

# 置换杨图的组合性质及其应用

孙毅, 孟吉翔, 胡莹莹

(新疆大学 数学与系统科学学院, 乌鲁木齐 830046)

**摘要:**置换杨图本质上是 A. Postnikov 在研究完全非负 Grassmann 元胞及其元胞分解时所定义的 ]-图(]-diagram)的一个子集. 它的发现引起许多组合学者的关注和研究, 其中 L. K. Williams 和 E. Steingri-sson 是最先关注这类组合结构的, 他们在研究它的组合性质时发现了它与置换群之间存在着——对应关系  $\Psi$ . 从置换杨图本身的结构出发按照行递归的方式给出了  $\Psi$  是——映射的一个新方法, 利用这种方法可简单地将任意的一个排列  $\pi \in S_n$  分解成若干圈的乘积形式, 并且每个圈中的元素都是按递减顺序排列.

**关键词:**置换杨表; 排列; 双射

**中图分类号:**O157.1

**文献标志码:**A

文献[1]在讨论矩阵完全正定性和平面有向网络之间的联系时, 发现平面有向网的反边界问题与完全非负格拉斯曼流形(totallynonnegative Grassmannian)之间有着自然的联系. 之后, 在研究完全非负格拉斯曼流形的元胞分解时, 在杨图(youngdiagram)的基础上定义了一类与完全非负格拉斯曼流形元胞之间存在着——对应关系的图(diagram), 即 ]-图(]-diagram). 这类图是通过在杨图的每个方格里填充 0 或 1 得到的, 并使得它满足如下条件(即 ]-性质): 设  $a, b$  和  $c$  是依次填充在给定的 3 个方格  $(i, j)$ ,  $(i, k)$  和  $(l, k)$  中的数字, 其中  $i, j, k$  满足  $l < i, j < k$ . 如果有  $a, c \neq 0$ , 那么  $b \neq 0$  (如图 1).

A. Postnikov 在文献[1]中不仅证明了 ]-图与完全非负格拉斯曼流形元胞之间存在——对应关系, 而且还证明了它与彩色排列之间也存在着——对应关系. 后来, 在对完全正定格拉斯曼元胞的计数<sup>[2]</sup>问题进行研究时, L. K. Williams 得到了关于 ]-图的几类统计量的生成函数, 这恰好等价于按彩色排列的几种统计量进行计数时所得到的生成函数. 因为普通排列是彩色排列的一个子集, 于是 L. K. Williams 通过对彩色排列生成函数的限制性变换得到了欧拉数  $E_{k,n}$  ( $E_{k,n}$  是  $n$  阶对称置换群  $S_n$  中具有  $k$  个弱胜位的排列数)的一种新的  $q$ -模拟.

文献[3]比较详细地研究了置换杨图这种组合对象, 并通过建立——映射的方式将它和排列紧密地联系在一起, 使排列统计量和置换杨图的某个结构特点对应起来, 便可以通过研究具有某种特定结构的置换杨图来达到研究有关限制性排列和集合划分的目的. 之后, 文献[4-6]不仅发现了它与统计力学中的非对称排斥过程有着紧密的联系, 而且还发现了它与组合霍普夫代数之间的联系<sup>[7]</sup>, 除此之外, 一些学者利用置换杨图的结构解决了相关的组合数学问题. 国内外许多学者又发现了有关置换杨图的更多结果<sup>[8-13]</sup>. 随着人们对这种新的组合对象的更加深入地研究, 置换杨图将会有更广阔的应用前景.

## 1 置换杨图的概念与表示

设  $n$  是一个正整数,  $n$  的一个弱无序分拆(通常简称为弱分拆)是指满足  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 0$  和  $n = \sum_{i=1}^m \lambda_i$

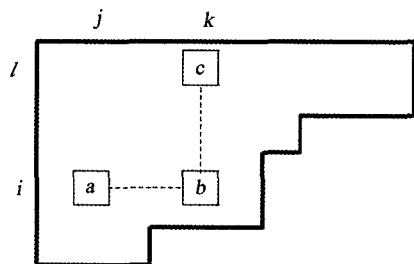


图1 ]-图(]-性质)

收稿日期:2014-08-16; 修回日期:2015-03-22.

基金项目:国家自然科学基金(11171283)

作者简介:孙毅(1984-),男,河南商丘人,新疆大学讲师,研究方向为组合数学,E-mail: brianys1984@126.com.

的非增序列  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ , 其中  $\lambda_i (1 \leq i \leq m)$  是整数. 通常把  $n$  的一个弱无序分拆  $\lambda$  简记为  $\lambda \vdash n$ , 并称  $m$  是该分拆的长度. Ferrers 图可以直观清楚地表示  $n$  的一种分拆. 这种表示方法就是先将分拆的每一部分  $\lambda_i (1 \leq i \leq m)$  用一行  $\lambda_i$  个小黑点表示出来, 然后再按左对齐的方式堆积起来, 例如  $13 = (5, 3, 2, 2, 1)$  就可以用 Ferrers 图表示成如图 2(b) 的形式.

杨图  $Y$  与 Ferrers 图类似, 也是定义在整数分拆的基础上的. 它实际上是将分拆  $\lambda \vdash n$  的 Ferrers 图中的小黑点换成方格而得到的. 如果杨图  $Y$  是通过分拆  $\lambda \vdash n$  的 Ferrers 图而得到的, 那么称杨图  $Y$  的形状为  $\lambda$ , 并记之为  $Y_\lambda$  (如图 2(a)). 由图 2 不难发现, 给定一个形状  $\lambda$ , 便在  $Y_\lambda$  中唯一对应着一条从  $Y_\lambda$  右上角出发并向南(或向下)向西(或向左)走的格路  $P$ . 反之, 给定一条这样的格路  $P$ , 便可完全确定形状. 置换杨图就是在杨图  $Y_\lambda$  的基础上, 通过在每个方格里填充满足特定条件的 0 或 1 得到的.

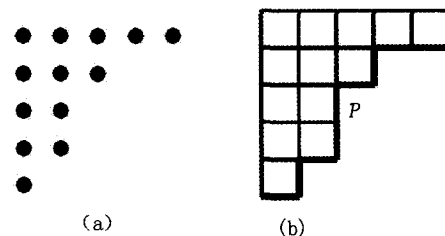


图2 整数分拆的Ferrers图(a)和杨(Young)图(b)

**定义 1** (置换杨图(Permutation Tableau)<sup>[3]</sup>) 设  $\lambda$  是正整数  $n$  的一个弱分拆,  $Y_\lambda$  是形状为  $\lambda$  的杨图. 如果在  $Y_\lambda$  的方格里填充 0 或 1 使得它满足以下条件:

- (i)  $Y_\lambda$  每一列都至少有一个 1;
- (ii) 在  $Y_\lambda$  中, 不存在填充 0 的方格使得在它的同一列上方有一个方格填充 1 以及在它的同一行的左边有一个方格也填充 1. 换句话说, 如果一个方格所在的同一列上方的某个方格已经填充了 1 以及其同一行左方的某个方格也已经填充了 1, 那么该方格只能填充 1. 以后称这个条件为 1-链条性质.

那么, 称填充后的杨图  $Y_\lambda$  是形状为  $\lambda$  的置换杨图, 记为  $T_\lambda$  (参见例 1—图 3(a)).

根据条件(i), 不难发现置换杨图不能出现空列也不能出现全是 0 的列.

设  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  是正整数  $n$  的一个分拆, 这里  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$ . 则对应于形为  $\lambda$  置换杨图  $T_\lambda$  应有  $\lambda_1$  列和  $m$  行. 现设  $P$  表示对应于  $T_\lambda$  边界的格路. 显然,  $P$  中的向南(或向下)方向的竖线和向西(或向左)方向的横线恰好分别对应  $T_\lambda$  中的行和列. 因此,  $P$  的长度就等于  $l(T_\lambda) = \lambda_1 + m$ . 以后, 将称  $l(T_\lambda)$  为  $T_\lambda$  的长(或半周长). 为了表示方便, 给  $T_\lambda$  的行和列按如下的方式进行标号: 从  $P$  的右上角出发, 用正整数集合  $[l] = \{1, 2, \dots, l\}$  按从小到大的顺序先对  $P$  进行标号. 如果  $P$  上的某一条竖线标号为  $i$ , 则在  $T_\lambda$  中对应于该竖线的行标记为  $i$ ; 如果  $P$  上的某一条横线标号为  $j$ , 则在  $T_\lambda$  中对应于该横线的列标记为  $j$  (如图 3(a)). 把这种标号记为  $L(T_\lambda)$ .

在研究置换杨图的统计量的时候, 人们通常将置换杨图  $T_\lambda$  嵌入到一个矩阵  $M$  中(参见例 1—图 3(b)). 为此, 可以构造一个  $m \times \lambda_1$  阶矩阵  $M_{m \times \lambda_1}$ , 使  $T_\lambda$  按左对齐的方式嵌入其中, 并在  $M_{m \times \lambda_1} \setminus T_\lambda$  中的所有方格填充 2. 通过这种方式得到的包含  $T_\lambda$  的矩阵  $M_{m \times \lambda_1}$  可以看作是置换杨图  $T_\lambda$  的矩阵表示.

下面通过给出一个具体的例子来说明置换杨图的结构.

**例 1**

$$n = 43, \lambda = (10, 9, 9, 8, 5, 2, 0), l = 17.$$

## 2 置换杨图与排列之间的关系

设  $S_n$  表示所有  $n$  长排列的集合,  $PT(n) = \{T_\lambda : \lambda \vdash n\}$ . 那么,  $S_n$  和  $PT(n)$  之间自然地存在着——对应关系. 这里将给出一个从  $PT(n)$  到  $S_n$  的一个一一映射  $\Psi$ . 这个映射最初是由 E. Steingrímsson 和 L. Williams 提出来的, 但是他们对这种映射的描述比较复杂. 为此, 定义一种路, 实际上属于格路的一种.

**定义 2**[zigzag 路] 设  $P = s_1 s_2 \dots s_p$ ,  $S(\text{resp. } \downarrow)$  和  $E(\text{resp. } \rightarrow)$  分别表示向南走和向东走的一个单位长度, 如果  $s_i \in \{S, E\} (i = 1, 2, \dots, p)$ , 那么称  $P$  是一条长度为  $p$  的 zigzag 路.

注意, 这里的 zigzag 路的起点无关紧要, 只要满足行走方向以及每一步的长度都相同的要求即可. 下面利用 zigzag 路给  $\Psi$  一个更简洁的描述方式.

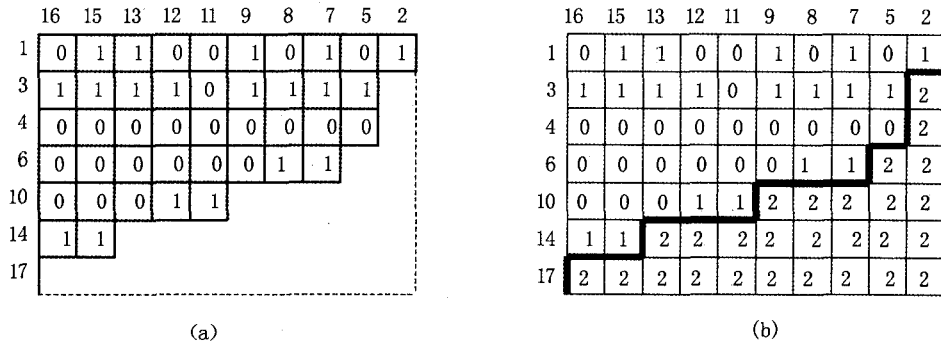


图3 转换杨图 $T_\lambda$ (a)及其矩阵表示(b)

**定理 1**<sup>[3]</sup> 设  $PT(n) = \{T_{\lambda, \lambda \vdash n}\}$ , 其中  $T_\lambda$  是对于分拆为  $\vdash n$  的置换杨图,  $S_n$  表示  $\{1, 2, \dots, n\}$  上的全体排列构成的集合. 那么存在一个从  $PT(n)$  到  $S_n$  的一一映射  $\Psi$ .

先给出从  $PT(n)$  到  $S_n$  的映射  $\Psi$  的构造方法.

任给一个置换杨图  $T_\lambda, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ , 则  $T_\lambda$  有  $k$  行  $\lambda_1$  列. 为方便起见, 记  $T_n^k = T_\lambda$ , 这里  $n = k + \lambda_1$ . 定义  $\Psi: PT(n) \rightarrow S_n$  如下:  $\forall T_n^k \in PT(n)$ , 令  $L = L(T_n^k)$ . 不失一般性, 可设  $L = \{1, 2, \dots, n\}$ .

第 1 步:  $\forall i \in L(T_n^k)$ , 若  $i$  是  $T_n^k$  的列(或行)标号, 则从  $i$  所在的位置出发, 先沿着它所在的列向南(或向东)走, 中途只能向南和向东两个方向转弯. 若前进的过程中遇到 0 则不改变行进的方向, 否则每遇到一个 1 就改变一次方向(只能向南或向东), 直到走出  $T_n^k$  的自右上角到左下角的边界  $P = p_1 p_2 \dots p_n$  为止. 如果走出去时遇到  $P$  的边界是  $p_j$ , 就定义  $\pi(i) = j$ , 并称从  $i$  到  $p_j$  的向南向东的路为 zigzag 路  $P(i)$ .

第 2 步:  $\forall i \in L(T_n^k)$ , 如果  $i$  是全 0 行或空行的标号, 则定义  $\pi(i) = i$  (如图 4).

**定义 3** (弱胜位, 亏位) 设  $\pi = \pi(1)\pi(2)\dots\pi(n) \in S_n$ , 如果存在  $i \in [n]$  使得  $\pi(i) \geq i$ , 则称  $i$  是个弱胜位. 否则, 称之为一个亏位.

根据  $\Psi$  的定义, 不难发现如果  $i \in [n]$  标记的是  $T_n^k$  的某个行, 那么有  $\Psi(T_n^k)(i) = \pi(i) \geq i$ , 特别地, 空行和全零行对应于排列  $\pi$  中的固定点; 如果  $i \in [n]$  标记的是  $T_n^k$  的某个列, 那么有  $\Psi(T_n^k)(i) = \pi(i) < i$ . 于是有下面命题.

**命题 1** 设  $\pi = \Psi(T_n^k) \in S_n$ , 映射  $\Psi$  把  $T_n^k$  中的行标号映射到  $\pi$  中的弱胜位; 把  $T_n^k$  中的列标号映射到  $\pi$  中的亏位.

**证明** 根据  $\Psi$  的构造方法和他们的定义即得.

为了说明  $\Psi$  是个双射, 只需要构造出  $\Psi^{-1}$  即可. 下面的定理为构造  $\Psi^{-1}$  提供了重要的理论基础.

本文将根据下面的定理 2 从最上面的行出发给出一个从  $\pi = \Psi(T_n^k) \in S_n$  得到  $T_n^k \in PT(n)$  的方法.

先考虑  $\pi = \Psi(T_n^k) \in S_n$  中最大的非固定点  $m$ , 根据  $m$  的极大性可知, 当  $j > m$  时,  $\pi(j) = j$ , 又  $m$  是非固定点可得  $\pi(m) < m$ , 故当  $i > m$  时, 显然它恰好对应  $T_n^k$  的空行. 因此, 如果确定了除空行以外的标号集为  $\{1, 2, \dots, m\}$  的置换杨图  $T_n^k$  的填充情况, 那么只需在所得到的置换杨图后面添加  $n - m$  个空行便可以得到  $T_n^k$ . 因此, 不失一般性, 不妨假设  $m = n$ , 亦即考虑没有空行的置换杨图.

**定理 2** 假设  $\pi$  是  $S_n$  中任一排列, 且满足  $\pi(n) \neq n$ . 令  $PT$  是  $\pi$  在  $\Psi^{-1}$  的作用下得到的置换杨图.  $PT'$  是将  $PT$  的最上面一行去掉后所得到的置换杨图(注意此时定义  $\pi'(1) = 1$ ), 其中  $\pi' = \Psi(PT')$ . 如果  $PT$  的

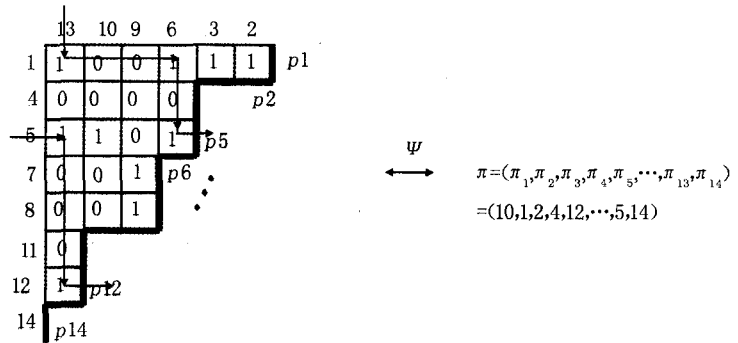


图4 双射 $\Psi: PT(n) \rightarrow S_n$

最上面的行中, 含有 1 的列标号为  $i_1 > i_2 > \dots > i_c$ , 则有下面的结论成立:

(1)  $\pi = \pi' \circ (i_1 i_2 i_3 \dots i_c 1)$ , 这里  $\pi = \Psi(PT), \pi' = \Psi(PT')$ .

(2)  $\pi(1) > \pi(i_1) > \pi(i_2) > \dots > \pi(i_c)$ , 并且  $\pi(i_1), \pi(i_2), \dots, \pi(i_c)$  是  $\pi$  的子序列  $\sigma$  中连续非固定的自右向左极小元. 这里的  $\sigma$  是由  $\pi$  中小于  $\pi(s)$  的数值所组成, 其中  $s$  是  $\pi$  中最左面的非固定点的位置; 自右向左极小元是指如果对所有  $i > j$ , 都有  $\pi(i) > \pi(j)$ , 则称  $\pi(j)$  是自右向左极小元.

**证明** 对上面的定理分两部分进行证明.

(i) 先证明第 1 部分.

考虑  $\Psi$  作用在  $PT$  上时从行标号或列标号所在位置出发沿向南向东走的 zigzag 路.

$\forall 1 < j < c$ , 考虑从  $i_j$  到  $p_\pi(i_j)$  的 zigzag 路中的第 1 步, 第 2 步和第 3 步. 第 1 步是从  $i_j$  所在的位置出发先向南到达  $(1, i_j)$  这个格子, 因为这个格子里填有 1, 然后转弯向东走到  $(1, i_j + 1)$  这个格子里时再次遇到 1, 接着转向南走. 据此, 使得  $\pi(i_j) = \pi'(i_j + 1)$ . 再看  $i_c$  的情况, 因为它是第 1 行中最后 1 个 1 所在的列, 所以从  $i_c$  所在的位置出发先向南再向东直达  $p_1$ . 因为  $(1, i_c)$  的右边(同行)再没有了 1. 故有  $\pi(i_c) = 1$ . 最后考虑从 1 出发的 zigzag 路的情况. 因为 1 是  $\mathcal{T}$  最上面的行标号, 所以从 1 所在位置出发应该先向东到达  $(1, i_1)$ , 然后转向南. 因此,  $\pi(1) = \pi'(i_1)$ .

综上所述可得  $\pi = \pi' \circ (i_1 i_2 i_3 \dots i_c 1)$ .

(ii) 下面证明第 2 部分.

注意到 zigzag 路  $P(i_j): i_j \rightarrow p_\pi(i_j)$  和  $P(i_{j+1}): i_{j+1} \rightarrow p_\pi(i_{j+1})$  在方格  $(1, i_{j+1})$  处相遇. 可以证明  $P(i_j)$  与  $P(i_{j+1})$  只能相遇, 但不能相交. 否则, 如果假设它们在某个格子  $(p, q)$  相交了, 那么该格子所在行的左边一定有 1, 由于  $P(i_j)$  是从列出发的, 故要到达格子  $(p, q)$  必定要转弯(意味着转弯处有 1)才能到达. 同理  $(p, q)$  所在列的上方也有 1, 这与  $(p, q)$  里填的是零相矛盾. 由此, 可知  $P(i_j)$  总是位于  $P(i_{j+1})$  的下面, 它们最多在导出的 1 处相遇(在不考虑第一次相遇的情况下). 这样就证明了  $\pi(i_j) > \pi(i_{j+1})$  对所有的  $j < c$  都成立. 类似分析可得  $\pi(1) > \pi(i_1)$ .

现设  $l \in [n]$  是使得  $i_{j-1} < l < i_j$  的列标号, 如果  $j = 1$ , 直接令  $l < i_1$ . 下面考虑  $\pi(l)$  与  $\pi(i_{j-1}), \pi(i_j)$  的关系.

考虑  $P(i_{j-1})$  与  $P(l)$ , 由于  $(1, l)$  填充的是 0, 则  $P(i_{j-1})$  与  $P(l)$  一定相交于格子  $(1, l)$ , 类似上面的分析可知,  $P(i_{j-1})$  中从  $(1, l)$  到  $p_\pi(i_{j-1})$  这段 zigzag 路  $P_1$  与  $P(l)$  中从  $(1, l)$  到  $p_\pi(l)$  的这段 zigzag 路  $P_2$  不会再相交, 而且  $P_2$  总是在  $P_1$  的下面, 故有  $\pi'(l) > \pi(i_{j-1})$ . 类似地有  $\pi(l) > \pi(i_j)$ . 从而,  $\pi(i_{j+1})$  就是位于  $\pi(i_j)$  最左边的且比  $\pi(i_j)$  小的数. 故定理成立.

根据定理 2, 便可以顺利地由第 1 行出发来构造  $\Psi^{-1}$ .

第 1 步 给定  $\pi = \Psi(T_n^k)$ , 先确定  $T_n^k$  的形状  $\lambda(T_n^k)$ . 为此, 只需通过  $\pi$  确定对应于  $T_n^k$  的向南向西的边界线  $P$  即可. 定义  $P$  如下:  $\forall i, 1 \leq i \leq n$ , 如果  $i$  是弱胜位, 则  $P$  的第  $i$  步向南走(或画一条竖线); 如果  $i$  是亏位, 则  $P$  的第  $i$  步向西走(或画一条横线). 然后按左对齐的方式补齐上边界线和左边界线以及所有的方格便得对应于该形状的杨图  $Y$ (参见例 2 - 图 5).

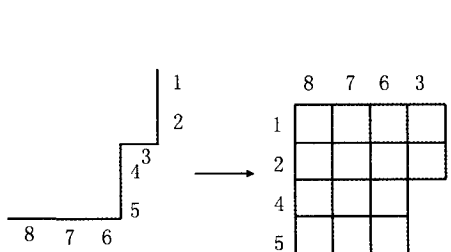


图5 双射  $\Psi: S_n \mapsto PT(n)$  对应的杨图

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	圈
$\pi$	3	6	1	8	7	4	2	5	(731)
$\pi'$	1	6	2	8	7	4	3	5	(732)
$\pi''$	1	2	3	8	7	4	5	6	(764)
$\pi'''$	1	2	3	4	7	5	6	8	(765)
$\varepsilon$	1	2	3	4	5	6	7	8	

图6 双射  $\Psi^{-1}: S_n \mapsto PT(n)$  对应的置换杨图

第 2 步 利用定理 2. 设  $\pi = \Psi(T_n^k)$ , 如果存在最大的整数  $k > 0$  使得  $\pi(1)\pi(2)\dots\pi(k)$  都是固定点, 则从  $\pi$  中去掉  $\pi(1)\pi(2)\dots\pi(k)$ , 并将  $Y$  中的前  $k$  行全部填上零. 如果不存在这样的  $k$ , 则令  $k = 0$ , 然后考虑

$\pi^* = \pi(k+1)\pi(k+2)\cdots\pi(n)$ . 记  $\pi^*$  中比  $\pi(k+1)$  小的数组成的子序列中, 自右向左极小元的列标号为  $i_1 > i_2 > \cdots > i_c$ , 则  $\pi^*$  可写成如下形式:  $\pi^* = \pi' \circ (i_1 i_2 \cdots i_c (k+1) 1)$  并假设  $\Psi^{-1}(\pi')$  已经构造出来了. 那么, 便在  $\Psi^{-1}(\pi')$  的最上面一行中(即  $T_n^k$  的第一行)的第  $i_1, i_2, \cdots, i_c$  列的方格里填上数字 1, 其余格子填上 0(参见例 2-图 6).

至此, 完成定理 1 的证明.

注 从  $\Psi^{-1}$  的构造过程中, 不难发现: 如果  $\pi$  中有固定点, 那么所得到的递减圈分解中将含有单圈; 如果  $\pi$  是错排, 那么所得到的递减圈分解中每个圈的长度都大于 1.

**定理 3** 设  $a, b$  和  $c$  是依次填充在一个置换杨图  $PT$  中的任意给定的 3 个方格  $(i, j)$ ,  $(i, k)$  和  $(l, k)$  中的数字, 其中  $i, j, k$  满足  $l < i < k < j$ . 如果有  $a = b = c = 1$ , 那么在  $\pi(PT)$  的递减圈分解中至少有两个圈包含  $k$ .

**证明** 根据定理 2 的证明过程可知, 在置换杨图  $PT$  中, 包含数字  $c$  的格子所在的行对应的圈是  $(** * j * * * k * * * l)$ , 包含  $a, b$  的格子所在的行对应的圈是  $(** * j * * * k * * * i)$ , 因此  $\Psi(PT)$  的递减圈分解一定具有如下形式  $\Psi(PT) = \cdots (** * j * * * k * * * i) \cdots (** * j * * * k * * * l) \cdots$ .

由此, 便可得到如下推论.

**推论 1** 设  $PT$  是任意一个置换杨表,  $\pi = \Psi(PT)$ . 如果  $i$  在出现  $\pi$  的递减圈分解中的某个圈  $C_1$  中, 并且在  $C_1$  左边的另一个圈  $C_2$  中含有元素  $i_1, i_2$ , 使得  $i_1 > i > i_2$ , 那么在置换杨表  $PT$  中, 存在方格  $(x, i)$ , 其中  $x < i_2$ , 使得这 3 个方格  $(i_2, i_1), (i_2, i), (x, i)$  中的数字恰好形成一个 1-链条, 即方格  $(i_2, i_1), (i_2, i), (x, i)$  中的数字都是 1.

### 3 在置换群分解中的应用

根据上面对  $\Psi^{-1}$  的构造和讨论, 注意到每递归 1 次(相当于去掉置换杨图的 1 行), 每去掉 1 行便得到 1 个元素按递减顺序排列的圈, 于是得到它在置换群分解中的一个应用:

**定理 4** 设  $S_n$  是  $n$  阶排列(或置换群). 那么,  $\forall \pi \in S_n$ , 存在着一个双射将  $\pi$  唯一分解成若干圈的乘积的形式, 并且每个圈中的元素按递减顺序排列.

**证明** 利用归纳法来证明.

假设定理对长度比  $n$  小的排列成立. 下面考虑长度为  $n$  的排列. 设  $\pi = \Psi(T_n^k)$ , 如果存在最大的整数  $k > 0$  使得  $\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(k)$  都是固定点, 则从  $\pi$  中去掉  $\pi(1)\pi(2)\cdots\pi(k)$ , 然后考虑  $\pi^* = \pi(k+1)\pi(k+2)\cdots\pi(n)$  的圈分解情况. 因为  $\pi^*$  的长度比  $\pi$  的长度小, 由归纳假设可知定理成立. 否则, 如果  $k = 0$ , 则令  $\pi^* = \pi$ . 然后考查比  $\pi(1)$  小的数组成的子序列中自右向左极小元的列标号  $i_1 > i_2 > \cdots > i_c$ , 则  $\pi$  可写成如下形式:  $\pi = \pi' \circ (i_1 i_2 \cdots i_c (1) 1)$ . 由于  $(i_1 i_2 \cdots i_c (1) 1)$  的长度至少为 1 且按递减顺序排列, 所以  $\pi'$  的长度小于  $n$ . 根据归纳假设  $\pi'$  可以写成若干递减圈分解的形式. 综上定理得证.

根据图 5、图 6 中构造  $\Psi^{-1}$  的过程, 得到了  $\pi = (765)(8764)(8732)(731)$ .

**例 2** 设  $\pi = 36187425$ . 则有  $\pi(1) = 3, \pi(2) = 6, \pi(3) = 1, \pi(4) = 8, \pi(5) = 7, \pi(6) = 4, \pi(7) = 2, \pi(8) = 5$ . 弱胜位是  $\{1, 2, 4, 5\}$ , 亏位是  $\{3, 6, 7, 8\}$ .

根据图 5 与图 6 中构造  $\Psi^{-1}$  的过程, 得到了  $\pi = (765)(8764)(8732)(731)$ . 称这种排列的圈分解方式为递减圈分解.

### 4 总结与讨论

本文主要研究了置换杨图和置换群之间的 1 个双射及其所具有的显而易见的特征, 并且对置换杨图采用递归的方式给出了  $\Psi^{-1}$  的 1 种构造方法. 注意到在进行递归构造的过程中, 每对置换杨图的行递归 1 次就得到 1 个相应的圈, 并且圈中的元素按递减顺序排列. 这样, 利用对  $\Psi^{-1}$  的构造方法, 无意中发现了利用置换杨图寻求置换群分解的 1 种方法, 当然值得注意的是这种方法不同于在抽象代数中常见的那种对置换群进行圈分解的方法. 除此之外, 文献[9]也给出了另外 1 个双射, 文献[12]利用置换杨图的结构解决了

有关限制性排列计数的 1 个问题, 因此感兴趣的读者还可考虑排列和置换杨图之间其它的双射具有什么特点以及它们在解决相关组合计数问题中的应用, 除此当然也可以去寻求新的一一映射等等.

### 参 考 文 献

- [1] Postnikov A. Total positivity, grassmannians, and networks[EB/OL]. [2014-06-15]. <http://www.arXiv.math/0609764>.
- [2] Williams L K. Enumeration of totally positive Grassmann cells[J]. *Adv Math*, 2005, 190: 319-342.
- [3] Steingrímsson E, Williams L K. Permutation tableaux and permutation patterns[J]. *J Combin Theory Ser A*, 2007, 114: 211-234.
- [4] Corteel S, Brak R. A combinatorial derivation of the PASEP stationary state[J]. *J Combin*, 2006, 13(4): 1-23.
- [5] Corteel S, Kim J S. Combinatorics on permutation tableaux of type A and type B[J]. *European J Combin*, 2011, 32(4): 563-579.
- [6] Corteel S, Williams L K. Tableaux combinatorics for the asymmetric exclusion process I[J]. *Adv Appl Math*, 2007, 37: 293-310.
- [7] Novelli J C, Thiébon J Y. Combinatorial Hopf algebras, noncommutative Hall-Littlewood functions, and permutation tableaux[J]. *Adv Math*, 2010, 224: 1311-1348.
- [8] Burstein A. On some properties of permutation tableaux[J]. *Ann Combin*, 2007, 11: 355-368.
- [9] Corteel S, Nadeau P. Bijections for permutation tableaux[J]. *European J Combin*, 2009, 30: 295-310.
- [10] Corteel S, Williams L K. Tableaux combinatorics for the asymmetric exclusion process II[J]. *Adv Appl Math*, 2007, 39(3): 293-310.
- [11] Nadeau P. The structure of alternative tableaux[J]. *J Combin Theory Ser A*, 2011, 118(5): 1638-1660.
- [12] Chen W Y C, Liu L H. Permutation tableaux and the dashed permutation pattern 32-1[J]. *Electron J Combin*, 2011, 18(1): 1-11.
- [13] Lam T, Williams L. Total positivity for cominuscle grassmannians[J]. *J Math*, 2008, 14: 53-99.

## Combinatorial Properties of Permutation Tableaux with Its Applications

SUN Yi, MENG Jixiang, HU Yingying

(College of Mathematics and System Science, Xinjiang University, Urumqi 830046, China)

**Abstract:** Essentially, the permutation tableaux is a subset of the  $\downarrow$ -diagram defined by A. Postnikov in his work studying the combinatorics of the totally non-negative part of the Grassmannian and its cell decomposition. On the basis of investigating combinatorial properties of permutation tableau, L. K. Williams found that there is a natural bijection  $\Psi$  between the permutation tableaux and the permutations. In terms of its combinatorial structure, we give a new proof that  $\Psi$  is a bijection in this thesis with a new way which leads to an unexpected result: any permutation  $\pi \in S_n$  can be decomposed into the multiplications of cycles each of which is ordered decreasingly.

**Keywords:** permutation tableaux; permutations; bijection