第 45 卷 第 1 期 河南师范大学学报(自然科学版) Vol. 45 No. 1
2017 年 1 月 Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition) Jan. 2017

文章编号:1000 - 2367(2017)01 - 0001 - 07 DOI:10.16366/j.cnki.1000 - 2367.2017.01.001

伪双曲方程非协调 H^1 -Galerkin 有限元超逼近分析

孙淑珍[1], 石翔宇[1], 刘倩[2]

(1. 华北电力大学 数理学院,北京 102206;2. 郑州大学 数学与统计学院,郑州 450001)

摘要:针对一类伪双曲方程,建立了其非协调 H^1-Galerkin 混合有限元逼近格式利用非协调带约束旋转(CNR) Q_1 及零阶 Raviart-Thomas(R-T)元作为逼近空间对,并借助他们的特殊性质,在半离散格式下得到了原始变量 u 的 broken-H^1 模以及流量 $\vec{p} = \nabla u$ 的 $H(div,\Omega)$ 模的 $O(h^2)$ 阶超逼近估计. 同时,构造了一个具有二阶精度的全离散格式,并得到了相关变量的 $O(h^2 + \tau^2)$ 阶超逼近结果. 最后,给出了数值算例验证理论分析的正确性.

关键词:伪双曲方程; H^1 -Galerkin 有限元方法;CNRQ_1 元;超逼近估计

中图分类号:O242.21 **文献标志码**:A

考虑如下的伪双曲方程[1]

$$\begin{cases} u_{tt} - \nabla \cdot (a(x,y)\nabla u_t + a(x,y)\nabla u) + u_t = f(x,y,t), (x,y,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(x,y,t) = 0, (x,y,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \\ u(x,y,0) = u_0(x,y), u_t(x,y,0) = u_1(x,y), (x,y) \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbf{R}^2$ 上的一个具有 Lipschitz 连续边界 $\partial\Omega$ 的凸区域. $f(x,y,t)$, $u_0(x,y)$ 以及 $u_1(x,y)$ 是具有有界导数的连续函数,其中 $a(x,y)$ 满足

$$0 < a_{\min} \le (x,y) \le a_{\max}, \forall (x,y) \in \Omega,$$

这里的 $a_{\min}$ 和 $a_{\max}$ 是正常数.

伪双曲方程是一类具有时间和空间混合偏导数的高阶偏微分方程,它可以用来描述传热、反应扩散等多种物理现象. 因此对于它的研究有着十分重要的理论价值及实际意义. 文献[2]研究了其解的存在唯一性,文献[3]利用类 Wilson 元构造了其非协调的有限元逼近格式,得到了超收敛及外推结果.

与标准 Galerkin 有限元方法相比,混合有限元方法有着对空间光滑度要求低,处理高阶方程便利的优势. 然而该方法需要满足 Brezzi-Babuška(简记为 BB) 条件. 为了克服相应的空间匹配比较难以实现这一致命缺陷,人们提出了许多能够绕开联 BB 条件的数值方法,如最小二乘混合有限元方法[4],分裂正定有限元方法[5], H^1-Galerkin 混合有限元方法[6] 等. 这些方法也被应用到方程(1) 的研究中. 例如,文献[7]利用最小二乘方法得到了解的 L^2 模最优误差估计结果;文献[8 - 9] 分别利用分裂正定混合元方法得到了解的收敛性估计和超逼近及外推结果;文献[10] 讨论了其协调的 H^1-Galerkin 联混合有限元方法,得到了相关变量的收敛性估计;文献[11] 利用 EQ_1^{rot} 元及 Nédélecs 元,构造了它的非协调 H^1 -Galerkin 逼近格式,得到了半离散及全离散格式下解的收敛性结果;文献[12]则利用双线性元以及零阶 R-T 元对研究了它的协调 H^1 -Galerkin 方法,得到了解的超逼近估计.

由于 CNR 联 Q_1 元是具有最少自由度的非协调矩形单元,且已被证明具有超逼近性质[13-14],因此近年来,该元被广泛地应用到偏微分方程的数值求解中. 例如,文献[15]将其应用于平面弹性问题及 Rsissner-Mindlin 板问题数值解的研究中;文献[16 - 17]则将其应用到了混合有限元方法中,讨论了 Navier-Stokes 方程及定常 Stokes 问题解的超收敛性.

收稿日期:2016-07-17;修回日期:2016-12-20.

基金项目:国家自然科学基金(11271340)

作者简介(通信作者):孙淑珍(1960 -),女,吉林吉林人,华北电力大学教授,主要研究方向为信息处理理论与计算技术,E-mail:sshuzh@163.com.

本文主要目的是利用联 CNR 联 Q_1 元及零阶 R-T 元,建立伪双曲方程的最低阶非协调 H^1 -Galerkin 逼近格式. 利用单元的高精度结果,在半离散及全离散格式下分别得到了相关变量的 $O(h^2)$ 及 $O(h^2+\tau^2)$ 阶超逼近结果,并给出数值算例证明了理论分析的正确性. 需要指出的是,本文所得到的关于流量 $\vec{p}$ 在 $H(div;\Omega)$ 模意义下的超逼近是其他许多著名的低阶非协调单元所无法得到的,体现了其合理性及优势.

1 有限元空间的构造

设 Ω 的边分别平行于 x 轴与 y 轴,T_h 是一族正则的矩形剖分单元. 设 $K\in T_h$,其 4 个顶点为 a_1,a_2,a_3,a_4,4 条边为 $l_i=\overline{a_ia_{i+1}}$,$i=1,2,3,4(\mathrm{mod}4)$,中心点为 (x_K,y_K) 其中,l_1,l_3 和 l_2,l_4 分别平行于 x 轴和 y 轴,其长度分别为 h_x 及 h_y. 记 $h_K=diam(K)$,联 $h=\max\{h_K\}$. $\hat{K}$ 为 $(\hat{x},\hat{y})$ 平面上的参考单元,$\hat{a}_1=(-1,-1)$,$\hat{a}_2=(1,-1)$,$\hat{a}_3=(1,1)$,$\hat{a}_4=(-1,1)$ 为其 4 个顶点,则存在仿射变换 $F_K:\hat{K}\to K$

$$\begin{cases} x=x_K+h_x\hat{x},\\ y=y_K+h_y\hat{y}.\end{cases}$$

在 $\hat{K}$ 上定义有限元 $(\hat{K},\hat{P}^1,\hat{\Sigma}^1)$ 如下:

$$\hat{\Sigma}^1=\{\hat{v}_1,\hat{v}_2,\hat{v}_3,\hat{v}_4,\},\hat{P}^1=\mathrm{span}\{1,\hat{x},\hat{y},\hat{x}^2-\hat{y}^2\},$$

其中 $\hat{v}_i=\frac{1}{|\hat{l}_i|}\int_{\hat{l}_i}\hat{v}\mathrm{d}\hat{s},i=1,2,3,4.$

旋转 Q_1 元空间定义为[18]

$$X_h=\{v;\hat{v}|_K=v|_K\circ F_K\in\hat{P}^1,\forall K\in\Gamma_h,\int_F[v]\mathrm{d}s=0,F\subset\partial K\}.$$

其中 $[\varphi]$ 表示 φ 跨越边界 F 产生的跳跃值,当 $F\subset\partial\Omega$ 时,$[\varphi]=\varphi$.

CNRQ_1 元对应的有限元空间 V^h 定义为[13]

$$V^h=\{v;v\in X_h,\int_{l_1}v\mathrm{d}s+\int_{l_3}v\mathrm{d}s=\int_{l_2}v\mathrm{d}s+\int_{l_4}v\mathrm{d}s,\forall K\in\Gamma_h\}.$$

定义 V^h 上的插值算子 $I_h=\prod_h\pi_h$,其中 $\prod_h:H^1(\Omega)\to X_h$ 为旋转 Q_1 元的插值算子,满足

$$\int_{l_i}(v-\prod_K v)\mathrm{d}s=0,i=1,2,3,4.$$

π_h 代表双线性元插值算子,则 $\forall v\in H^2(\Omega)$,有 $I_hv=\prod_h\pi_hv\in V^h$.

定义零阶 R-T 元为

$$\sum\nolimits_K^2=\{p_1,p_2\},\sum\nolimits_K^3=\{q_1,q_2\},$$

$$P_K^2=\mathrm{span}\{1,x\},P_K^3=\mathrm{span}\{1,y\},$$

$$p_i=\frac{1}{|l_i|}\int_{l_i}p\mathrm{d}s,i=2,4,q_i=\frac{1}{|l_i|}\int_{l_i}q\mathrm{d}s,i=1,3.$$

相应的有限元空间为

$$\vec{W}^h=\{\vec{w}^h:\ \vec{w}^h|_K=(w_1^h|_K,w_2^h|_K)\in P_K^2\times P_K^3\}.$$

$J_h:(H^1(\Omega))^2\to W^h$ 为相应的插值算子,满足

$$J_h|_K=J_K,\int_{\partial K}(\vec{q}-J_K\vec{q})\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=0.$$

由文献[12-13],可以得到 $\forall u\in H^3(\Omega)$,$\vec{p}\in(H^2(\Omega))^2$,$v^h\in V^h$,$\vec{w}^h\in\vec{W}^h$,成立

$$(\nabla_h(u-I_hu),\nabla_hv^h)\le Ch^2\|u\|_3\|v^h\|_h,\tag{2}$$

$$(\nabla\cdot(\vec{p}-J_h\vec{p}),\nabla\cdot\vec{w}^h)|=0.\tag{3}$$

$$(\vec{p}-J_h\vec{p},\nabla_hv^h)\le Ch^2\|\vec{p}\|_2\|v^h\|_h.\tag{4}$$

其中 ∇_h 代表分片求导,$(\cdot,\cdot)_h=\Sigma_{K\in\Gamma_h}(\cdot,\cdot)_K$,$\|\cdot\|_h=(\Sigma_K|\cdot|_{1,K}^2)^{1/2}$,$\vec{n}$ 为对应边的单位法向量. 定义

$$\|\vec{w}^h\|_{H(div_h;\Omega)}=(\Sigma_K(\|\vec{w}^h\|_0^2+\|\nabla\cdot\vec{w}^h\|_0^2))^{1/2}.$$

易证，$\|\vec{w}^h\|_{H(div_h;\Omega)}$ 和 $\|v^h\|_h$ 分别为 $\vec{W}^h$ 及 V^h 上的模.

2 半离散格式超逼近分析

令 $\vec{p}=a(x,y)\nabla u$，$\alpha=1/a(x,y)$，$V=H_0^1(\Omega)$，$\vec{W}=H(div;\Omega)$，则相应的变分形式为：求 $\{u,\vec{p}\}:[0,T]\to V\times\vec{W}$，使得

$$\begin{cases}(\nabla u,\nabla v)=(\alpha\vec{p},\nabla v),\ \forall v\in V,\\ (\alpha\vec{p}_{tt},\vec{w})+(\nabla\cdot\vec{p}_t,\nabla\cdot\vec{w})+(\nabla\cdot\vec{p},\nabla\cdot\vec{w})+(\alpha\vec{p}_t,\vec{w})=-(f,\nabla\cdot\vec{w}),\ \forall\vec{w}\in\vec{W},\\ u(x,y,0)=u_0(x,y),u_t(x,y,0)=u_1(x,y),(x,y)\in\Omega.\end{cases}\tag{5}$$

考虑其半离散格式：求 $\{u^h,\vec{p}^h\}:[0,T]\to V^h\times\vec{W}^h$，使得

$$\begin{cases}(\nabla_h u^h,\nabla_h v^h)_h=(\alpha\vec{p}^h,\nabla_h v^h)_h,\ \forall v^h\in V^h,\\ (\alpha\vec{p}_{tt}^h,\vec{w}^h)+(\nabla\cdot\vec{p}_t^h,\nabla\cdot\vec{w}^h)+(\nabla\cdot\vec{p}^h,\nabla\cdot\vec{w}^h)+(\alpha\vec{p}_t^h,\vec{w}^h)=-(f,\nabla\cdot\vec{w}^h),\ \forall\vec{w}^h\in\vec{W}^h,\\ u^h(x,y,0)=I_hu_0(x,y),u_t^h(x,y,0)=I_hu_1(x,y),(x,y)\in\Omega.\end{cases}\tag{6}$$

定理 1　设 $\{u,\vec{p}\}$ 及 $\{u^h,\vec{p}^h\}$ 分别是(5)式和(6)式的解. 假设 $u\in H^3(\Omega)$，$\vec{p},\vec{p}_t,\vec{p}_{tt}\in(H^2(\Omega))^2$，则

$$\|\prod\nolimits_h u-u^h\|_h\le Ch^2(\|u\|_3^2+\|\vec{p}\|_2^2+\int_0^t(\|\vec{p}_{tt}\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2^2)\mathrm{d}\tau)^{1/2},\tag{7}$$

$$\|J_hp-p^h\|_{H(div_h;\Omega)}\le Ch^2(\int_0^t(\|\vec{p}_{tt}\|_2^2+\|\vec{p}_t\|_2{}^2)\mathrm{d}\tau)^{1/2}.\tag{8}$$

证明　令 $u-u^h=u-I_hu+I_hu-u^h\triangleq\eta+\xi$，$\vec{p}-\vec{p}^h=\vec{p}-J_h\vec{p}+J_h\vec{p}-\vec{p}^h\triangleq\vec{\rho}+\vec{\theta}$. $\forall v^h\in V^h,\vec{w}^h\in\vec{W}^h$，由(5)式及(6)式，有如下的误差方程

$$\begin{cases}(\nabla_h\xi,\nabla_h v^h)_h=-(\nabla_h\eta,\nabla_h v^h)_h+(\alpha\vec{\rho},\nabla_h v^h)_h+(\alpha\vec{\theta},\nabla_h v^h)_h,\\ (\alpha\vec{\theta}_{tt},\vec{w}^h)+(\nabla\cdot\vec{\theta}_t,\nabla\cdot\vec{w}^h)+(\nabla\cdot\vec{\theta},\nabla\cdot\vec{w}^h)+(\alpha\vec{\theta},\vec{w}^h)=-(\alpha\vec{\rho}_{tt},\vec{w}^h)-\\ (\nabla\cdot\vec{\rho}_t,\nabla\cdot\vec{w}^h)-(\nabla\cdot\vec{\rho},\nabla\cdot\vec{w}^h)-(\alpha\vec{\rho}_t,\vec{w}^h).\end{cases}\tag{9}$$

在上述方程第 2 式中取 $\vec{w}^h=\vec{\theta}_t$，两边同时加上 $(\vec{\theta},\vec{\theta}_t)$，则有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\alpha^{1/2}\vec{\theta}_t\|_0^2+\|\vec{\theta}\|_0^2+\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0^2)+\|\nabla\cdot\vec{\theta}_t\|_0^2+\|\alpha^{1/2}\vec{\theta}_t\|_0^2=(\vec{\theta},\vec{\theta}_t)-$$
$$(\alpha\vec{p}_{tt},\vec{\theta}_t)-(\nabla\cdot\vec{\rho}_t,\nabla\cdot\vec{\theta}_t)-(\nabla\cdot\vec{\rho},\nabla\cdot\vec{\theta}_t)-(\alpha\vec{\rho}_t,\vec{\theta}_t)\triangleq\sum\nolimits_{i=1}^5 G_i.\tag{10}$$

首先，利用 Young 不等式，可得

$$G_1\le C\|\vec{\theta}\|_0^2+\frac{a_{\min}}{2}\|\vec{\theta}_t\|_0^2.\tag{11}$$

其次，$\forall\varphi\in W^{1,\infty}(K)$，令 $\bar{\varphi}|_K=\frac{1}{|K|}\int_K\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则有 $\|\varphi-\bar{\varphi}|_K\|_{0,\infty,K}\le Ch\|\varphi\|_{1,\infty}$. 故可以得到

$$G_2+G_5\le\sum_K((\alpha-\bar{\alpha})(\vec{\rho}_{tt}+\vec{\rho}_t),\vec{\theta}_t)+\sum_K(\bar{\alpha}(\vec{\rho}_{tt}+\vec{\rho}_t),\vec{\theta}_t)\le$$
$$Ch^4(\|\overrightarrow{p_{tt}}\|_2^2+\|\overrightarrow{p_t}\|_2^2)+\frac{a_{\min}}{2}\|\vec{\theta}_t\|_0^2.\tag{12}$$

由(3)式可得

$$G_3+G_4=0.\tag{13}$$

因此，综合以上各式，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\alpha^{1/2}\vec{\theta}_t\|_0^2+\|\vec{\theta}\|_0^2+\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0^2)+\|\nabla\cdot\vec{\theta}_t\|_0^2+a_{\min}\|\vec{\theta}_t\|_0^2\le$$
$$Ch^4(\|\overrightarrow{p_{tt}}\|_2^2+\|\overrightarrow{p_t}\|_2^2)+a_{\min}\|\vec{\theta}_t\|_0^2+C\|\vec{\theta}\|_0^2\le$$
$$Ch^4(\|\overrightarrow{p_{tt}}\|_2^2+\|\overrightarrow{p_t}\|_2^2)+a_{\min}\|\vec{\theta}_t\|_0^2+C\|\vec{\theta}\|_{H(div_h;\Omega)}^2.\tag{14}$$

最后，注意到 $\vec{\theta}(0)=0$，$\vec{\theta}_t(0)=0$，上式两端同时从 $0\sim t$ 积分，则有

$$\|\vec{\theta}\|_0^2+\|\nabla\cdot\vec{\theta}\|_0^2\le Ch^4\int_0^t(\|\overrightarrow{p_{tt}}\|_2^2+\|\overrightarrow{p_t}\|_2^2)\mathrm{d}\tau. \tag{15}$$

即

$$\|\vec{\theta}\|_{H(div_h;\Omega)}\le Ch^2(\int_0^t(\|\overrightarrow{p_{tt}}\|_2^2+\|\overrightarrow{p_t}\|_2^2)\mathrm{d}\tau)^{1/2}. \tag{16}$$

另一方面,在(9)式的第一式中取 $v^h=\xi$,则可得

$$\begin{aligned}\|\nabla_h\xi\|_0^{\ 2}&=-(\nabla_h\eta,\nabla_h\xi)+(\alpha\vec{\rho},\nabla_h\xi)_h+(\alpha\vec{\theta},\nabla_h\xi)_h=-(\nabla_h\eta,\nabla_h\xi)+\\&((\alpha-\bar{\alpha})\vec{\rho},\nabla_h\xi)_h+((\alpha-\bar{\alpha})\vec{\theta},\nabla_h\xi)_h+(\bar{\alpha}\vec{\theta},\nabla_h\xi)_h+(\bar{\alpha}\vec{\rho},\nabla_h\xi)_h.\end{aligned} \tag{17}$$

由(2)式,Young 不等式以及平均值技巧可得

$$\|\xi\|_h^{\ 2}\le Ch^4(||u||_3^2+\|\vec{p}\|_2^2+\int_0^t(\|\overrightarrow{p_{tt}}\|_2^2+\|\overrightarrow{p_t}\|_2^{\ 2})\mathrm{d}\tau). \tag{18}$$

定理证毕.

3 全离散格式超逼近分析

本节中,考虑(5)式的一个二阶全离散格式并进行相应的超逼近分析.为此,需假设 $0=t_0<t_1<\cdots<t_{N-1}<t_N=T$ 是时间 $[0,T]$ 区间上的等步长剖分,步长为 $\tau=T/N$,其中 N 为正常数.给定 $[0,T]$ 上的光滑函数 φ,设

$$\varphi^n=\varphi(t_n),\varphi^{(n+1)/2}=\frac{1}{2}(\varphi^{n+1}+\varphi^n),\partial_t\varphi^{(n+1)/2}=\frac{\varphi^{n+1}+\varphi^n}{\tau},$$

$$\varphi^{n,1/4}=\frac{\varphi^{n+1}+2\varphi^n+\varphi^{n-1}}{4}=\frac{\varphi^{(n+1)/2}+\varphi^{(n-1)/2}}{2},$$

$$\partial_t\varphi^n=\frac{\partial_t\varphi^{(n+1)/2}+\partial_t\varphi^{(n-1)/2}}{2},\partial_{tt}\varphi^n=\frac{\partial_t\varphi^{(n+1)/2}-\partial_t\varphi^{(n-1)/2}}{\tau}.$$

考虑(5)式的全离散格式:求 $\{U^n,\vec{P}^n\}\in V^h\times\vec{W}^h$,使得

$$\begin{cases}(\nabla_hU^{(n+1)/2}),\nabla_hv^h)_h=(\alpha^n\vec{P}^{(n+1)/2},\nabla_hv^h)_h,\forall v^h\in V^h,\\(\alpha^n\partial_{tt}\vec{P}^n,w^h)+(\nabla\cdot\partial\vec{P}^n,\nabla\cdot w^h)+(\nabla\cdot\vec{P}^{n,1/4},\nabla\cdot\vec{w}^h)+(\alpha^n\partial\vec{P},\vec{w}^h)=\\-(f^{n,1/4},\nabla\cdot\vec{w}^h),\forall\vec{w}^h\in\vec{W}^h,\\U^0=I_hu_0,U^1=I_h(u_0+u_1\tau+\frac{1}{2}u_{tt}(0)\tau^2).\end{cases} \tag{19}$$

为了方便起见,记

$$u^n-U^n=u^n-I_hu^n+I_hu^n-U^n\triangleq\eta^n+\xi^n,\vec{p}^n-\vec{P}^n=\vec{p}^n-J_h\vec{p}^n+J_h\vec{p}^n-\vec{P}^n\triangleq\vec{\rho}^n+\vec{\theta}^n.$$

定理 2 设 $\{u,\vec{p}\}$ 及 $\{U^n,\vec{P}^n\}$ 分别为(7)式及(19)式的解.假设 $u\in L^\infty(H^3(\Omega)),\vec{p},\vec{p}_t,\vec{p}_{tt}\in L^\infty((H^2(\Omega))^2)$,对于 $1\le n\le j\le N$,成立

$$\|\vec{\theta}^{(j-1)/2}\|_{H(div_h;\Omega)}=O(h^2+\tau^2), \tag{20}$$

$$\|\xi^{(j-1)/2}\|_h=O(h^2+\tau^2). \tag{21}$$

证明 由(5)式、(19)式可得误差方程,并取 $\vec{w}^h=\partial_t\vec{\theta}^n$,则有

$$\begin{aligned}&(\alpha^n\partial_{tt}\vec{\theta}^n,\partial_t\vec{\theta}^n)+(\nabla\cdot\partial_t\vec{\theta}^n,\nabla\cdot\partial_t\vec{\theta}^n)+(\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,1/4},\nabla\cdot\partial_t\vec{\theta}^n)+(\alpha^n\partial_t\vec{\theta}^n,\partial_t\vec{\theta}^n)=-(\alpha^n\partial_{tt}\vec{\rho}^n,\partial_t\vec{\theta}^n)+\\&(\nabla\cdot\partial_t\vec{\rho}^n,\nabla\cdot\partial_t\vec{\theta}^n)+(\nabla\cdot\vec{\rho}^{n,1/4},\nabla\cdot\partial_t\vec{\theta}^n)+(\alpha^n\partial_t\vec{\rho}^n,\partial_t\vec{\theta}^n)+\\&(\nabla\cdot R_2^n,\nabla\cdot\partial_t\vec{\theta}^n)+(\alpha^nR_1^n,\partial_t\vec{\theta}^n)+(\alpha^nR_2^n,\partial_t\vec{\theta}^n)\triangleq\sum_{i=1}^7B_i.\end{aligned} \tag{22}$$

其中,利用泰勒展开可得

$$R_1^n=\partial_{tt}\vec{p}^n-\vec{p}_{tt}^{n,1/4}=O(\tau^2),R_2^n=\partial_t\vec{p}^n-\vec{p}^{n,1/4}=O(\tau^2). \tag{23}$$

下面逐一估计上式右端各项.

首先,类似于(12)式的证明,由平均值技巧及插值理论可知

$$B_1 + B_4 \le Ch^4(\|\vec{p}_{tt}\|^2_{L^\infty((H^2(\Omega))^2)} + \|\vec{p}_t\|^2_{L^\infty((H^2(\Omega))^2)}) + \frac{a_{\min}}{2}\|\partial\vec{\theta}^n\|_0^{\,2}. \tag{24}$$

利用(3)式及(23)式可得

$$B_2 = B_3 = 0, \tag{25}$$

$$B_5 + B_6 + B_7 = O(\tau^4) + \|\nabla\cdot\partial_t\vec{\theta}^n\|^2_0 + \frac{a_{\min}}{2}\|\partial_t\vec{\theta}^n\|_0^{\,2}. \tag{26}$$

其次,由于

$$\begin{aligned}&(\alpha\partial_{tt}\vec{\theta}^n,\partial_t\vec{\theta}^n) + (\nabla\cdot\partial_t\vec{\theta}^n,\nabla\cdot\partial_t\vec{\theta}^n) + (\nabla\cdot\vec{\theta}^{n,1/4},\nabla\cdot\partial_t\vec{\theta}^n) + (\alpha\partial_t\vec{\theta}^n,\partial_t\vec{\theta}^n) = \\ &\quad\frac{1}{2\tau}(\|\alpha^{1/2}\partial_t\vec{\theta}^{(n+1)/2}\|^2_0 - \|\alpha^{1/2}\partial_t\vec{\theta}^{(n-1)/2}\|^2_0) + \|\nabla\cdot\partial_t\vec{\theta}^n\|^2_0 + \\ &\quad\frac{1}{2\tau}(\|\nabla\cdot\vec{\theta}^{(n+1)/2}\|^2_0 - \|\nabla\cdot\vec{\theta}^{(n-1)/2}\|^2_0) + \|\alpha^{1/2}\partial_t\vec{\theta}^n\|^2_0.\end{aligned} \tag{27}$$

可得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\tau}(\|\partial_t\vec{\theta}^{(n+1)/2}\|^2_0 - \partial_t\vec{\theta}^{(n-1)/2}\|^2_0) + \frac{1}{2\tau}(\|\nabla\cdot\vec{\theta}^{(n+1)/2}\|^2_0 - \|\nabla\cdot\vec{\theta}^{(n-1)/2}\|^2_0) \le \\ &\quad Ch^4(\|\vec{p}_{tt}\|^2_{L^\infty((H^2(\Omega))^2)} + \|\vec{p}_t\|^2_{L^\infty((H^2(\Omega))^2)}) + O(\tau^4).\end{aligned} \tag{28}$$

在(28)式两端同乘以 2τ,并从 $n = 1$ 到 $j-1(0 \le j \le N)$ 求和,然后在两端同时加上 $\|\theta^{(j-1)/2}\|^2_0 \le C\tau^2\sum_{n=1}^{j}\|\partial\theta^{(n-1)/2}\|^2_0 + \|\vec{\theta}^{1/2}\|_0^{\,2}$,可得

$$\begin{aligned}&\|\partial_t\vec{\theta}^{j-1/2}\|^2_0 + \|\vec{\theta}^{j-1/2}\|^2_{H(div_h;\Omega)} \le \|\nabla\cdot\vec{\theta}^{1/2}\|^2_0 + \|\partial_t\vec{\theta}^{1/2}\|^2_0 + \|\vec{\theta}^{1/2}\|_0^{\,2} \\ &\quad C\tau^2\sum_{n=1}^{j}\|\partial_t\theta^{(n-1)/2}\|^2_0 + Ch^4\sum_{n=1}^{j-1}\tau(\|\vec{p}_{tt}\|^2_{L^\infty((H^2(\Omega))^2)} + \|\vec{p}_t\|^2_{L^\infty((H^2(\Omega))^2)}) + C\sum_{n=1}^{j-1}\tau^5.\end{aligned} \tag{29}$$

又注意到 $\vec{\theta}^1 = \vec{P}^1 - J_h\vec{p}^1 = O(\tau^3)$ 以及 $\vec{\theta}^0 = 0$,有

$$\|\vec{\theta}^{1/2}\|^2_0 + \|\nabla\cdot\vec{\theta}^{1/2}\|^2_0 + \|\partial\vec{\theta}^{1/2}\|^2_0 = O(\tau^4), \tag{30}$$

$$Ch^4\sum_{n=1}^{j-1}\tau(\|\vec{p}_{tt}\|^2_{L^\infty((H^2(\Omega))^2)} + \|\vec{p}_t\|^2_{L^\infty((H^2(\Omega))^2)}) + C\sum_{n=1}^{j-1}\tau^5 = O(h^4 + \tau^4). \tag{31}$$

最后,由以上各式可得

$$\|\partial_t\vec{\theta}^{(j-1)/2}\|^2_0 + \|\vec{\theta}^{(j-1)/2}\|^2_{H(div_h;\Omega)} = O(h^4 + \tau^4), \tag{32}$$

即有(20)式

$$\|\vec{\theta}^{(j-1)/2}\|_{H(div_h;\Omega)} = O(h^2 + \tau^2). \tag{33}$$

另一方面,取 $v^h = \xi^{n+1/2}$,类似于(18)式的估计可得

$$\begin{aligned}\|\nabla_h\xi^{(n+1)/2}\|^2_0 &= -(\nabla_h\eta^{(n+1)/2},\nabla_h\xi^{(n+1)/2})_h + (\alpha^n\vec{\rho}^{(n+1)/2},\nabla_h\xi^{(n+1)/2})_h + (\alpha^n\nabla\vec{\theta}^{(n+1)/2},\nabla_h\xi^{(n+1)/2})_h \le \\ &\quad C\|\vec{\theta}^{(n+1)/2}\|_0^{\,2} + Ch^4(\|\vec{p}\|^2_{L^\infty((H^2(\Omega))^2} + \|u\|^2_{L^\infty(H^3(\Omega))}).\end{aligned} \tag{34}$$

即(21)式

$$\|\xi^{(n+1)/2}\|_h = O(h^2 + \tau^2). \tag{35}$$

定理证毕.

注　若将 CNRQ_1 元替换为其他的一些低阶非协调元,如正方形网格下的 Q_1^{rot}[19],EQ_1^{rot} 元[20-21]及类 Wilson 元[13],仍可以得到本文的结果.

4　数值算例

为了验证理论分析的正确性,给出了下面的算例.其中,求解区域为 $\Omega = [0,1]\times[0,1]$,$T = 1$.选取 $a(x,y) = 1$ $f = 2e^txy(1-x)(1-y) + 4e^tx(1-x) + 4e^ty(1-y)$,则相应的真解为 $u = e^txy(1-x)(1-y)$,同时可得 $\vec{p} = (p_1,p_2) = (e^ty(1-y)(1-2x), e^tx(1-x)(1-2y))$.

沿 x 轴,y 轴方向对区域进行 $m\times n$ 的剖分.下面给出了 u 和 $\vec{p}$ 在不同时刻的误差收敛情况.从表 1 ~ 4,

可以看出 $\| u^n - U^n \|_h$ 及 $\| \vec{p}^n - \vec{P}^n \|_{H(div;\Omega)}$ 的收敛阶为 $O(h)$，$\| I_h u^n - U^n \|_h$ 以及 $\| J_h \vec{p}^n - \vec{P}^n \|_{H(div;\Omega)}$ 的收敛阶为 $O(h^2)$，与理论证明相符.

表1 $t = 0.5$ 时 u 的误差

$m \times n$	$\| I_h u^n - U^n \|_h$	误差阶	$\| u^n - U^n \|_h$	误差阶
4×4	0.021 0	—	0.081 5	—
8×8	0.005 3	1.987 5	0.041 4	0.977 1
16×16	0.001 3	1.998 5	0.020 8	0.994 4
32×32	0.000 3	2.000 5	0.010 4	0.998 6

表2 $t = 1$ 时 u 的误差

$m \times n$	$\| I_h u^n - U^n \|_h$	误差阶	$\| u^n - U^n \|_h$	误差阶
4×4	0.029 7	—	0.133 9	—
8×8	0.007 5	1.990 6	0.068 2	0.974 2
16×16	0.001 9	2.000 0	0.034 2	0.993 6
32×32	0.000 5	2.001 2	0.017 1	0.998 4

表3 $t = 0.5$ 时 $\vec{p}$ 的误差

$m \times n$	$\| J_h \vec{p}^n - \vec{P}^n \|_{H(div;\Omega)}$	误差阶	$\| \vec{p}^n - \vec{P}^n \|_{H(div;\Omega)}$	误差阶
4×4	$0.143\,2 \times 10^{-4}$	—	0.195 8	—
8×8	$0.036\,8 \times 10^{-4}$	1.960 7	0.100 3	0.964 8
16×16	$0.009\,3 \times 10^{-4}$	1.987 0	0.050 5	0.991 5
32×32	$0.002\,3 \times 10^{-4}$	1.995 2	0.025 3	0.997 9

表4 $t = 1$ 时 $\vec{p}$ 的误差

$m \times n$	$\| J_h \vec{p}^n - \vec{P}^n \|_{H(div;\Omega)}$	误差阶	$\| \vec{p}^n - \vec{P}^n \|_{H(div;\Omega)}$	误差阶
4×4	$0.135\,6 \times 10^{-3}$	—	0.322 8	—
8×8	$0.034\,7 \times 10^{-3}$	1.966 0	0.166 4	0.964 8
16×16	$0.008\,7 \times 10^{-3}$	1.989 8	0.083 2	0.991 5
32×32	$0.002\,2 \times 10^{-3}$	1.996 7	0.041 7	0.997 9

参 考 文 献

[1] Nagumo J, Arimoto S, Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon[J]. Proc IRE,1962,50:91-102.

[2] Wan W M, Liu Y C. Long time behaviors of solutions for initial boundary value problem of pseudo-hyperbolic equations[J]. Acta Math Appl Sin, 1999,22:311-355.

[3] 史艳华，石东洋. 伪双曲方程类 Wilson 非协调元逼近[J]. 山东大学学报(理学版),2013,48(4):77-84.

[4] Bochev P B, Gunzburger M D. Least-Squares Finite Element Method[M]. New York: Springer Verlag, 2009.

[5] Yang D P. A splitting positive definite mixed element method for miscible displacement of compressible flow in porous media[J]. Numer Methods Partial Differential Equations,2001,17(3):229-249.

[6] Pani A K. An H^1-Galerkin mixed finite element method for parabolic partial differential equation[J]. SIAM J Numer Anal,1998,35:712-727.

[7] Guo H, Rui H X. Least-Squares Galerkin procedures for pseudo-hyperbolic equations[J]. Appl Math Comput,2007,189:425-439.

[8] He S, Li H, Liu Y. Splitting positive definite mixed element methods for pseudo-hyperbolic equations[J]. Numer Methods Partial Differential Equations,2011,28:670-688.

[9] Shi D Y, Tang Q. Super-convergence analysis of splitting positive definite nonconforming mixed finite element method for pseudo-hyperbolic equations[J]. Acta Math Appl Sin,2013,29:843-854.

[10] Liu Y, Li H. H^1-Galerkin mixed finite element methods for pseudo-hyperbolic equations[J]. Appl Math Comput,2009,212:446-457.

[11] Shi D Y, Zhang Y D. An H^1-Galerkin nonconforming mixed finite element method for the pseudo-hyperbolic equations[J]. Math Appl,2011,24: 448-455.

[12] 石东洋,史艳华. 半线性伪双曲方程最低阶的 H^1-Galerkin 混合元方法[J]. 系统科学与数学,2015,35:514-526.

[13] Hu J, Shi Z C. Constrained quadrilateral nonconforming rotated Q^1 element[J]. J Comput Math,2005,23:561-586.

[14] 胡俊，满红英，石钟慈. 带约束的非协调旋转 Q_1 元在 *Stokes* 和平面弹性问题的应用[J]. 计算数学,2005,27(3):311-324.

[15] 胡俊. 弹性力学问题的四边形 Locking-free 元[D]. 北京:中国科学院数学与统计科学研究院,2004.

[16] Ren J C, Ma Y. A superconvergent nonconforming mixed finite element method for the Navier-Stokes equations[J]. Numer Methods Partial Differential Equations,2016,32(2):646-660.

[17] Shi D Y, Yu Z Y. Superclose and superconvergence analysis of a low order nonconforming mixed finite element method for stationary Stokes equations. Acta Math Sci,2013,33(4):735-745.

[18] Rannacher R, Turek S. Simple nonconforming quadrilateral stokes element[J]. Numer Methods Partial Differential Equations,1992,8(2): 97-111.

[19] Lin Q, Lin J F. Finite element methods: accuracy and improvement[M]. Beijing:Science Press,2006.

[20] Lin Q, Tobiska L, Zhou A. Super-convergence and extrapolation of nonconforming low order finite elements applied to the Poisson equation[J]. IMA J Numer Anal,2005,25(1):160-181.

[21] Shi D Y, Mao S P, Chen S C. An anisotropic nonconforming finite element with some super-convergence results[J]. Comput Math,2005,23(3): 261-274.

An H^1-Galerkin Nonconforming Mixed Finite Element Method for Pseudo-Hyperbolic Equations

Sun Shuzhen[1], Shi Xiangyu[1], Liu Qian[2]

(1. School of Mathematics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China;
2. College of Mathematics and Statistics, ZhengZhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: An H^1-Galerkin nonconforming mixed finite element method (MFEM) is proposed to analyze a class of pseudo-hyperbolic equations. Taking of the constrained nonconforming rotated (CNR) Q_1 element and the zero order Raviart-Thomas (R-T) element as the approximation element pair and using of the typical characters of these elements, the super-close estimates of order $O(h^2)$ of original variable u in broken-H^1 norm and flux variable $\vec{p} = \nabla u$ in $H(div,\Omega)$ norm for semi-discrete scheme are derived. Then, we construct the two order fully-discrete scheme and obtain the super-close estimates of order $O(h^2+\tau^2)$ for the relevant variables. Finally, we carry out a numerical example to confirm the theoretical analysis.

Keywords: pesudo-hyperbolic equations; H^1-Galerkin FEM; CNR Q_1 element; superclose estimates