

# 随机 SIRS 模型拟最优控制存在的必要条件

牟晓洁<sup>1</sup>, 张启敏<sup>1,2</sup>, 王宗<sup>1</sup>

(1.北方民族大学 数学与信息科学学院, 银川 750021; 2.宁夏大学 数学统计学院, 银川 750021)

**摘要:**建立了不确定参数和白噪声影响的随机 SIRS 模型,给出了易感者、感染者和恢复者的先验估计.利用 Ekeland 变分原理和极大值条件得到 SIRS 模型的拟最优控制存在的必要条件.通过一个数值例子验证了所得到的理论结果.

**关键词:**SIRS 传染病模型; 区间数; 环境波动; Hamiltonian 函数

**中图分类号:**O175.1

**文献标志码:**A

众所周知,当流行病爆发时临床科学家都会研发新的药物治疗来控制病毒感染,而政府也会投入大量资金来减轻流行病的蔓延.这给社会和经济带来了巨大的损失.因此,研究传染病模型的最优控制具有重要意义.近年来,许多学者把控制变量考虑到 SIR 流行病模型中,研究了它的动力学行为<sup>[1-3]</sup>.例如, Joshi 等人<sup>[1]</sup>在感染人数最少化的条件下,讨论了流行病最优控制存在的条件. Chen 等人<sup>[2]</sup>分析了疾病系统的动力学行为,给出了最优控制的必要条件. Zaman 等人<sup>[3]</sup>研究了 SIR 传染病模型中疫苗接种和治疗最优策略的存在性.然而这些模型是确定性流行病模型,并且所给出的控制是精确控制.由于状态方程和伴随方程的精确解很难得到,因此精确控制也是难以给出的.所以研究流行病模型的拟最优控制更具有实际意义.另一方面,由于缺乏足够的信息和数据,测量过程中存在的误差以及确定初始条件时都可能造成参数的不确定性<sup>[4-5]</sup>.而假设流行病系统的所有参数是精确的,这显然不符合实际情况.为了更好地刻画不确定参数和控制变量对系统的影响,本文建立了一个在控制变量影响下具有不确定参数的随机 SIRS 模型,利用极大值原理和区间值函数理论讨论了系统拟最优控制存在的必要条件,这与以往对流行病动态行为的研究有所不同<sup>[6-7]</sup>.通过数值算例验证了控制变量对流行病动力学行为的影响.

## 1 模型的建立和预备知识

### 1.1 模型的建立

文献[8]给出如下随机传染病模型:

$$\begin{cases} dS(t) = \left[ (1-p)b - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{\varphi(I(t))} + \gamma R(t) \right] dt - \frac{\sigma S(t)I(t)}{\varphi(I(t))} dB(t), \\ dI(t) = \left[ -(\mu + c + \alpha)I(t) + \frac{\beta S(t)I(t)}{\varphi(I(t))} \right] dt + \frac{\sigma S(t)I(t)}{\varphi(I(t))} dB(t), \\ dR(t) = [pb - (\mu + \gamma)R(t) + \alpha I(t)] dt, \end{cases} \quad (1)$$

其中  $S(t)$ ,  $I(t)$  和  $R(t)$  分别表示易感者、感染者和恢复者的数量.  $p$  表示接种疫苗的人口比例,  $b$  表示新个体进入人口的比率,  $\beta$  表示传播系数,  $\mu$  表示自然死亡率,  $\gamma$  表示免疫损失率,  $c$  表示疾病引起的死亡率,  $\alpha$  表示恢复率. 假设模型(1)中的所有参数都是正的. 患有流行性疾病的人可以通过适当的治疗来恢复. 考虑一个治

收稿日期:2018-03-30; 修回日期:2019-01-12.

基金项目:国家自然科学基金(11661064); 北方民族大学研究生创新项目(YCX18090).

作者简介:牟晓洁(1992-),女,山东日照人,北方民族大学硕士研究生,研究方向为随机种群系统最优控制及应用, E-mail:18709682160@163.com.

通信作者:张启敏(1964-),女,宁夏银川人,宁夏大学教授,博士生导师, E-mail:zhangqimin64@sina.com.

疗控制变量  $u$ , 它可以是一个时间独立参数或一个时间相关参数. 例如文献[9] 提出了饱和处理函数  $T(u, I) = \frac{ruI}{1 + \alpha I}$ , 其中  $r$  和  $\alpha$  为正常数. 使用饱和型治疗功能的优点是它可以产生接近线性的治疗结果. 在这个论点的

基础上, 假设治疗函数是  $u(t)$  和  $I(t)$  的函数, 定义为  $T(u(t), I(t)) = \frac{mu(t)I(t)}{1 + \eta(t)}$ , 其中  $m > 0, \eta \geq 0$  且  $u(t)$  是治疗控制变量. 治疗的目的是尽量减少感染人群, 使恢复的人口数量达到最大. 因此, 把控制变量引入到模型(1)中得到下列新的 SIRS 模型:

$$\begin{cases} dS(t) = \left[ (1-p)b - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{\varphi(I(t))} + \gamma R(t) \right] dt - \frac{\sigma S(t)I(t)}{\varphi(I(t))} dB(t), \\ dI(t) = \left[ -(\mu + c + \alpha)I(t) + \frac{\beta S(t)I(t)}{\varphi(I(t))} - \frac{mu(t)I(t)}{1 + \eta(t)} \right] dt + \frac{\sigma S(t)I(t)}{\varphi(I(t))} dB(t), \\ dR(t) = \left[ pb - (\mu + \gamma)R(t) + \alpha I(t) + \frac{mu(t)I(t)}{1 + \eta(t)} \right] dt, \end{cases} \quad (2)$$

目标函数为  $J(0, S_0, I_0, R_0; u(t)) = \mathcal{E} \left\{ \int_0^T L(S(t), I(t), R(t); u(t)) dt + h(I(T)) \right\}$ , 其中  $L(I(t), u(t))$  是  $I(t)$  和  $u(t)$  的函数, 表示在控制条件下治疗疾病的最小成本.  $h(I(T))$  是使得在未来的  $T$  时刻得病的人数最少的函数.

将模型(2)的生物参数用区间值函数  $h(k) = a^{(1-k)} b^k$  表示, 其中  $k \in [0, 1]$ . 令  $\varphi(I) = 1 + I^2(t)$ . 这样, 得到下列具有不确定参数的 SIRS 模型:

$$\begin{cases} dS(t) = \left[ (1 - (p_l)^{1-k} (p_u)^k) (b_l)^{1-k} (b_u)^k - (\mu_l)^{1-k} (\mu_u)^k S(t) - \frac{(\beta_l)^{1-k} (\beta_u)^k S(t) I(t)}{1 + I^2(t)} + \right. \\ \left. (\gamma_l)^{1-k} (\gamma_u)^k R(t) \right] dt - \frac{(\sigma_l)^{1-k} (\sigma_u)^k S(t) I(t)}{1 + I^2(t)} dB(t), \\ dI(t) = \left[ -((\mu_l)^{1-k} (\mu_u)^k + (c_l)^{1-k} (c_u)^k + (\alpha_l)^{1-k} (\alpha_u)^k) I(t) + \frac{(\beta_l)^{1-k} (\beta_u)^k S(t) I(t)}{1 + I^2(t)} - \right. \\ \left. \frac{(m_l)^{1-k} (m_u)^k u(t) I(t)}{1 + (\eta_l)^{1-k} (\eta_u)^k I(t)} \right] dt + \frac{(\sigma_l)^{1-k} (\sigma_u)^k S(t) I(t)}{1 + I^2(t)} dB(t), \\ dR(t) = \left[ (p_l)^{1-k} (p_u)^k (b_l)^{1-k} (b_u)^k - ((\mu_l)^{1-k} (\mu_u)^k + (\gamma_l)^{1-k} (\gamma_u)^k) R(t) + (\alpha_l)^{1-k} (\alpha_u)^k \times \right. \\ \left. I(t) + \frac{(m_l)^{1-k} (m_u)^k u(t) I(t)}{1 + (\eta_l)^{1-k} (\eta_u)^k I(t)} \right] dt, \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\bar{p} \in [p_l, p_u], \bar{b} \in [b_l, b_u], \bar{\mu} \in [\mu_l, \mu_u], \bar{\beta} \in [\beta_l, \beta_u], \bar{\gamma} \in [\gamma_l, \gamma_u], \bar{m} \in [m_l, m_u], \bar{\sigma} \in [\sigma_l, \sigma_u], \bar{c} \in [c_l, c_u], \bar{\alpha} \in [\alpha_l, \alpha_u], \bar{\eta} \in [\eta_l, \eta_u], \bar{p} > 0, \bar{b} > 0, \bar{\mu} > 0, \bar{\beta} > 0, \bar{\gamma} > 0, \bar{m} > 0, \bar{\sigma} > 0, \bar{c} > 0, \bar{\alpha} > 0,$  和  $\bar{\eta} > 0$ . 模型(3)是一个具有不确定参数且带有控制变量的系统.

## 1.2 预备知识

在有限时间区间  $[0, T]$  上讨论模型(3)的随机拟最优问题. 令  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < T}, \mathcal{P})$  是一个完备的概率空间, 在其上定义一个  $\mathcal{R}$ - 值的标准布朗运动  $(B(\cdot))$ . 假设  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t < T}$  是由  $B(\cdot)$  产生的自然滤波. 令  $U \subset \mathcal{R}$  为非空的有界闭集. 若  $u(\cdot)$  是  $U$  上的  $\mathcal{F}_t$ - 适应过程, 控制过程  $u(\cdot): [0, T] \times \Omega \rightarrow U$  称为可容许的.  $\mathcal{U}_{ad}$  为所有可容许控制的集合.  $|\cdot|$  表示欧几里得空间的范数;  $f_x$  表示  $f$  对  $x$  的偏导数;  $\chi_S$  为集合  $S$  的示性函数; 用  $X + Y$  表示集合  $X$  和  $Y$  的和集, 即  $\{x + y: x \in X, y \in Y\}$ . 令值函数  $V(0, x_0)$  为  $V(0, x_0) = \min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}} J(0, x_0; u(\cdot))$ .

**定义 1**[ $\epsilon$ -最优控制]<sup>[10]</sup> 任意给定  $\epsilon > 0$ , 可容许控制  $u^*(\cdot)$  或可容许对  $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$  称为  $\epsilon$ - 最优, 若  $|J(0, x_0; u^*(\cdot)) - V(0, x_0)| \leq \epsilon$ .

**定义 2**[拟最优控制]<sup>[10]</sup> 若存在一族被  $\epsilon > 0$  参数化的可容许控制  $\{u^\epsilon(\cdot)\}$ , 其中任意元素  $u^\epsilon(\cdot)$ , 称为拟最优, 若满足  $|J(0, x_0; u^\epsilon(\cdot)) - V(0, x_0)| \leq \delta(\epsilon)$ , 对足够小的  $\epsilon$  成立, 其中  $\delta$  是  $\epsilon$  的函数, 且满足当  $\epsilon \rightarrow 0$  时,  $\delta(\epsilon) \rightarrow 0, \delta(\epsilon)$  为误差界. 若对  $c, \kappa > 0$  有  $\delta(\epsilon) = c\epsilon^\kappa$ , 则  $u^\epsilon(\cdot)$  称为拟最优, 它的阶为  $\epsilon^\kappa$ .

为方便起见, 令  $x(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$ , 需要以下假设.

**假设 H1** 对  $\forall 0 \leq t \leq T, L_{x_i(t)}(x(t), u(t))$  的偏导数和  $h_{x_i(t)}(x(t)) (i = 1, 2, 3)$  是连续的, 则  $\exists$  不确定参数  $C$  使得  $\sum_{i=1}^3 |L_{x_i(t)}(x(t), u(t))| \leq C(1 + \sum_{i=1}^3 |x_i(t)|), \sum_{i=1}^3 (1 + |x_i(t)|)^{-1} |h_{x_i(t)}(x(t))| \leq C$ .

**假设 H2** 令  $x(t), x'(t) \in \mathbf{R}_+^3$  且  $u(t), u'(t) \in \mathcal{U}_{ad}$ , 对任意  $0 \leq t \leq T$ , 函数  $L(x(t), u(t))$  在  $u(t)$  上是可微的, 则存在不确定参数  $C$  使得  $\sum_{i=1}^3 |h_{x_i(t)}(x(t)) - h_{x_i(t)}(x'(t))| \leq C \sum_{i=1}^3 |x_i(t) - x_i'(t)|, |L(x(t), u(t)) - L(x(t), u'(t))| + |L_{u(t)}(x(t), u(t)) - L_{u'(t)}(x(t), u'(t))| \leq C |u(t) - u'(t)|$ .

**假设 H3** 控制集合  $\mathcal{U}_{ad}$  是凸的.

为方便起见, 令  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T = (S(t), I(t), R(t))^T$ , 则模型(3)变为

$$\begin{cases} dx_1(t) = [(1 - (p_l)^{1-k} (p_u)^k) (b_l)^{1-k} (b_u)^k - (\mu_l)^{1-k} (\mu_u)^k x_1(t) - \frac{(\beta_l)^{1-k} (\beta_u)^k x_1(t) x_2(t)}{1 + x_2^2(t)} + (\gamma_l)^{1-k} (\gamma_u)^k x_3(t)] dt - \frac{(\sigma_l)^{1-k} (\sigma_u)^k x_1(t) x_2(t)}{1 + x_2^2(t)} dB(t) \equiv f_1(x) dt - \sigma_1(x) dB, \\ dx_2(t) = [ - ((\mu_l)^{1-k} (\mu_u)^k + (c_l)^{1-k} (c_u)^k + (\alpha_l)^{1-k} (\alpha_u)^k) x_2(t) + \frac{(\beta_l)^{1-k} (\beta_u)^k x_1(t) x_2(t)}{1 + x_2^2(t)} - \frac{(m_l)^{1-k} (m_u)^k u(t) x_2(t)}{1 + (\eta_l)^{1-k} (\eta_u)^k x_2(t)} ] dt + \frac{(\sigma_l)^{1-k} (\sigma_u)^k x_1(t) x_2(t)}{1 + x_2^2(t)} dB(t) \equiv f_2(x(t), u(t)) dt + \sigma_1(x) dB, \\ dx_3(t) = [(p_l)^{1-k} (p_u)^k (b_l)^{1-k} (b_u)^k - ((\mu_l)^{1-k} (\mu_u)^k + (\gamma_l)^{1-k} (\gamma_u)^k) x_3(t) + (\alpha_l)^{1-k} (\alpha_u)^k \times x_2(t) + \frac{(m_l)^{1-k} (m_u)^k u(t) x_2(t)}{1 + (\eta_l)^{1-k} (\eta_u)^k x_2(t)} ] dt \equiv f_3(x(t), u(t)) dt, k \in [0, 1]. \end{cases} \quad (4)$$

对任意的  $u(\cdot), u'(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}$ , 给出模型(4)的伴随方程为

$$\begin{cases} dp_1(t) = -b_1(x(t), u(t), p(t), q(t)) dt + q_1(t) dB, \\ dp_2(t) = -b_2(x(t), u(t), p(t), q(t)) dt + q_2(t) dB, \\ dp_3(t) = -b_3(x(t), u(t), p(t), q(t)) dt, \\ p_i(T) = h_{x_i}(x(T)), i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} b_1(x(t), u(t), p(t), q(t)) &= -((\mu_l)^{1-k} (\mu_u)^k + \frac{(\beta_l)^{1-k} (\beta_u)^k x_2(t)}{1 + x_2^2(t)}) p_1(t) + \frac{(\beta_l)^{1-k} (\beta_u)^k x_2(t)}{1 + x_2^2(t)} \times \\ & p_2(t) - \frac{(\sigma_l)^{1-k} (\sigma_u)^k x_2(t)}{1 + x_2^2(t)} q_1(t) + \frac{(\sigma_l)^{1-k} (\sigma_u)^k x_2(t)}{1 + x_2^2(t)} q_2(t) + L_{x_1(t)}(x(t), u(t)), \\ b_2(x(t), u(t), p(t), q(t)) &= -(\frac{(\beta_l)^{1-k} (\beta_u)^k x_1(t) (1 - x_2^2(t))}{(1 + x_2^2(t))^2}) p_1(t) + (\frac{(\beta_l)^{1-k} (\beta_u)^k x_1(t)}{(1 + x_2^2(t))^2} \times (1 - x_2^2(t)) - ((\mu_l)^{1-k} (\mu_u)^k + (c_l)^{1-k} (c_u)^k + (\alpha_l)^{1-k} (\alpha_u)^k) - \frac{(m_l)^{1-k} (m_u)^k u(t)}{(1 + (\eta_l)^{1-k} (\eta_u)^k x_2(t))^2}) p_2(t) + \\ & ((\alpha_l)^{1-k} (\alpha_u)^k + \frac{(m_l)^{1-k} (m_u)^k u(t)}{(1 + (\eta_l)^{1-k} (\eta_u)^k x_2(t))^2}) p_3(t) - \frac{(\sigma_l)^{1-k} (\sigma_u)^k x_1(t) (1 - x_2^2(t))}{(1 + x_2^2(t))^2} q_1(t) + \\ & \frac{(\sigma_l)^{1-k} (\sigma_u)^k x_1(t) (1 - x_2^2(t))}{(1 + x_2^2(t))^2} q_2(t) + L_{x_2(t)}(x(t), u(t)), \\ b_3(x(t), u(t), p(t), q(t)) &= (\gamma_l)^{1-k} (\gamma_u)^k p_1(t) - ((\mu_l)^{1-k} (\mu_u)^k + (\gamma_l)^{1-k} (\gamma_u)^k) p_3(t) + L_{x_3(t)}(x(t), u(t)). \end{aligned}$$

定义一个 Hamiltonian 函数  $H(t, x(t), u(t), p(t), q(t)) : \mathbf{R}_+^3 \times \mathcal{U}_{ad} \times \mathbf{R}_+^3 \times \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}$  如下:

$$H(t, x(t), u(t), p(t), q(t)) = f^T(x(t), u(t)) p(t) + \sigma_*^T(x) q(t) + L(x(t), u(t)), \quad (6)$$

其中  $f(x(t), u(t)) = (f_1(x(t)), f_2(x(t), u(t)), f_3(x(t), u(t)))^T$  和  $\sigma_*(x(t)) = (-\sigma_1(x(t)), \sigma_1(x(t)))^T, f_i (i = 1, 2, 3)$  和  $\sigma_1(x(t))$  在模型(4)中已给出了定义.

## 2 拟最优控制存在的必要条件

### 2.1 易感者、感染者和恢复者的先验估计

对任意的  $u(\cdot), u'(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}$ , 在  $\mathcal{U}_{ad}[0, T]$  中定义一个指标

$$d(u(\cdot), u'(\cdot)) = \mathcal{E}[\text{mes}\{t \in [0, T]: u(t) \neq u'(t)\}], \quad (7)$$

其中“mes”表示 Lebesgue 测度. 类似文献[13]中引理 6.4 的方法, 知道  $\mathcal{U}_{ad}$  在  $d$  下是一个完备的空间.

**引理 1** 对任意的  $\theta \geq 0$  和  $0 < \kappa < 1$  满足  $\kappa\theta < 1$ , 存在一个不确定参数  $C = C(\theta, \kappa)$  使得对任意的  $u(\cdot), u'(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}$  对应的轨迹  $x(\cdot), x'(\cdot)$ , 有

$$\sum_{i=1}^3 \mathcal{E} \sup_{0 \leq t \leq T} |x_i(t) - x'_i(t)|^{2\theta} \leq Cd(u(t), u'(t))^{\kappa\theta}. \quad (8)$$

**证明** 当  $\theta \geq 1$  的情形. 对任意的  $r > 0$ , 对  $|x_1(t) - x'_1(t)|^{2\theta}$  进行估计, 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \sup_{0 \leq t \leq r} |x_1(t) - x'_1(t)|^{2\theta} &\leq C \mathcal{E} \int_0^r [((\beta_l)^{1-k} (\beta_u)^k)^{2\theta} + ((\sigma_l)^{1-k} (\sigma_u)^k)^{2\theta}] \left| \frac{x_1(t)x_2(t)}{1+x_2^2(t)} - \right. \\ &\quad \left. \frac{x'_1(t)x'_2(t)}{1+x_2'^2(t)} \right|^{2\theta} + ((\mu_l)^{1-k} (\mu_u)^k)^{2\theta} |x_1(t) - x'_1(t)|^{2\theta} + ((\gamma_l)^{1-k} (\gamma_u)^k)^{2\theta} |x_3(t) - \\ &\quad x'_3(t)|^{2\theta} dt \leq C \mathcal{E} \int_0^r \sum_{i=1}^3 |x_i(t) - x'_i(t)|^{2\theta} dt. \end{aligned} \quad (9)$$

对  $|x_i(t) - x'_i(t)|^{2\theta}$  ( $i=2, 3$ ) 利用同样的方法可得出

$$\mathcal{E} \sup_{0 \leq t \leq r} |x_2(t) - x'_2(t)|^{2\theta} \leq C [\mathcal{E} \int_0^r \sum_{i=1}^2 |x_i(t) - x'_i(t)|^{2\theta} dt + d(u(t), u'(t))^{\kappa\theta}], \quad (10)$$

$$\mathcal{E} \sup_{0 \leq t \leq r} |x_3(t) - x'_3(t)|^{2\theta} \leq C [\mathcal{E} \int_0^r \sum_{i=2}^3 |x_i(t) - x'_i(t)|^{2\theta} dt + d(u(t), u'(t))^{\kappa\theta}]. \quad (11)$$

把(9)、(10)和(11)式合并起来, 当  $0 \leq \theta \leq 1$  ( $\kappa\theta < 1$ ) 时, 由 Cauchy-Schwartz 不等式得

$$\sum_{i=1}^3 \mathcal{E} \sup_{0 \leq t \leq r} |x_i(t) - x'_i(t)|^{2\theta} \leq [\mathcal{E} \sup_{0 \leq t \leq r} |x_i - x'_i|^2]^\theta \leq Cd(u(t), u'(t))^{\kappa\theta}. \quad (12)$$

对(12)式使用 Gronwall 不等式, 得到所证结果(8)式.

**引理 2** 假设(H1)和(H2)成立. 对任意的  $1 < \theta < 2$  和  $0 < \kappa < 1$  满足  $(1 + \kappa)\theta < 2$ , 存在一个不确定参数  $C = C(\theta, \kappa)$  使得对任意的  $u(\cdot), u'(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}$  和它的伴随方程的解  $(p(\cdot), q(\cdot)), (p'(\cdot), q'(\cdot))$ , 有

$$\sum_{i=1}^3 \mathcal{E} \int_0^T |p_i(t) - p'_i(t)|^\theta dt + \sum_{i=1}^2 \mathcal{E} \int_0^T |q_i(t) - q'_i(t)|^\theta dt \leq Cd(u(\cdot), u'(\cdot))^{\frac{\kappa\theta}{2}}. \quad (13)$$

**证明** 采用文献[10]中引理 4.2 的类似方法可证得引理 2 成立.

### 2.2 必要条件

接下来, 给出模型(4)拟最优控制的必要条件.

**定理 1** 假设(H1)和(H2)成立,  $h$  是凸的. 设  $(p^\varepsilon(\cdot), q^\varepsilon(\cdot))$  是伴随方程(5)在控制  $u^\varepsilon(\cdot)$  下的解, 则存在不确定参数  $C$  使得对任意的  $\kappa \in [0, 1)$ ,  $\varepsilon > 0$  和任意的  $\varepsilon$ - 最优控制对  $(x^\varepsilon(\cdot), u^\varepsilon(\cdot))$ , 有

$$\begin{aligned} \inf_{u(t) \in \mathcal{U}_{ad}} \mathcal{E} \int_0^T &\left( \frac{(m_l)^{1-k} (m_u)^k u(t) x_2^\varepsilon(t)}{1 + (\eta_l)^{1-k} (\eta_u)^k x_2^\varepsilon(t)} (p_3^\varepsilon(t) - p_2^\varepsilon(t)) + L(x^\varepsilon(t), u(t)) \right) dt \geq \\ &\mathcal{E} \int_0^T \left( \frac{(m_l)^{1-k} (m_u)^k u^\varepsilon(t) x_2^\varepsilon(t)}{1 + (\eta_l)^{1-k} (\eta_u)^k x_2^\varepsilon(t)} (p_3^\varepsilon(t) - p_2^\varepsilon(t)) + L(x^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \right) dt - C\varepsilon^{\frac{\kappa}{3}}. \end{aligned} \quad (14)$$

**证明** 根据假设(H1)可知,  $(J, x_0; u(\cdot)): \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \mathbf{R}$  是连续的. 在文献[10]的引理 3.1 中取  $\lambda = \varepsilon^{\frac{2}{3}}$ , 则存在可容许控制对  $(\tilde{x}^\varepsilon(\cdot), \tilde{u}^\varepsilon(\cdot))$  使得

$$d(u^\varepsilon(\cdot), \tilde{u}^\varepsilon(\cdot)) \leq \varepsilon^{\frac{2}{3}}, \quad (15)$$

且对所有  $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{ad}[0, T]$ ,

$$\tilde{J}(0, x_0; \tilde{u}^\varepsilon(\cdot)) \leq \tilde{J}(0, x_0; u^\varepsilon(\cdot)) \quad (16)$$

成立,其中

$$\tilde{J}(0, x_0; u^\epsilon(\cdot)) = J(0, x_0; u^\epsilon(\cdot)) + \epsilon^{\frac{1}{3}} d(u(\cdot), u^\epsilon(\cdot)). \tag{17}$$

这意味着  $(\tilde{x}^\epsilon(\cdot), \tilde{u}^\epsilon(\cdot))$  是在新的目标函数(17)下系统(4)的一个最优解.固定  $\bar{t} \in [0, T], \rho > 0$  和  $u \in \mathcal{U}_{ad}[0, T]$ . 给定

$$u^\rho = \begin{cases} u(\cdot), & \text{若 } t \in [\bar{t}, \bar{t} + \rho], \\ \tilde{u}^\epsilon(t), & \text{若 } t \in [0, T] \setminus [\bar{t}, \bar{t} + \rho]. \end{cases} \tag{18}$$

定义  $u^\rho \in \mathcal{U}_{ad}[0, T]$ .系统(4)的解用  $u^\rho$  表示,从(15)式和(16)式能够得到

$$\tilde{J}(0, x_0; \tilde{u}^\epsilon(\cdot)) \leq \tilde{J}(0, x_0; u^\rho(\cdot)), d(u^\rho(\cdot), \tilde{u}^\epsilon(\cdot)) \leq \rho. \tag{19}$$

由(19)式、引理 1 和 Taylor 展式有

$$\begin{aligned} -\rho\epsilon^{\frac{1}{3}} &\leq J(0, x_0; u^\rho(t)) - J(0, x_0; \tilde{u}^\epsilon(t)) \leq \sum_{i=1}^3 \mathcal{E} \int_0^T [L_{x_i(t)}(t, \tilde{x}^\epsilon(t), u^\rho(t))(x_i^\rho(t) - \tilde{x}_i^\epsilon(t)) dt + \\ &\sum_{i=1}^3 \mathcal{E} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\rho} [L(t, \tilde{x}^\epsilon(t), u(t)) - L(t, \tilde{x}^\epsilon(t), \tilde{u}^\epsilon(t))] dt + \sum_{i=1}^3 \mathcal{E} [h_{x_i}(\tilde{x}^\rho(T))(x_i^\rho(T) - \tilde{x}^\epsilon(T))] + o(\rho). \end{aligned} \tag{20}$$

对  $\sum_{i=1}^3 \tilde{p}_i^\epsilon(x_i^\rho - \tilde{x}_i^\epsilon)$  应用 Itô 公式,得到

$$\sum_{i=1}^3 h_{x_i}(x_i^\rho(T)) [x_i^\rho(T) - \tilde{x}_i^\epsilon(T)] \leq \mathcal{E} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\rho} [(u^\rho - \tilde{u}^\epsilon)(\tilde{p}_3^\epsilon - \tilde{p}_1^\epsilon) + (u^\rho - \tilde{u}^\epsilon)\tilde{p}_3^\epsilon] dt. \tag{21}$$

将(21)式代入(20)式得

$$\begin{aligned} -\rho\epsilon^{\frac{1}{3}} &\leq J(0, x_0; u^\rho(t)) - J(0, x_0; \tilde{u}^\epsilon(t)) \leq \mathcal{E} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\rho} [L(\tilde{x}^\epsilon(t), u(t)) - L(\tilde{x}^\epsilon(t), \tilde{u}^\epsilon(t))] dt + \\ &\mathcal{E} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+\rho} [(u(t) - \tilde{u}^\epsilon(t))(\tilde{p}_3^\epsilon(t) - \tilde{p}_1^\epsilon(t)) + (u(t) - \tilde{u}^\epsilon(t))\tilde{p}_3^\epsilon(t)] dt + o(\rho). \end{aligned} \tag{22}$$

不等式两端同时除以  $\rho$ ,且令  $\rho \rightarrow 0$ , 得到

$$\begin{aligned} -\epsilon^{\frac{1}{3}} &\leq \mathcal{E} [L(\tilde{x}^\epsilon(\bar{t}), u(\bar{t})) - L(\tilde{x}^\epsilon(\bar{t}), \tilde{u}^\epsilon(\bar{t}))] + \mathcal{E} [(u(\bar{t}) - \tilde{u}^\epsilon(\bar{t}))(\tilde{p}_3^\epsilon(\bar{t}) - \\ &\tilde{p}_1^\epsilon(\bar{t})) + (u(\bar{t}) - \tilde{u}^\epsilon(\bar{t}))\tilde{p}_3^\epsilon(\bar{t})]. \end{aligned} \tag{23}$$

用  $(x^\epsilon, u^\epsilon)$  替代所有的  $(\tilde{x}^\epsilon, \tilde{u}^\epsilon)$ , 对(23)式的右端使用同样方法.估计下列式子

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \int_0^T [(u^\rho(t) - \tilde{u}^\epsilon(t))\tilde{p}_3^\epsilon(t) - (u^\rho(t) - u^\epsilon(t))p_3^\epsilon(t)] dt &= \mathcal{E} \int_0^T (\tilde{p}_3^\epsilon(t) - p_3^\epsilon(t))(u^\rho(t) - \\ &u^\epsilon(t)) dt + \mathcal{E} \int_0^T p_3^\epsilon(t)(u^\rho(t) - \tilde{u}^\epsilon(t)) dt \equiv W_1 + W_2, \end{aligned}$$

从引理 2 和(15)式可以看出,对同时满足  $(1 + \kappa)\theta < 2$  的任意的  $0 < \kappa < 1$  和  $1 < \theta < 2$ , 有

$$\begin{aligned} W_1 &\leq \left( \mathcal{E} \int_0^T |\tilde{p}_3^\epsilon(t) - p_3^\epsilon(t)|^\theta dt \right)^{\frac{1}{\theta}} \left( \mathcal{E} \int_0^T |u^\rho(t) - u^\epsilon(t)|^{\frac{\theta}{\theta-1}} dt \right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \leq \\ &C(d(u^\epsilon(t), \tilde{u}^\epsilon(t))^{\frac{\theta\theta}{2}})^{\frac{1}{\theta}} \left( \mathcal{E} \int_0^T |u^\rho(t)|^{\frac{\theta}{\theta-1}} + |u^\epsilon(t)|^{\frac{\theta}{\theta-1}} dt \right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} \leq C\epsilon^{\frac{\kappa}{3}}, \end{aligned}$$

同理可以得到  $W_2 \leq C\epsilon^{\frac{\kappa}{3}}$ . 因此

$$\mathcal{E} \int_0^T [(u^\rho(t) - \tilde{u}^\epsilon(t))\tilde{p}_3^\epsilon(t) - (u^\rho(t) - u^\epsilon(t))p_3^\epsilon(t)] dt \leq C\epsilon^{\frac{\kappa}{3}}. \tag{24}$$

运用同样的方法得到

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \int_0^T [(u^\rho(t) - \tilde{u}^\epsilon(t))(\tilde{p}_3^\epsilon(t) - \tilde{p}_1^\epsilon(t)) - (u^\rho(t) - u^\epsilon(t))(p_3^\epsilon(t) - p_1^\epsilon(t))] dt &+ \mathcal{E} \int_0^T \{ [L(\tilde{x}^\epsilon(t), u^\rho(t)) - \\ &L(\tilde{x}^\epsilon(t), \tilde{u}^\epsilon(t))] - [L(x^\epsilon(t), u^\rho(t)) - L(x^\epsilon(t), u^\epsilon(t))] \} dt \leq C\epsilon^{\frac{\kappa}{3}}. \end{aligned} \tag{25}$$

根据(23)、(24)和(25)式,应用 Hamiltonian 函数(6)的定义,得到不等式(14)成立.

### 3 数值算例

本节给出数值算例来说明控制对疾病的影响.用 Milstein 方法<sup>[14]</sup>离散随机模型(4)为

$$\begin{cases}
 S_{i+1} = S_i + [(1 - (p_l)^{1-k} (p_u)^k) (b_l)^{1-k} (b_u)^k - \frac{(\beta_l)^{1-k} (\beta_u)^k S_i I_i}{(1 + I_i^2)} - (\mu_l)^{1-k} (\mu_u)^k S_i + \\
 (\gamma_l)^{1-k} (\gamma_u)^k R_i] \Delta t - \frac{(\sigma_l)^{1-k} (\sigma_u)^k S_i I_i}{(1 + I_i^2)} \sqrt{\Delta t} \xi_i - \frac{(\sigma_l)^{2(1-k)} (\sigma_u)^{2k} S_i I_i^2}{2(1 + I_i^2)^2} (\xi_i^2 - 1) \Delta t, \\
 I_{i+1} = I_i + [\frac{(\beta_l)^{1-k} (\beta_u)^k S_i I_i}{(1 + I_i^2)} - ((\mu_l)^{1-k} (\mu_u)^k + (c_l)^{1-k} (c_u)^k + (\alpha_l)^{1-k} (\alpha_u)^k) I_i - \\
 \frac{(m_l)^{1-k} (m_u)^k u_i}{1 + (\eta_l)^{1-k} (\eta_u)^k I_i}] \Delta t + \frac{(\sigma_l)^{1-k} (\sigma_u)^k S_i I_i}{(1 + I_i^2)} \sqrt{\Delta t} \xi_i + \frac{(\sigma_l)^{2(1-k)} (\sigma_u)^{2k} S_i^2 I_i (1 - I_i^2)}{2(1 + I_i^2)^3} \times \\
 (\xi_i^2 - 1) \Delta t, \\
 R_{i+1} = R_i + [(p_l)^{1-k} (p_u)^k (b_l)^{1-k} (b_u)^k + (\alpha_l)^{1-k} (\alpha_u)^k I_i - ((\mu_l)^{1-k} (\mu_u)^k + (\gamma_l)^{1-k} (\gamma_u)^k) R_i + \\
 \frac{(m_l)^{1-k} (m_u)^k u_i}{1 + (\eta_l)^{1-k} (\eta_u)^k I_i}] \Delta t,
 \end{cases}$$

其中  $\xi_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是独立的 Gaussian 随机变量  $N(0, 1)$ .

初始值为  $(S_0, I_0, R_0) = (120.0, 1.0, 1.0)$ . 参数取值为:  $p_l = 0.5, p_u = 0.6, b_l = 4.0, b_u = 5.0, \beta_l = 0.02, \beta_u = 0.03, \mu_l = 0.04, \mu_u = 0.05, m_l = 0.3, m_u = 0.4, c_l = 0.01, c_u = 0.002, \alpha_l = 0.8, \alpha_u = 0.9, \eta_l = 0.03, \eta_u = 0.04$ .

将上述初始值和参数值代入到数值算例中,然后在时间区间  $[0, 100]$  上比较有无控制、不确定参数和随机噪声的影响.图 1 的曲线分别表示不同时刻感染者的数量变化.

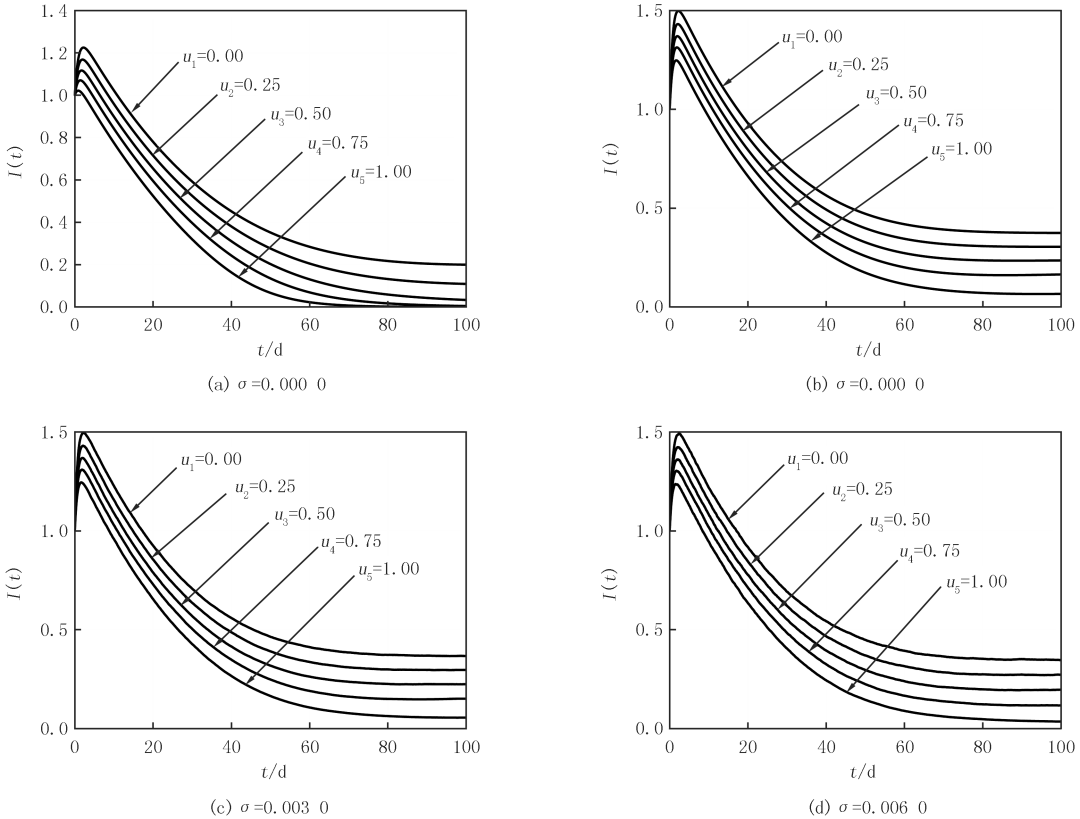


图 1 模型 (4) 的解  $I(t)$  的时间序列图

Fig.1 Time series diagram of solution  $I(t)$  of model (4)

在存在和缺乏控制以及不确定参数的情况下对感染者数量的变化都进行了比较.图 1(a)表明接受控制

治疗的感染人口减少的速度比没有控制的人群要快.1(a)与(b)进行比较表明不确定参数对疾病的预测存在一定影响.由图 1(b),(c)与(d)可知噪声强度会影响感染者的下降趋势及峰值.

## 4 结 论

本文建立治疗控制变量  $u$  和不确定参数的随机传染病模型,并进一步建立了结合随机噪声  $\sigma$  和治疗控制  $u$  的传染病模型的拟最优控制存在的必要条件.通过数值算例,知道治疗控制  $u$ 、不确定参数以及随机噪声对传染病确实有一定的影响,它能使患病人口的数量明显减少.这说明了结论的正确性.

**致谢:**感谢编委和审稿人提出宝贵的修改意见.

## 参 考 文 献

- [1] Joshi H R, Lenhart S, Hota S. Optimal control of an SIR model with changing behavior through an education campaign[J]. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2015, 2015(50): 1-14.
- [2] Chen Y, Bi K, Zhao S. Modeling individual fear factor with optimal control in a disease—dynamic system[J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2017, 104(4): 531-545.
- [3] Zaman G, Kang Y H, Cho G. Optimal strategy of vaccination and treatment in an SIR epidemic model[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2016, 136(6): 63-77.
- [4] Das A, Pal M. A mathematical study of an imprecise SIR epidemic model with treatment control.[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2017, 26(6): 1-24.
- [5] Pal D, Mahaptra G S, Samanta G P. Optimal harvesting of prey—predator system with interval biological parameters; A bioeconomic model[J]. *Mathematical Biosciences*, 2013, 241(2): 181-187.
- [6] 郭文娟,张启敏.媒体报道下的一类 SIS 传染病模型的动力学行为研究[J]. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2017, 45(3): 42-47.
- [7] 崔景安,范圣洁,陈方媛.媒体干预下的 MSM 群体艾滋病传播模型研究[J]. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2017, 45(3): 34-41.
- [8] Lahrouz A, Omari L, Kiouach D, et al. Complete global stability for an SIRS epidemic model with generalized non—linear incidence and vaccination[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 218(11): 6519-6525.
- [9] Jan S, Nandi S. K, Kar T. K. Complex dynamics of an SIR epidemic model with saturated incidence rate and treatment[J]. *Acta Biotheoretica*, 2016, 64(1): 65-84.
- [10] Guo W, Zhang Q, Rong L. A stochastic epidemic model with nonmonotone incidence rate: Sufficient and necessary conditions for near—optimality[J]. *Information Sciences*, 2018, 467(3): 670-684.
- [11] Antezak T. A sufficient condition for optimality in nondifferentiable invex programming[J]. *Control and Cybernetics*, 2001, 30(4): 431-437.
- [12] Ekeland I. Nonconvex minimization problems[J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1979, 1(3): 443-474.
- [13] Yong J, Zhou X. Stochastic control; Hamiltonian systems and HJB equations[J]. *Automatic Control IEEE Transactions on*, 1999, 46(11): 1846-1846.
- [14] Higham D. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. *Siam Review*, 2001, 43(3): 525-546.

## Necessary condition for near-optimal control of a stochastic SIRS epidemic model

Mu Xiaojie<sup>1</sup>, Zhang Qimin<sup>1,2</sup>, Wang Zong<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics and Information Science, Beifang University of Nationalities, Yinchuan 750021, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

**Abstract:** The stochastic SIRS model with imprecise parameters and white noise is established. We obtain priori estimates of the susceptible, infected and recovered populations. Necessary condition for the near optimality of the SIRS model is established with Ekeland's principle and a nearly maximum condition. A numerical example is provided for verifying the theoretical results.

**Keywords:** SIRS epidemic model; interval number; environmental fluctuation; Hamiltonian function