shuguang

(School of Mathematics and Statistics, Nanyang Normal University, Nanyang 473061, China)

Abstract: In this paper, a three-dimensional MHD system with both Laplacian dissipation and magnetic diffusion is studied. The classical solutions of the equations are obtained in the case of finite energy. The Beltrami flows in steady state is chosen as the initial value, and the global regularity of the equations for all time is proved by using the cut-off function technique and prior estimation.

Keywords: magnetohydrodynamics equations; finite energy; global solution; Beltrami flows; regularity

[责任编校 陈留院 赵晓华]