文章编号:1000-2367(2020)01-0011-07 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2020.01.003

具有启动时间的 M/M/1 休假排队的顾客最优策略研究

田瑞玲,王亚利

(燕山大学 理学院,河北 秦皇岛 066004)

摘 要:研究具有启动时间和单重休假的马尔科夫排队中顾客的均衡策略和社会最优止步策略.基于部分可视的系统状态信息,顾客到达系统时,只能观察到服务员的状态.根据收益-费用结构,得到顾客的收益函数和社会效益函数,进而确定均衡策略,并在数值和社会最优策略方面进行了比较.

关键词:排队;均衡策略;社会最优策略;单重休假;启动时间

中图分类号:O226 **文献标志码**:A

在过去的几十年里,以经济视角研究排队系统成了一个趋势.在这种排队中,强加了一个收益-费用结构,以此来体现到达的顾客对服务的需求和对等待的反感.顾客到达排队系统时,对于拥挤现象引起的延迟,往往是通过最大化自己的收益去决定自己的去留.这种情况可以认为是顾客间的一个博弈,其中最基本的问题是寻求顾客最优策略.文献[1-2]最早研究这种排队经济学模型,他们分别研究了 M/M/1 排队中可视和不可视情形下顾客的最优策略问题.此后越来越多的学者开始关注这个方向,更多结果详见文献[3].

文献[4]最早在休假排队中研究博弈问题,他们考虑了具有启动时间的 M/M/1 排队,分别在 4 种不同的系统信息状态下研究了顾客均衡策略.在此基础上,文献[5]在具有启动时间和 N 策略的 M/M/1 部分可视排队中研究了系统的性能指标并得到了顾客的均衡止步策略.文献[6]把文献[4]的模型推广到了单重休假的可视排队情形,并得到了顾客的均衡策略.文献[7]分析了具有单重工作休假和休假中断休假的 M/M/1 排队中顾客的均衡策略.文献[8]还在具有单重休假和启动时间的排队中考察了完全可视和完全不可视情形下顾客的最优策略问题.在这期间,大量的关于休假排队经济学模型的研究不断涌现[9-12],使得排队经济学模型的结果很快丰富起来.

本文是在文献[8]的基础上考虑具有单重休假和启动时间的排队中部分可视情形,假设顾客到达时能观察到服务员状态,而不能预知系统队长.通过系统稳态分析,进而得到顾客的均衡进入策略,并和社会最优策略进行比较.

1 模型简介

假设潜在到达的顾客服从参数为 λ 的泊松过程.服务时间为参数为 μ 的指数分布.当系统为空时,服务员开始一次休假.当休假结束时,如果系统中有顾客等待,则服务员立刻进入忙期,否则,系统关闭.若关闭期内有顾客到达,则关闭期结束,但是服务员需要经历一个启动期才能为顾客提供服务.休假时间和启动时间分别服从参数为 θ 和 ξ 的指数分布.假设到达间隔,服务时间,休假时间以及启动时间都是相互独立的.另外,服务规则是先到先服务.

设时刻 t 的系统状态用 $(N(t), I(t))$ 表示,其中 $N(t)$ 表示时刻 t 系统的顾客数,$I(t)$ 表示时刻 t 服务员的状态.$I(t)=0$ 表示服务员处在休假状态,$I(t)=1$ 表示服务员处在启动期,$I(t)=2$ 表示服务员处在忙期.

收稿日期:2018-05-08;修回日期:2019-06-10.

基金项目:国家自然科学基金(11601469);河北省教育厅高等学校科技计划重点项目(ZD2018042);燕山大学博士基金项目(B884).

作者简介(通信作者):田瑞玲(1979—),女,河南濮阳人,燕山大学副教授,博士,研究方向为排队论和经济学排队,E-mail:tianrl@ysu.edu.cn.

很明显随机过程$\{(N(t),I(t)),t\geq 0\}$是一个连续时间的马尔科夫链.假设(N,I)为$(N(t),I(t))$的稳态极限，它的分布表示为

$$p(n,i)=P\{N=n,I=i\}=\lim_{t\to\infty}P\{N(t)=n,I(t)=i\}.$$

现在假定顾客到达时自己决定是否进入排队.一旦进入排队,中途退出是不允许的.为了塑造这个决策过程,假设每一个顾客完成服务都会有一个收益R,这个可以反映出顾客的满意度和服务的价值.另一方面,当顾客进入系统,存在着一个单位时间等待费用C.顾客是风险中立的并且在均衡下会最大化自己的平均净收益.假设

$$R>\frac{C}{\mu}+\min\left\{\frac{C}{\theta},\frac{C}{\xi}\right\},\tag{1}$$

这就保证了当到达顾客发现服务员处在关闭期或假期而决定进入系统时,他的服务收益会超过他的等待费用.否则,没有顾客会在启动期或假期内进入系统.

2 策略分析

由于顾客到达时只能观察到服务员的状态,有两个纯策略:进入系统或止步.纯策略或混合策略可由顾客的进入概率来表示.假设q_i为顾客到达时发现服务员在状态$i(i=0,1,2)$而进入系统的概率.如果所有的顾客都遵循一个混合策略(q_0,q_1,q_2),当服务员处在状态$i(i=0,1,2)$时,顾客的到达率为λq_i,形成了一个马尔科夫过程,状态空间为$\Omega=\{(0,0)\}\cup\{(0,1)\}\cup\{(n,i)\mid n\geq 1,i=0,1,2\}$.

根据字典排序可以得到系统状态转移率矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{C}_0 & & & \\ \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} & & \\ & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} & \\ & & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}-(\lambda q_0+\theta) & \theta \\ 0 & -\lambda q_1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}_0=\begin{pmatrix}\lambda q_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda q_1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\lambda q_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda q_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda q_2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-(\lambda q_0+\theta) & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda q_1+\xi) & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda q_2+\mu)\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\end{pmatrix},\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \mu & 0\end{pmatrix}.$$

矩阵$\boldsymbol{Q}$的结构说明$\{(N(t),I(t)),t\geq 0\}$过程是一个拟生灭过程(Quasi Birth and Death Process)(Neuts[13]).为了分析这个拟生灭过程,需要去解二次矩阵方程

$$\boldsymbol{R}^2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{RA}+\boldsymbol{C}=0\tag{2}$$

的最小非负解$\boldsymbol{R}$.

由于矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$都是上三角的,$\boldsymbol{R}$也有同样的结构.解方程(2)可得到

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\sigma_0 & 0 & \rho_0 \\ 0 & \delta_1 & \rho_1 \\ 0 & 0 & \rho_2\end{pmatrix},\tag{3}$$

其中

$$\rho_0=\frac{\lambda q_0}{\mu},\rho_1=\frac{\lambda q_1}{\mu},\rho_2=\frac{\lambda q_2}{\mu},\sigma_0=\frac{\lambda q_0}{\lambda q_0+\theta},\delta_1=\frac{\lambda q_1}{\lambda q_1+\xi}.$$

定理 1 假设$\sigma_0\neq\rho_2,\rho_2<1$,稳态概率$\{p(n,i):(n,i)\in\Omega\}$为

$$p(n,0)=K\sigma_0^n,n\geq 0,\tag{4}$$

$$p(n,1)=K\ \frac{\theta}{\lambda q_1}\delta_1^n, n\geq 0, \tag{5}$$

$$p(n,2)=K\left(\sigma_0\rho_0\ \frac{\sigma_0^{n-1}-\rho_2^{n-1}}{\sigma_0-\rho_2}+\frac{\theta}{\lambda q_1}\delta_1\rho_1\ \frac{\delta_1^{n-1}-\rho_2^{n-1}}{\delta_1-\rho_2}+\frac{\lambda q_0+\theta}{\lambda q_2}\rho_2^n\right), n\geq 1, \tag{6}$$

其中

$$K=\left(\frac{1}{1-\sigma_0}+\frac{\theta}{\lambda q_1(1-\delta_1)}+\frac{\lambda q_0(1-\delta_1)+\theta(1-\sigma_0)}{\mu(1-\rho_2)(1-\sigma_0)(1-\delta_0)}\right)^{-1}.$$

证明　利用矩阵几何解方法,有

$$(p(n,0),p(n,1),p(n,2))=(p(1,0),p(1,1),p(1,2))\boldsymbol{R}^{n-1}, n\geq 1. \tag{7}$$

并且 $(p(0,0),p(0,1))$ 和 $(p(1,0),p(1,1),p(1,2))$ 满足方程

$$(p(0,0),p(0,1),p(1,0),p(1,1),p(1,2))B[\boldsymbol{R}]=0, \tag{8}$$

其中

$$B[\boldsymbol{R}]=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{C}_0\\ \boldsymbol{B}_0 & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{R}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}.$$

设 $p(0,0)$ 为一个常数,解方程组(8)可得

$$(p(0,0),p(0,1))=\left(1,\frac{\theta}{\lambda q_1}\right)p(0,0),(p(1,0),p(1,1),p(1,2))=\left(\sigma_0,\frac{\theta}{\lambda q_1}\delta_1,\frac{\lambda q_0+\theta}{\mu}\right)p(0,0).$$

把 $(p(1,0),p(1,1),p(1,2))$ 和 $\boldsymbol{R}^{n-1}$ 带入(7)式就可得到定理 1 的结果.

令 p_i 表示服务员处在状态 $i(i=0,1,2)$ 的概率.由定理 1 结果可得

$$p_0=\sum_{n=0}^{\infty}p(n,0)=\frac{K}{1-\sigma_0}, \tag{9}$$

$$p_1=\sum_{n=0}^{\infty}p(n,1)=\frac{K\theta}{\lambda q_1(1-\delta_1)}, \tag{10}$$

$$p_2=\sum_{n=1}^{\infty}p(n,2)=\frac{K}{1-\rho_2}\ \frac{\lambda q_0(1-\delta_1)+\theta(1-\sigma_0)}{\mu(1-\sigma_0)(1-\delta_1)}. \tag{11}$$

考虑一个在状态 $i(i=0,1,2)$ 到达的顾客.令 $\pi(n|i)$ 为一个顾客在状态 i 到达时系统中有 n 个顾客的概率,所以有

$$\pi(n\mid i)=\frac{p(n,i)}{\sum_{k=0}^{\infty}p(k,i)}, n\geq 0, i=0,1;\pi(n\mid 2)=\frac{p(n,2)}{\sum_{k=1}^{\infty}p(k,2)}.$$

设 $E[N\mid i]$ 为一个顾客在状态 $i(i=0,1,2)$ 到达时看到的系统中的平均顾客数,且 $E[N\mid i]=\sum n\pi(n\mid i)$,所以

$$E[N\mid 0]=\frac{\sigma_0}{1-\sigma_0}, E[N\mid 1]=\frac{\delta_1}{1-\delta_1},$$

$$E[N\mid 2]=\frac{1}{1-\rho_2}+\frac{\lambda q_0\sigma_0(1-\delta_1)^2+\theta\delta_1(1-\sigma_0)^2}{\lambda q_0(1-\sigma_0)(1-\delta_1)^2+\theta(1-\sigma_0)^2(1-\delta_1)}.$$

考虑一个在状态 $i(i=0,1,2)$ 到达的标记顾客.如果其决定进入排队,则平均净收益为

$$U_0(q_0)=R-\frac{C(E[N\mid 0]+1)}{\mu}-\frac{C}{\theta}=R-\frac{C(\lambda q_0+\theta)}{\mu\theta}-\frac{C}{\theta}, \tag{12}$$

$$U_1(q_1)=R-\frac{C(E[N\mid 1]+1)}{\mu}-\frac{C}{\xi}=R-\frac{C(\lambda q_1+\xi)}{\mu\xi}-\frac{C}{\xi}, \tag{13}$$

$$U_2(q_0,q_1,q_2)=R-\frac{C(E[N\mid 2]+1)}{\mu}=R-\frac{C}{\mu-\lambda q_2}-\frac{C}{\mu}\ \frac{\lambda q_0\xi^2(\lambda q_0+\theta)^2+\theta^3(\lambda q_1+\xi)^2}{\lambda q_0\xi^2\theta(\lambda q_0+\theta)+\theta^3\xi(\lambda q_1+\xi)}. \tag{14}$$

利用(12)、(13)和(14)式,可以计算顾客的均衡进入策略.首先令 x_0 和 x_1 分别为 $U_0(q_0)=0$ 和 $U_1(q_1)=0$ 的根.假设下面的表达式:

$$x_0=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{R\mu\theta}{C}-\mu-\theta\right),x_1=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{R\mu\xi}{C}-\mu-\xi\right),\Delta_1=\frac{\lambda x_0\xi^2(\lambda x_0+\theta)^2+\theta^3(\lambda x_1+\xi)^2}{\lambda x_0\xi^2\theta(\lambda x_0+\theta)+\theta^3\xi(\lambda x_1+\xi)},$$

$$\Delta_2=\frac{\lambda x_0\xi^2(\lambda x_0+\theta)^2+\theta^3(\lambda+\xi)^2}{\lambda x_0\xi^2\theta(\lambda x_0+\theta)+\theta^3\xi(\lambda+\xi)},\Delta_3=\frac{\lambda\xi^2(\lambda+\theta)^2+\theta^3(\lambda+\xi)^2}{\lambda\xi^2\theta(\lambda+\theta)+\theta^3\xi(\lambda+\xi)}.$$

定理 2 设 $\theta<\xi$ 和 $\mu(\xi-\theta)<\lambda\theta$,则存在着唯一的均衡策略$(q_0^e,q_1^e,q_2^e)$,并有如下结果:

1) $\frac{C}{\mu}+\frac{C}{\xi}<R\leq\frac{C}{\mu}+\frac{C}{\theta}$,

$$(q_0^e,q_1^e,q_2^e)=\begin{cases}(0,x_1,0), & R<\frac{C}{\mu}+\frac{C(\lambda x_1+\xi)}{\mu\xi},\\ \left(0,x_1,\frac{1}{\lambda}\left(\mu-\frac{C\mu\xi}{R\mu\xi-C(\lambda x_1+\xi)}\right)\right), & \frac{C}{\mu}+\frac{C(\lambda x_1+\xi)}{\mu\xi}\leq R\leq\frac{C}{\mu-\lambda}+\frac{C(\lambda x_1+\xi)}{\mu\xi},\\ (0,x_1,1), & R>\frac{C}{\mu-\lambda}+\frac{C(\lambda x_1+\xi)}{\mu\xi};\end{cases}$$

2) $\frac{C}{\mu}+\frac{C}{\theta}<R\leq\frac{C(\lambda+\xi)}{\mu\xi}+\frac{C}{\mu}$,

$$(q_0^e,q_1^e,q_2^e)=\begin{cases}(x_0,x_1,0), & R<\frac{C}{\mu}+(\Delta_1+1),\\ \left(x_0,x_1,\frac{1}{\lambda}\left(\mu-\frac{C\mu}{R\mu-C\Delta_1}\right)\right), & \frac{C}{\mu}(\Delta_1+1)\leq R\leq\frac{C}{\mu-\lambda}+\frac{C\Delta_1}{\mu},\\ (x_0,x_1,1), & R>\frac{C}{\mu-\lambda}+\frac{C\Delta_1}{\mu};\end{cases}$$

3) $\frac{C(\lambda+\xi)}{\mu\xi}+\frac{C}{\mu}<R\leq\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\mu}$,

$$(q_0^e,q_1^e,q_2^e)=\begin{cases}(x_0,1,0), & R<\frac{C}{\mu}(\Delta_2+1),\\ \left(x_0,1,\frac{1}{\lambda}\left(\mu-\frac{C\mu}{R\mu-C\Delta_2}\right)\right), & \frac{C}{\mu}(\Delta_2+1)\leq R\leq\frac{C}{\mu-\lambda}+\frac{C\Delta_2}{\mu},\\ (x_0,1,1), & R>\frac{C}{\mu-\lambda}+\frac{C\Delta_2}{\mu};\end{cases}$$

4) $\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\mu}<R$,

$$(q_0^e,q_1^e,q_2^e)=\begin{cases}(1,1,0), & R<\frac{C}{\mu}(\Delta_3+1),\\ \left(1,1,\frac{1}{\lambda}\left(\mu-\frac{C\mu}{R\mu-C\Delta_3}\right)\right), & \frac{C}{\mu}(\Delta_3+1)\leq R\leq\frac{C}{\mu-\lambda}+\frac{C\Delta_3}{\mu},\\ (1,1,1), & R>\frac{C}{\mu-\lambda}+\frac{C\Delta_3}{\mu}.\end{cases}$$

证明 设 $\theta<\xi$,则最初的条件(1)为 $R>C(\mu^{-1}+\xi^{-1})$.这样保证了启动时间内到达的顾客将会进入排队.在 $\mu(\xi-\theta)<\lambda\theta$ 的条件下,有

$$\frac{C}{\mu}+\frac{C}{\xi}<\frac{C}{\mu}+\frac{C}{\theta}<\frac{C(\lambda+\xi)}{\mu\xi}+\frac{C}{\xi}<\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\theta}.$$

1) $\frac{C}{\mu}+\frac{C}{\xi}<R\leq\frac{C}{\mu}+\frac{C}{\theta}$,此时 $U_0(0)<0$,$U_1(0)>0$ 和 $U_1(1)<0$.在此情形下,即使状态 0 时没有顾客进入,进入顾客的收益也是非正的,因此 $q_0^e=0$ 是一个均衡策略.另外,如果启动时间内到达的顾客都进入排队,则会有一个负的收益.因此 $q_1^e=1$ 不是均衡策略.如果所有顾客利用策略 $q_1^e=0$ 则会有一个正的收益,所以 $q_1^e=0$ 也不是均衡策略.于是就存在着一个唯一的 q_1^e 满足 $U_1(q_1)=0$,即 $q_1^e=x_1$. 于是有

$$U_2(0,x_1,q_2)=R-\frac{C}{\mu-\lambda q_2}-\frac{C(\lambda x_1+\xi)}{\mu\xi}.$$

利用上面的分析方法，有

a) $U_2(0,x_1,0)<0$，则有唯一的均衡策略 $q_2^e=0$；

b) $U_2(0,x_1,0)>0$，$U_2(0,x_1,1)<0$，则有唯一的均衡策略 q_2^e 满足 $U_2(x,x_1,q_2^e)=0$，于是

$$q_2^e=\frac{1}{\lambda}\left(\mu-\frac{C\mu\xi}{R\mu\xi-C(x_1+\xi)}\right);$$

c) $U_2(0,x_1,1)>0$，则有唯一的均衡策略 $q_2^e=1$.

2) $\frac{C}{\mu}+\frac{C}{\theta}<R\leq\frac{C(\lambda+\xi)}{\mu\xi}+\frac{C}{\mu}$，此时 $U_0(0)>0$，$U_0(1)<0$，$U_1(0)>0$ 和 $U_1(1)<0$.在此情形下，存在着一个唯一的 q_0^e 和 q_1^e 满足 $U_0(q_0)=0$ 和 $U_1(q_1)=0$，即 $q_0^e=x_0$ 和 $q_1^e=x_1$. 于是有

$$U_2(x_0,x_1,q_2)=R-\frac{C}{\mu-\lambda q_2}-\frac{C(\lambda x_0\xi^2(\lambda x_0+\theta)^2+\theta^3(\lambda x_1+\xi)^2)}{\mu(\lambda x_0\xi^2\theta(\lambda x_0+\theta)+\theta^3\xi(\lambda x_1+\xi))}.$$

利用上面的分析方法，有

a) $U_2(x_0,x_1,0)<0$，则有唯一的均衡策略 $q_2^e=0$；

b) $U_2(x_0,x_1,0)>0$，$U_2(x_0,x_1,1)<0$，则有唯一的均衡策略 q_2^e 满足 $U_2(x_0,x_1,q_2^e)=0$，于是

$$q_2^e=\frac{1}{\lambda}\left(\mu-\frac{C\mu}{R\mu-C\Delta_1}\right);$$

c) $U_2(x_0,x_1,1)>0$，则有唯一的均衡策略 $q_2^e=1$.

3) $\frac{C(\lambda+\xi)}{\mu\xi}+\frac{C}{\xi}<R\leq\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\theta}$，此时 $U_0(0)>0$，$U_0(1)<0$ 和 $U_1(1)>0$.在此情形下，$q_0^e=x_0$，并且状态 1 时标记顾客如果进入系统就会有一个正的收益，所以 $q_1^e=1$. 于是有

$$U_2(x_0,1,q_2)=R-\frac{C}{\mu-\lambda q_2}-\frac{C(\lambda x_0\xi^2(\lambda x_0+\theta)^2+\theta^3(\lambda+\xi)^2)}{\mu(\lambda x_0\xi^2\theta(\lambda x_0+\theta)+\theta^3\xi(\lambda+\xi)}.$$

利用上面的分析方法，有

a) $U_2(x_0,1,0)<0$，则有唯一的均衡策略 $q_2^e=0$；

b) $U_2(x_0,1,0)<0$，$U_2(x_0,1,1)<0$，则有唯一的均衡策略 q_2^e 满足 $U_2(x_0,1,q_2^e)=0$，于是

$$q_2^e=\frac{1}{\lambda}\left(\mu-\frac{C\mu}{R\mu-C\Delta_2}\right);$$

c) $U_2(x_0,1,1)>0$，则有唯一的均衡策略 $q_2^e=1$.

4) $\frac{C(\lambda+\theta)}{\mu\theta}+\frac{C}{\theta}<R$，此时 $U_0(1)>0$ 和 $U_1(1)>0$.在此情形下，存在着一个唯一均衡策略 $q_0^e=1$ 和 $q_1^e=1$. 于是有

$$U_2(1,1,q_2)=R-\frac{C}{\mu-\lambda q_2}-\frac{C(\lambda\xi^2(\lambda+\theta)^2+\theta^3(\lambda+\xi)^2)}{\mu(\lambda\xi^2\theta(\lambda+\theta)+\theta^3\xi(\lambda+\xi))}.$$

利用上面的分析方法，有

a) $U_2(1,1,0)<0$，则有唯一的均衡策略 $q_2^e=0$；

b) $U_2(1,1,0)>0$，$U_2(1,1,1)<0$，则有唯一的均衡策略 q_2^e 满足 $U_2(1,1,q_2^e)=0$，于是 $q_2^e=\frac{1}{\lambda}\left(\mu-\frac{C\mu}{R\mu-C\Delta_3}\right)$；

c) $U_2(1,1,1)>0$，则有唯一的均衡策略 $q_2^e=1$.

通过整理就可得到定理 1 的结论.

类似的，也可以分别得到条件 $\theta<\xi$，$\mu(\xi-\theta)>\lambda\theta$ 和条件 $\theta>\xi$ 的结论.由于篇幅有限，这里省略.

下面考虑社会最优进入策略.由系统稳态分布可以得到系统平均队长为

$$E(L)=\sum_{n=0}^{\infty}np(n,0)+\sum_{n=0}^{\infty}np(n,1)+\sum_{n=1}^{\infty}np(n,2)=K\left(\frac{\sigma_0}{(1-\sigma_0)^2}+\frac{\theta\delta_1}{\lambda q_1(1-\delta_1)^2}+\right.$$

$$\left.\frac{\lambda q_0(1-\sigma_0\rho_2)(1-\delta_1)^2+\theta(1-\delta_1\rho_2)(1-\sigma_0)^2}{\mu(1-\rho_2)^2(1-\sigma_0)^2(1-\delta_1)^2}\right). \tag{15}$$

当所有顾客都遵循策略(q_0,q_1,q_2),单位时间的社会收益为

$$S(q_0,q_1,q_2)=\bar{\lambda}R-CE(L)=\bar{\lambda}R-CK\left(\frac{\sigma_0}{(1-\sigma_0)^2}+\frac{\theta\delta_1}{\lambda q_1(1-\delta_1)^2}+\right)$$
$$\left(\frac{\lambda q_0(1-\sigma_0\rho_2)(1-\delta_1)^2+\theta(1-\delta_1\rho_2)(1-\sigma_0)^2}{\mu(1-\rho_2)^2(1-\sigma_0)^2(1-\delta_1)^2}\right), \tag{16}$$

其中$\bar{\lambda}=\lambda q_0 p_0+\lambda q_1 p_1+\lambda q_2 p_2$.对于社会收益者来说,决策问题就变成制定一个随机策略(q_0,q_1,q_2),使得单位时间的社会收益$S(q_0,q_1,q_2)$最大,并以此得到社会最优进入策略(q_0^*,q_1^*,q_2^*).这就是一个非线性规划问题.由于社会收益函数的复杂性,只给出一些数值例子.

3 数值结果

在本节中,首先给出系统各参数对顾客的均衡策略和均衡社会收益的影响.在图1、图2中均假设$C=1$,$\lambda=2$.分别假设$(\mu,\theta,\xi)=(2,0.5,0.3)$(图1)和$(R,\theta,\xi)=(5,0.5,0.7)$(图2),均衡策略$(q_0^e,q_1^e,q_2^e)$都是随着$R$和$\mu$的增大而增大.这个结果是比较直观的,这是因为在这个过程中服务报酬的增多和服务时间的减少会吸引更多的顾客进入系统.

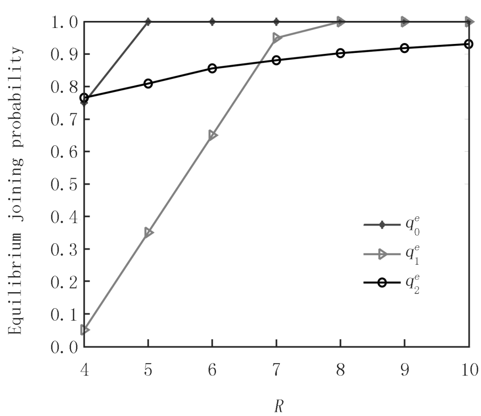

图1 随R变化的均衡策略

Fig.1 Equilibrium strategy changing with R

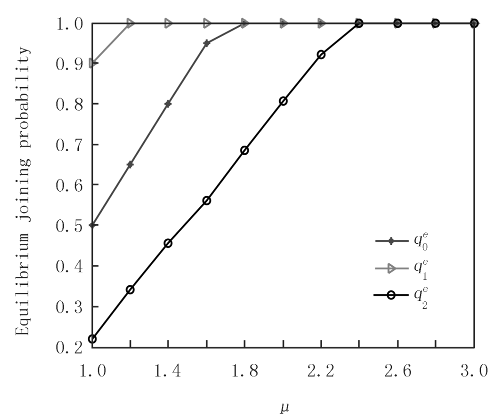

图2 随μ变化的均衡策略

Fig.2 Equilibrium strategy changing with μ

另外,也得到了关于社会最优策略的一些结果.同样,均假设$\mu=3$,$\lambda=2.5$.表1给出了4种情形下两种策略的结果.从中也发现社会最优策略有可能大于均衡策略也有可能小于均衡策略,尤其是在休假状态和启动状态下.

表1 均衡策略和社会最优策略

Tab.1 Equilibrium strategy and socially optimal strategy

(R,C,θ,ξ)	(6,1,1,0.8)	(6,1,0.5,1)	(6,2,0.5,1)	(3,2,1,0.8)
(q_0^e,q_1^e,q_2^e)	(1,1,1)	(1,1,1)	(0.4,1,1)	(0.2,0,1)
(q_0^*,q_1^*,q_2^*)	(1.000,0.857,0.873)	(0.496,1.000,0.927)	(0.610,0.178,0.818)	(0.202,0.106,0.606)

从以上分析中发现顾客在忙期的均衡进入概率也不一定就比假期的高.均衡策略和社会最优策略大小关系也不能确定.这和以前的文献结果是不一样的,造成这个原因是因为两种休假策略组合的复杂性造成的.

4 结 论

本文在部分可视的前提下,考虑了具有单重休假和启动时间的排队中顾客的进入决策.基于收益-费用结构,从顾客自身利益最大化出发,给出了顾客的均衡进入策略.给出了均衡策略的敏感性分析,并从数值上

和社会最优止步策略进行了比较，得出了社会最优策略不一定小于均衡策略的结论.

参 考 文 献

[1] NAOR P.The regulation of queue size by Levying tolls[J].Econometrica，1969，37(1)：15-24.

[2] EDELSON N M，HILDERBRAND D K.Congestion tolls for Poisson queueing processes[J].Econometrica.1975，43(1)：81-92.

[3] HASSIN R，HAVIV M.To queue or not to queue：Equilibrium behavior in queueing systems[M].Boston：Kluwer Academic Publishers，2003.

[4] BURNETAS A，ECONOMOU A.Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times[J].Queueing Systems，2007，56：213-228.

[5] HAO Y Q，WANG J T，WANG Z B，et al.Equilibrium joining strategies in the M/M/1 queues with setup times under N-policy[J].Journal of Systems Science and Systems Engineering，2019，28(2)：141-153.

[6] LIU W Q，MA Y，LI J H.Equilibrium threshold strategies in observable queueing systems under single vacation policy[J].Applied Mathematical Modelling，2012，36：6186-6202.

[7] LEE D H.Equilibrium balking strategies in Markovian queues with a single working vacation and vacation interruption[J].Quality Technology & Quantitative Management，2019，16(3)：355-376.

[8] YUE D Q，TIAN R L，YUE W Y，et al.Equilibrium strategies in an M/M/1 queue with setup times and a single vacation[C]//11th International Symposium on Operations Research and its Applications in Engineering，Technology and Management(ISORA 2013).[s.l.：s.n.]，2013：165-170.

[9] LIU J，WANG J T.Strategic joining rules in a single server Markovian queue with Bernoulli vacation[J].Operational Research-An International Journal，2017，17(2)：413-434.

[10] SUN W，LI S Y，TIAN N S.Equilibrium and optimal balking strategies of customers in unobservable queues with double adaptive working vacations[J].Quality Technology & Quantitative Management，2017，14(1)：94-113.

[11] MA Q Q，ZHAO Y Q，LIU W Q，et al.Customer strategic joining behavior in Markovian queues with working vacations and vacation interruptions under Bernoulli schedule[J].Asia-Pacific Journal of Operational Research，2019，36(1)：1950003.

[12] TIAN R L.Social optimization and pricing strategies in unobservable queues with delayed multiple vacations[J].Mathematical Problems in Engineering，2019.DOI：10.1155/2019/4684957.

[13] NEUTS M F.Matrix-Geometric Solution in Stochastic models[M].Baltimore：Johns Hopkins University Press，1981.

Analysis of optimal strategies for customers in the M/M/1 queue with a single vacation and setup times

Tian Ruiling，Wang Yali

(School of Science，Yanshan University，Qinhuangdao 066004，China)

Abstract：Customers' equilibrium strategies and socially optimal balking strategies are studied in Markovian queues with a single exponential vacation and setup times.Based on the state information of the partially observable system，customers can only observe the server's state when they arrive at the system.According to the reward-cost structure，the customer's profit function and social benefit function are obtained. Then，compared with the socially optimal strategy numerically the equilibrium strategies are determined.

Keywords：queueing；equilibrium strategy；socially optimal strategy；setup times；single vacation

［责任编校　陈留院　赵晓华］