第 44 卷 第 5 期
2016 年 9 月

河南师范大学学报(自然科学版)
Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)

Vol. 44 No. 5
Sept. 2016

文章编号:1000-2367(2016)05-0131-09

DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2016.05.023

多粒度粗糙直觉模糊截集的研究

薛占熬,王 楠,司小朦,朱泰隆

(河南师范大学 计算机与信息工程学院;"智慧商务与物联网技术"
河南省工程实验室,河南 新乡 453007)

摘 要:直觉模糊集和多粒度粗糙集的融合是一个研究热点.针对多粒度粗糙直觉模糊集的表示问题,根据直觉模糊集的分解定理和截集理论,构造了乐观和悲观多粒度粗糙直觉模糊集模型,定义了乐观和悲观多粒度粗糙直觉模糊集上下近似集,并证明了多粒度粗糙直觉模糊集的一些性质,同时提出了一个新的直觉模糊集的相似度公式.最后通过小麦长势评估实例,分析讨论了乐观和悲观多粒度粗糙直觉模糊集模型的有效性.

关键词:直觉模糊集;粗糙集;粒度;截集;相似度

中图分类号: TP181 **文献标志码**:A

自文献[1]提出模糊集的概念以后,模糊集及其理论得到了快速的发展,直觉模糊集是 Atanassov 于 1986 年提出的,是对 Zadeh 模糊集进行了拓展[2].它相对于模糊集增加了非隶属度的概念,能更好地描述日常生活中的模糊性、不确定性强的信息.目前,直觉模糊集的研究取得了一系列成果,且它已被广泛应用于模式识别、医疗诊断、图像隐写等领域[3-7].而近年来度量两个直觉模糊集的相似度问题就是其中的研究热门话题之一[8],得到了学者们广泛的关注和深入研究[9].粗糙集理论是 Pawlak 教授于 1982 年提出的一种能够有效分析和处理不精确、不一致、不完整信息的数学方法[10].粗糙集和直觉模糊集在处理模糊性、不确定性强的信息时两者有很强的互补性.二者的结合已成为新的研究热点[7].

近几年,基于多粒度粗糙模糊集引起了许多学者的关注,并取得了一些有意义的研究成果.文献[11-12]从粒计算的角度出发,分析由单个不可分辨二元关系导出的等价类来近似表示位置概念粗糙集的不足,提出了多粒度粗糙集的概念,给出乐观和悲观多粒度粗糙集模型.文献[13]将最小描述从单一粒度推广到多个粒度,建立了多粒度覆盖粗糙集模型.文献[14]通过支撑函数分别给出了不同论域一般多粒度模糊下上近似算子的定义,建立了双论域的一般多粒度模糊粗糙集模型.文献[15]从粒计算的角度出发,通过结合多粒度粗糙集和直觉模糊粗糙集,给出了直觉模糊多粒度粗糙集的定义,研讨其性质,同时也对其进行了推广.

本文在多粒度的理论基础上,对多粒度粗糙集和直觉模糊集的融合进行了深入研究.针对多粒度粗糙直觉模糊集的表示问题,将直觉模糊集的截集引入到多粒度空间中,根据直觉模糊集的分解定理和截集理论,构建了乐观和悲观多粒度粗糙直觉模糊集模型,定义了乐观和悲观多粒度粗糙直觉模糊集的上下近似集,研讨其性质.同时又提出了一种新的直觉模糊集相似度的计算方法,最后用实例来分析讨论了乐观和悲观多粒度粗糙直觉模糊集模型的有效性.

1 基础知识

1.1 粗糙集基础知识

定义 1[16] 设 $K=(U,A,V,f)$ 是一知识库,其中,U 是一个非空集合,称为论域,$A=C\cup D$ 是属性

收稿日期:2016-01-30;**修回日期**:2016-06-20.

基金项目:国家自然科学基金(61273018);河南省基础与前沿技术研究计划项目(132300410174);河南省教育厅计划项目(14A520082);新乡市重点科技攻关计划项目(ZG14020).

第 1 作者简介(通信作者):薛占熬(1963-),男,河南陕县人,河南师范大学教授,博士,研究方向为人工智能基础理论和粗糙集理论,E-mail:xuezhanao@163.com.

的非空有限集合,C 为条件属性集,D 为决策属性集,$C \cap D = \phi$,V_a 是属性 $a \in A$ 的值域,$f:U \times A \to V$ 是一个信息函数,它为每个对象赋予一个信息值.

定义 2[16] 设 U 是一个有限的非空论域,R 为 U 上等价关系,$\forall x \in U$,有 $[x]_R = \{y \mid y \in U, (x,y) \in R\}$,$[x]_R$ 表示 x 关于等价关系 R 的等价类,则有对任意的 $X \subseteq U$,X 的 R 下、上近似集分别定义为:

$$\underline{R}(X) = \{x \mid x \in U, [x]_R \subseteq X\},\ \overline{R}(X) = \{x \mid x \in U, [x]_R \cap X \neq \phi\}.$$

定义 3[11,17] 设 $T = (U, AT, f)$ 为一信息系统或数据表,其中,U 是论域,AT 是非空属性集合,$A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 AT 的 m 个属性子集,R_{A_i} 是关于属性集 AT 的一个等价关系,$[x]_{A_i}$ 是 R_{A_i} 确定的等价类,则对任意的 $X \subseteq U$,其关于 A_i 的乐观多粒度下近似集和上近似集分别定义为:

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(X) = \{x \mid x \in U, \bigvee_{i=1}^{m} ([x]_{A_i} \subseteq X)\},\ \overline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(X) = \{x \mid x \in U, \bigwedge_{i=1}^{m} ([x]_{A_i} \cap X \neq \phi)\},$$

其中,$\vee$ 是析取运算,$\wedge$ 是合取运算,下文相同,不再说明.若 $\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(X) \neq \overline{\sum_{i=1}^{m} A_i^O}(X)$,称 X 是乐观多粒度粗糙集,否则称 X 是乐观多粒度可定义集.

定义 4[11,17] $T = (U, AT, f)$ 为一信息系统或数据表,其中 U 是论域,AT 是非空属性集合 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 AT 的 m 个属性子集,R_{A_i} 是关于属性集 AT 的一个等价关系,$[x]_{A_i}$ 是 R_{A_i} 确定的等价类,则对任意的 $X \subseteq U$,其关于 A_i 的悲观多粒度下近似集和上近似集分别定义为:

$$\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^P}(X) = \{x \mid x \in U, \bigwedge_{i=1}^{m} ([x]_{A_i} \subseteq X)\},\ \overline{\sum_{i=1}^{m} A_i^P}(X) = \{x \mid x \in U, \bigvee_{i=1}^{m} ([x]_{A_i} \cap X \neq \phi)\},$$

若 $\underline{\sum_{i=1}^{m} A_i^P}(X) \neq \overline{\sum_{i=1}^{m} A_i^P}(X)$,称 X 是悲观多粒度粗糙集,否则称 X 是悲观多粒度可定义集.

1.2 直觉模糊集基础知识

定义 5[18] 设在一个非空经典集合 U 上,具有如下形式的集合 $A = \{< x, \mu_A(x), v_A(x) > \mid x \in U\}$ 称为 U 上的一个直觉模糊集(简写记为 IFS).其中函数 $\mu_A(x): U \to [0,1]$ 和 $v_A(x): U \to [0,1]$ 分别表示 U 上元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度,并且满足 $0 \leq \mu_A(x) + v_A(x) \leq 1, \forall x \in U$,其犹豫度函数 $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \nu_A(x)$,显然有 $\pi_A(x): U \to [0,1]$.

两个直觉模糊集 A 和 B 的包含关系、相等关系,并、交、补集运算为:

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x), v_A(x) \geq v_B(x), \forall x \in U$;

(2) $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x), v_A(x) = v_B(x), \forall x \in U$;

(3) $A \cup B = \{< x, \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{v_A(x), v_B(x)\} > \mid x \in U\}$;

(4) $A \cap B = \{< x, \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{v_A(x), v_B(x)\} > \mid x \in U\}$;

(5) $\sim A = \{< x, v_A(x), \mu_A(x) > \mid x \in U\}$.

定义 6[2] A 是 U 上的直觉模糊集,$(\lambda, \theta) \in L$(其中 L 是一个完备格,$L = \{(\lambda, \theta) \mid \lambda, \theta \in [0,1], \lambda + \theta \leq 1\}$).设:

$$A_{[\lambda,\theta]} = \{< x, \mu_A(x) \geq \lambda, v_A(x) \leq \theta > \mid x \in U\},\ A_{[\lambda,\theta)} = \{< x, \mu_A(x) \geq \lambda, v_A(x) < \theta > \mid x \in U\},$$

$$A_{(\lambda,\theta]} = \{< x, \mu_A(x) > \lambda, v_A(x) \leq \theta > \mid x \in U\},\ A_{(\lambda,\theta)} = \{< x, \mu_A(x) > \lambda, v_A(x) < \theta > \mid x \in U\}.$$

分别称为 A 的$[\lambda,\theta]$-截集,$[\lambda,\theta)$-截集,$(\lambda,\theta]$-截集及(λ,θ)-强截集,其中(λ,θ)-强截集记为 $A^s_{(\lambda,\theta)}$.

定理 1 (分解定理)[19] 设 A 为直觉模糊集,则对任意的 $\lambda, \theta \in [0,1]$,有

$$A = \bigcup_{\lambda,\theta \in [0,1]} (\lambda,\theta) A_{[\lambda,\theta]},\ A = \bigcup_{\lambda,\theta \in [0,1]} (\lambda,\theta) A^s_{(\lambda,\theta)}.$$

证明 参考文献[19],略.

定义 7[20] 设(U,R)为一个近似空间,R 是 U 上的一个等价关系,设 B 是一个直觉模糊集,则 B 关于(U,R)的一对上近似和下近似为:

$$\overline{R}(B) = \{< x, \sup_{y \in U} \mu_B(y), \inf_{y \in U} \nu_B(y) > \mid x \in U\},\ \underline{R}(B) = \{< x, \inf_{y \in U} \mu_B(y), \sup_{y \in U} \nu_B(y) > \mid x \in U\}.$$

若 $\overline{R}(B) = \underline{R}(B)$,则称 B 是直觉模糊集可定义的,否则 B 是直觉模糊粗糙集.

2　多粒度粗糙直觉模糊集的表示

定义 8[15]　设 $T=(U,AT,f)$ 为一信息系统或数据表，U 是非空有限论域，AT 是非空属性集合，$A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 AT 的 m 个属性子集，R_{A_i} 是关于属性集 AT 的一个等价关系，$[x]_{A_i}$ 是 R_{A_i} 确定的等价类，B 是 U 上的直觉模糊集，则对任意的 $B\subseteq U$，其关于 A_i 的乐观多粒度下近似集和上近似集分别定义为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)=\{<x,\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)}(x),\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)}(x)>\mid x\in U\},$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)=\{<x,\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)}(x),\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)}(x)>\mid x\in U\}.$$

其中，

$$\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)}(x)=\bigvee_{i=1}^{m}\inf_{y\in[x]_{A_i}}\mu_B(y),\ \nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)}(x)=\bigwedge_{i=1}^{m}\sup_{y\in[x]_{A_i}}\nu_B(y),$$

$$\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)}(x)=\bigwedge_{i=1}^{m}\sup_{y\in[x]_{A_i}}\mu_B(y),\ \nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)}(x)=\bigvee_{i=1}^{m}\inf_{y\in[x]_{A_i}}\nu_B(y).$$

若 $\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)\neq\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)$，称 B 是乐观多粒度粗糙直觉模糊集.

定义 9[15]　设 $T=(U,AT,f)$ 为一信息系统或数据表，U 是非空有限论域，AT 是非空属性集合，$A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 AT 的 m 个属性子集，R_{A_i} 是关于属性集 AT 的一个等价关系，$[x]_{A_i}$ 是 R_{A_i} 确定的等价类，B 是 U 上的直觉模糊集，则对任意的 $B\subseteq U$，其关于 A_i 的悲观多粒度下近似集和上近似集分别定义为：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)=\{<x,\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)}(x),\nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)}(x)>\mid x\in U\},$$

$$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)=\{<x,\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)}(x),\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)}(x)>\mid x\in U\}.$$

其中，

$$\mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)}(x)=\bigwedge_{i=1}^{m}\inf_{y\in[x]_{A_i}}\mu_B(y),\ \nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)}(x)=\bigvee_{i=1}^{m}\sup_{y\in[x]_{A_i}}\nu_B(y),$$

$$\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)}(x)=\bigvee_{i=1}^{m}\sup_{y\in[x]_{A_i}}\mu_B(y),\ \nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)}(x)=\bigwedge_{i=1}^{m}\inf_{y\in[x]_{A_i}}\nu_B(y).$$

若 $\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)\neq\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)$，称 B 是悲观多粒度粗糙直觉模糊集.

定理 2[15]　设 $T=(U,AT,f)$ 为一信息系统或数据表，其中 U 是论域，AT 是非空属性集合 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 AT 的 m 个属性子集，B 是论域 U 中的直觉模糊集，则乐观和悲观多粒度粗糙直觉模糊集有如下性质：

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)=\bigcup_{i=1}^{m}\underline{R_{A_i}}(B),\ \overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)=\bigcap_{i=1}^{m}\overline{R_{A_i}}(B),\ \underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)=\bigcap_{i=1}^{m}\underline{R_{A_i}}(B),\ \overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)=\bigcup_{i=1}^{m}\overline{R_{A_i}}(B).$$

证明　参考文献[15]，略.

定义 10　设 $T=(U,AT,f)$ 为一信息系统或数据表，U 是论域，AT 是非空属性集合，$A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 AT 的 m 个属性子集，B 是 U 上的直觉模糊集，R 为 U 上的一个等价关系. 则对任意 $\lambda,\theta\in[0,1]$，直觉模糊集 B 关于 A_i 的乐观和悲观多粒度上近似集和下近似集为：

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)=\bigcup_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\underline{R_{A_i}}B_{[\lambda,\theta]}(x)\Big)$，(2) $\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)=\bigcap_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\overline{R_{A_i}}B^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\Big)$，

(3) $\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)=\bigcap_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\underline{R_{A_i}}B_{[\lambda,\theta]}(x)\Big)$，(4) $\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)=\bigcup_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\overline{R_{A_i}}B^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\Big)$.

定理 3　设 $T=(U,AT,f)$ 为一信息系统或数据表，其中 U 是论域，AT 是非空属性集合，$A_1,A_2,\cdots,A_m$

是 AT 的 m 个属性子集,B 和 C 是 U 上的两个直觉模糊集,则对任意 $\lambda,\theta\in[0,1]$,直觉模糊集 B 关于 A_i 的乐观和悲观多粒度上近似集和下近似集有如下性质:

(1) $\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B\cup C)_{[\lambda,\theta]}(x)=\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B)_{[\lambda,\theta]}(x)\cup\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(C)_{[\lambda,\theta]}(x)$,

$\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B\cup C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)=\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\cup\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)$,

$\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B\cup C)_{[\lambda,\theta]}(x)=\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B)_{[\lambda,\theta]}(x)\cup\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(C)_{[\lambda,\theta]}(x)$,

$\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B\cup C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)=\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\cup\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)$;

(2) $\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B\cup C)_{[\lambda,\theta]}(x)\supseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B)_{[\lambda,\theta]}(x)\cup\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(C)_{[\lambda,\theta]}(x)$,

$\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B\cup C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\supseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}B}\Big)_{[\lambda,\theta]}(x)\cup\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(C)_{[\lambda,\theta]}(x)$,

$\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B\cup C)_{[\lambda,\theta]}(x)\supseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B)_{[\lambda,\theta]}(x)\cup\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(C)_{[\lambda,\theta]}(x)$,

$\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B\cup C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\supseteq\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\cup\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)$;

(3) $\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B\cap C)_{[\lambda,\theta]}(x)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B)_{[\lambda,\theta]}(x)\cap\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(C)_{[\lambda,\theta]}(x)$,

$\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B\cap C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\cap\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)$,

$\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B\cap C)_{[\lambda,\theta]}(x)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B)_{[\lambda,\theta]}(x)\cap\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(C)_{[\lambda,\theta]}(x)$,

$\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B\cap C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\subseteq\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\cap\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)$;

(4) $\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B\cap C)_{[\lambda,\theta]}(x)=\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B)_{[\lambda,\theta]}(x)\cap\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(C)_{[\lambda,\theta]}(x)$,

$\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B\cap C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)=\underline{\sum_{i=1}^{m}A^{O}_{i}}(B)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\cap\underline{\sum_{i=1}^{m}A^{O}_{i}}(C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)$,

$\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B\cap C)_{[\lambda,\theta]}(x)=\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B)_{[\lambda,\theta]}(x)\cap\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(C)_{[\lambda,\theta]}(x)$,

$\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B\cap C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)=\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(B)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\cap\underline{\sum_{i=1}^{m}R^{P}_{A_i}}(C)^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)$.

证明 4 组公式中,每一组仅证明第一个公式

(1) $\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B\cup C)_{[\lambda,\theta]}(x)=\{<x,\mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B\cup C)_{[\lambda,\theta]}}(x),\nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m}R^{O}_{A_i}}(B\cup C)_{[\lambda,\theta]}}(x)>\mid x\in U\}=$ $\{<x,\bigwedge_{i=1}^{m}\sup_{y\in[x]_{A_i}}(\mu_{B\cup C}(y)\geq\lambda),\bigvee_{i=1}^{m}\inf_{y\in[x]_{A_i}}(\nu_{B\cup C}(y)\leq\theta)>\mid x\in U\}=\{<x,$ $\max\{\bigwedge_{i=1}^{m}\sup_{y\in[x]_{A_i}}(\mu_B(y)\geq\lambda),\bigwedge_{i=1}^{m}\sup_{y\in[x]_{A_i}}(\mu_C(y)\geq\lambda)\},\min\{\bigvee_{i=1}^{m}\inf_{y\in[x]_{A_i}}(\nu_B(y)\leq$ $\theta),\bigvee_{i=1}^{m}\inf_{y\in[x]_{A_i}}(\nu_C(y)\leq\theta)\}>\mid x\in U\}=\{<x,\max\{\bigwedge_{i=1}^{m}\sup_{y\in[x]_{A_i}}(\mu_B(y)\geq$ $\lambda)\},\min\{\bigvee_{i=1}^{m}\inf_{y\in[x]_{A_i}}(\nu_B(y)\leq\theta)\}>\mid x\in U\}\cup\{<x,\max\{\bigwedge_{i=1}^{m}\sup_{y\in[x]_{A_i}}(\mu_C(y)\geq$

$\lambda)\}, \min\{\bigvee_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_C(y) \leq \theta)\} > \mid x \in U\} =$

$\overline{\sum_{i=1}^{m} R^O_{A_i}}(B)_{[\lambda,\theta]}(x) \cup \overline{\sum_{i=1}^{m} R^O_{A_i}}(C)_{[\lambda,\theta]}(x).$

(2) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R^O_{A_i}}(B)_{[\lambda,\theta]}(x) \cup \underline{\sum_{i=1}^{m} R^O_{A_i}}(C)_{[\lambda,\theta]}(x) = \{< x, \bigvee_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_B(y) \geq \lambda), \bigwedge_{i=1}^{m} \sup_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_B(y) \leq$

$\theta) > \mid x \in U\} \cup \{< x, \bigvee_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_C(y) \geq \lambda), \bigwedge_{i=1}^{m} \sup_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_C(y) \leq \theta) > \mid x \in U\} \subseteq$

$\{< x, \max\{\bigvee_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_B(y) \geq \lambda), \bigvee_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_C(y) \geq \lambda)\}, \min\{\bigwedge_{i=1}^{m} \sup_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_B(y) \leq$

$\theta), \bigwedge_{i=1}^{m} \sup_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_C(y) \leq \theta)\} > \mid x \in U\} = \{< x, \bigvee_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_{B\cup C}(y) \geq$

$\lambda), \bigwedge_{i=1}^{m} \sup_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_{B\cup C}(y) \leq \theta) > \mid x \in U\} = \underline{\sum_{i=1}^{m} R^O_{A_i}}(B \cup C)_{[\lambda,\theta]}(x).$

(3) $\overline{\sum_{i=1}^{m} R^P_{A_i}}(B \cap C)_{[\lambda,\theta]}(x) = \{< x, \mu_{\overline{\sum_{i=1}^{m} R^P_{A_i}}(B\cap C)_{[\lambda,\theta]}}(x), \nu_{\overline{\sum_{i=1}^{m} R^P_{A_i}}(B\cap C)_{[\lambda,\theta]}}(x) > \mid x \in U\} = \{< x,$

$\bigvee_{i=1}^{m} \sup_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_{B\cap C}(y) \geq \lambda), \bigwedge_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_{B\cap C}(y) \leq \theta) > \mid x \in U\} = \{< x,$

$\min\{\bigvee_{i=1}^{m} \sup_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_B(y) \geq \lambda), \bigvee_{i=1}^{m} \sup_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_C(y) \geq \lambda)\}, \max\{\bigwedge_{i=1}^{m} (\inf_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_B(y) \leq$

$\theta), \bigwedge_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_C(y) \leq \theta)\} > \mid x \in U\} \subseteq \{< x, \min\{\bigvee_{i=1}^{m} \sup_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_B(y) \geq$

$\lambda)\}, \max\{\bigwedge_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_B(y) \leq \theta)\} > \mid x \in U\} \cap \{< x, \min\{\bigvee_{i=1}^{m} \sup_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_C(y) \geq$

$\lambda)\}, \max\{\bigwedge_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_C(y) \leq \theta)\} > \mid x \in U\} = \overline{\sum_{i=1}^{m} R^P_{A_i}}(B)_{[\lambda,\theta]}(x) \cap \overline{\sum_{i=1}^{m} R^P_{A_i}}(C)_{[\lambda,\theta]}(x).$

(4) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R^P_{A_i}}(B \cap C)_{[\lambda,\theta]}(x) = \{< x, \mu_{\underline{\sum_{i=1}^{m} R^P_{A_i}}(B\cap C)_{[\lambda,\theta]}}(x), \nu_{\underline{\sum_{i=1}^{m} R^P_{A_i}}(B\cap C)_{[\lambda,\theta]}}(x) > \mid x \in U\} = \{< x,$

$\bigwedge_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_{B\cap C}(y) \geq \lambda), \bigvee_{i=1}^{m} \sup_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_{B\cap C}(y) \leq \theta) > \mid x \in U\} = \{< x, \min\{\bigwedge_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_B(y) \geq$

$\lambda), \bigwedge_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_C(y) \geq \lambda)\}, \max\{\bigvee_{i=1}^{m} (\sup_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_B(y) \leq \theta), \bigvee_{i=1}^{m} \sup_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_C(y) \leq$

$\theta)\} > \mid x \in U\} = \{< x, \bigwedge_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_B(y) \geq \lambda), \bigvee_{i=1}^{m} (\sup_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_B(y) \leq$

$\theta) > \mid x \in U\} \cap \{< x, \bigwedge_{i=1}^{m} \inf_{y\in[x]_{A_i}} (\mu_C(y) \geq \lambda), \bigvee_{i=1}^{m} \sup_{y\in[x]_{A_i}} (\nu_C(y) \leq$

$\theta) > \mid x \in U\} = \underline{\sum_{i=1}^{m} R^P_{A_i}}(B)_{[\lambda,\theta]}(x) \cap \underline{\sum_{i=1}^{m} R^P_{A_i}}(C)_{[\lambda,\theta]}(x)\ ).$

以上只证明了每组的一个性质，类似的可证明其它性质的正确性.

定理 4　设 $T=(U,AT,f)$ 为一信息系统或数据表，其中 U 是论域，AT 是非空属性集合，$A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 AT 的 m 个属性子集，B 是 U 上的直觉模糊集，R 为 U 上的一个等价关系. 则对任意 $\lambda,\theta \in [0,1]$，直觉模糊集 B 关于 A_i 的乐观多粒度上近似集和下近似集有以下性质：

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R^O_{A_i}}(B) = \bigcup_{i=1}^{m} (\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]} (\lambda,\theta)\, \underline{R_{A_i}} B_{[\lambda,\theta]}(x))$, (2) $\overline{\sum_{i=1}^{m} R^O_{A_i}}(B) \supseteq \bigcap_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]} (\lambda,\theta)\, \overline{R_{A_i}} B_{[\lambda,\theta]}(x)\right)$,

(3) $\underline{\sum_{i=1}^{m} R^O_{A_i}}(B) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]} (\lambda,\theta)\, \underline{R_{A_i}} B^s_{(\lambda,\theta)}(x)\right)$, (4) $\overline{\sum_{i=1}^{m} R^O_{A_i}}(B) = \bigcap_{i=1}^{m} \left(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]} (\lambda,\theta)\, \overline{R_{A_i}} B^s_{(\lambda,\theta)}(x)\right)$.

证明

(1) $\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\underline{R_{A_i}}B_{[\lambda,\theta]}(x)=\bigvee_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\{<y,\mu(y)\geq\lambda,\nu(y)\leq\theta>\mid\forall y\in[x]_{A_i}\}=$
$\bigvee_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\{<y,\inf(\mu(y)\geq\lambda),\sup(\nu(y)\leq\theta)>\mid y\in[x]_{A_i}\}=\{<y,$
$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\max\{\lambda,\inf(\mu(y)\geq\lambda)\},\ \bigwedge_{\theta\in[0,1]}\min\{\theta,\sup(\nu(y)\leq\theta)\}>\mid y\in$
$[x]_{A_i}\}=\{<y,\inf(\mu(y),\sup(\nu(y)>\mid y\in[x]_{A_i}\}=\underline{R_{A_i}}(B)$.

又因为 $\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)=\bigcup_{i=1}^{m}\underline{R_{A_i}}(B)$，所以，$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)=\bigcup_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\underline{R_{A_i}}B_{[\lambda,\theta]}(x)\Big)$.

(2) $\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\overline{R_{A_i}}B_{[\lambda,\theta]}(x)=\bigvee_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\{<y,\mu(y)\geq\lambda,\nu(y)\leq\theta>\mid\exists y\in[x]_{A_i}\}\subseteq$
$\bigvee_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\{<y,\sup(\mu(y)\geq\lambda),\inf(\nu(y)\leq\theta)>\mid y\in[x]_{A_i}\}=\{<y,$
$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\max\{\lambda,\sup(\mu(y)\geq\lambda)\},\ \bigwedge_{\theta\in[0,1]}\min\{\theta,\inf(\nu(y)\leq\theta)\}>\mid y\in$
$[x]_{A_i}\}=\{<y,\sup(\mu(y),\inf(\nu(y)>\mid y\in[x]_{A_i}\}=\overline{R_{A_i}}(B)$.

又因为 $\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)=\bigcap_{i=1}^{m}\overline{R_{A_i}}(B)$，所以，$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)\supseteq\bigcap_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\overline{R_{A_i}}B_{[\lambda,\theta]}(x)\Big)$.

(3) $\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\underline{R_{A_i}}B^{s}_{(\lambda,\theta)}=\bigvee_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\{<y,\mu(y)>\lambda,\nu(y)<\theta>\mid\forall y\in[x]_{A_i}\}\supseteq$
$\bigvee_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\{<y,\inf(\mu(y)>\lambda),\sup(\nu(y)<\theta)>\mid y\in[x]_{A_i}\}=\{<y,$
$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\max\{\lambda,\inf(\mu(y)>\lambda)\},\ \bigwedge_{\theta\in[0,1]}\min\{\theta,\sup(\nu(y)<\theta)\}>$
$\mid y\in[x]_{A_i}\}=\{<y,\inf(\mu(y),\sup(\nu(y)>\mid y\in[x]_{A_i}\}=\underline{R_{A_i}}(B)$.

又因为 $\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)=\bigcup_{i=1}^{m}\underline{R_{A_i}}(B)$，所以，$\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\underline{R_{A_i}}B^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\Big)$.

(4) $\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\overline{R_{A_i}}B^{s}_{(\lambda,\theta)}=\bigvee_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\{<y,\mu(y)>\lambda,\nu(y)<\theta>\mid\exists y\in[x]_{A_i}\}=$
$\bigvee_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\{<y,\sup(\mu(y)>\lambda),\inf(\nu(y)<\theta)>\mid y\in[x]_{A_i}\}=\{<y,$
$\bigvee_{\lambda\in[0,1]}\max\{\lambda,\sup(\mu(y)>\lambda)\},\ \bigwedge_{\theta\in[0,1]}\min\{\theta,\inf(\nu(y)<\theta)\}>\mid y\in$
$[x]_{A_i}\}=\{<y,\sup(\mu(y),\inf(\nu(y)>\mid y\in[x]_{A_i}\}=\overline{R_{A_i}}(B)$.

又因为 $\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)=\bigcap_{i=1}^{m}\overline{R_{A_i}}(B)$，所以，$\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{O}}(B)=\bigcap_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\overline{R_{A_i}}B^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\Big)$.

以上证明了乐观多粒度粗糙直觉模糊集的一些结论，对于悲观多粒度粗糙直觉模糊集也有相似的结论，见定理 5.

定理 5　设 $T=(U,AT,f)$ 为一信息系统或数据表，其中 U 是论域，AT 是非空属性集合，$A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 AT 的 m 个属性子集，B 是 U 上的直觉模糊集，R 为 U 上的一个等价关系. 则对任意 $\lambda,\theta\in[0,1]$，直觉模糊集 B 关于 A_i 的悲观多粒度上近似集和下近似集有以下性质：

(1) $\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)=\bigcap_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\underline{R_{A_i}}B_{[\lambda,\theta]}(x)\Big)$，(2) $\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)\supseteq\bigcup_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\overline{R_{A_i}}B_{[\lambda,\theta]}(x)\Big)$，

(3) $\underline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)\subseteq\bigcap_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\underline{R_{A_i}}B^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\Big)$，(4) $\overline{\sum_{i=1}^{m}R_{A_i}^{P}}(B)=\bigcup_{i=1}^{m}\Big(\bigcup_{\lambda,\theta\in[0,1]}(\lambda,\theta)\,\overline{R_{A_i}}B^{s}_{(\lambda,\theta)}(x)\Big)$.

证明　类似定理 4 证明，略.

3　一种新的直觉模糊集的相似性度量

定义 11[9]　设 A,B 是有限论域 U 中的两个直觉模糊集，定义映射 $M:IFS(U)\times IFS(U)\to[0,1]$，称 $M(A,B)$ 是直觉模糊集 A,B 之间的相似度，且 $M(A,B)$ 须满足以下条件. (1) 有界性：对于任意的直觉模糊集 A,B，有 $0\leq M(A,B)\leq 1$. (2) 对称性：对于任意的直觉模糊集 A,B，有 $M(A,B)=M(B,A)$. (3) 对于任意的直觉模糊集 A,B，有 $M(A,B)=1$，当且仅当 $A=B$ 且 $\pi_A(x)=\pi_B(x)=0$. (4) 对于任意的直觉模

糊集 A,B,C，若 $A\subseteq B\subseteq C$，则有 $M(A,C)\leq M(A,B)$，且 $M(A,C)\leq M(B,C)$.

定义 12　设在非空有限论域U中，有直觉模糊集 $A=\{<x_i,\mu_A(x_i),v_A(x_i)>|\ x_i\in U\}$ 和 $B=\{<x_i,\mu_B(x_i),v_B(x_i)>\ |\ x_i\in U\}$，其中直觉模糊集 A、B 中元素个数为 n 且 $1\leq i\leq n$，根据定义 11，给出了一种新的直觉模糊集 A,B 之间的相似度公式 $M(A,B)=1-\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\Big\{(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2+(\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i))^2+(\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i))^2+|\ S'_A(x_i)-S'_B(x_i)\ |+\frac{1}{2}(\pi_A(x_i)+\pi_B(x_i))\Big\}^{\frac{1}{2}}$.

容易证明该公式满足定义 11 的 4 个条件. 且该公式具有其特性，分析如下：其中 $S'_A(x_i)=\mu_A(x_i)-\nu_A(x_i)$ 这里称 $S'_A(x_i)$ 为 A 中元素 x_i 的核. 可以看出 $-1\leq S'_A(x_i)\leq 1$. $S'_A(x_i)$ 表示通过元素 x_i 的隶属度和非隶属度来对 x_i 元素是否属于集合 A 进行对比. $S'_A(x_i)>0$ 表示元素 x_i 倾向属于 A，$S'_A(x_i)=1$ 表示元素 x_i 一定属于 A，当 $S'_A(x_i)=0$ 表示元素 x_i 属于 A 和不属于 A 的程度相当，$S'_A(x_i)<0$ 表示元素 x_i 倾向不属于 A，$S'_A(x_i)=-1$ 表示元素 x_i 一定不属于 A.

公式 $M(A,B)$ 不仅考虑了隶属度与非隶属度对两个直觉模糊集 A 和 B 相似程度的影响，同时还考虑了其他因素对它们相似程度的影响. 本文首先考虑隶属度与非隶属度对两个直觉模集 A 和 B 相似程度的影响；其次考虑了犹豫度距离 $\sum_{i=1}^{n}(\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i))^2$ 对两个直觉模集 A 和 B 相似程度的影响，当两个犹豫度相差越小，则这两个直觉模糊集的相似性越大，当两个犹豫度相差越大，其相似性越小；然后考虑了两个直觉模集 A 和 B 的核间距离对它们相似程度的影响，是因为它们的核间距离越大，表示两个集合相似程度越小；最后当 $\mu_A(x_i)=\mu_B(x_i)=0,\nu_A(x_i)=\nu_B(x_i)=0$ 即 $\sum_{i=1}^{n}(\mu_A(x_i)-\mu_B(x_i))^2$，$\sum_{i=1}^{n}(\nu_A(x_i)-\nu_B(x_i))^2$，$\sum_{i=1}^{n}(\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i))^2$ 和 $\sum_{i=1}^{n}|\ S'_A(x_i)-S'_B(x_i)\ |$ 都等于 0 时，此时两直觉模糊集的不确定性最大，因此需要考虑犹豫度之和 $\sum_{i=1}^{n}(\pi_A(x_i)+\pi_B(x_i))$ 对两个直觉模糊集相似度的影响，所以，构造了上述公式 $M(A,B)$，来衡量两个直觉模糊集相似程度.

4　基于相似度的多粒度粗糙直觉模糊集上下近似

4.1　基于相似度的多粒度粗糙直觉模糊集上下近似的求解步骤

设理想状态集 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，数据采样集 $B=\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$（其中 A,B 为直觉模糊集），对直觉模糊集 A,B 中各元素对应进行相似度求解. 筛选符合条件的 B 中元素，并将这些元素组成的集合分别对应与 B 的截集与强截集进行求解，得出乐观与悲观多粒度粗糙直觉模糊集的上下近似. 其具体步骤如下.

步骤 1　设置阈值 λ,θ，求出数据采样集 B 的$[\lambda,\theta]$-截集和(λ,θ)-强截集；

步骤 2　根据定义 12 相似度公式 $M(A,B)$ 分别求出数据采样集 B 中各元素与理想状态集 A 中对应各元素的相似度；

步骤 3　设定阈值，选出步骤 2 中相似度大于等于该阈值的元素；

步骤 4　将步骤 3 中选出的各元素组成的集合分别对应与采集的数据集 B 的$[\lambda,\theta]$-截集与(λ,θ)-强截集，根据定义 10 中(2) 和(3) 式，求出乐观与悲观多粒度粗糙直觉模糊集的上下近似集.

步骤 5　利用乐观与悲观多粒度粗糙直觉模糊集的上下近似集，分析各个因素对决策结果的影响.

4.2　实例分析

例 1　在农业生产中，经常通过当年农作物的长势来估测当年该农作物的产量. 而小麦长势情况的好坏主要由以下 3 个条件属性来确定：光照(A_1)，水分(A_2)，温度(A_3). 现假设农业部在一块农田中不同区域采集的小麦生长条件数据集合如表 1 所示. 其中采集的小麦光照、水分、温度的数据集合分别用 B,B',B'' 表示，其表示形式为$(\mu(x),v(x))$，其中 $\mu(x)$ 为隶属度，$v(x)$ 为非隶属度. 在 10 个区域，专家给出了小麦长势评估：区域 $x_1,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10}$ 的小麦长势良好，区域 x_9 的小麦长势情况不是太好，而区域 x_2 的小麦长

势情况属于中间状态,还需要进一步对 x_2 进行评估.

设小麦理想长势的3个条件属性为 $A_1=<x,0.8,0.0>$,$A_2=<x,0.6,0.2>$,$A_3=<x,0.7,0.1>$.

设置 $\lambda=0.5$,$\theta=0.4$,则可得 B,B',B'' 的截集与强截集为

$$(B)_{[\lambda,\theta]}(x)=\{<x_1,0.5,0.1>,<x_2,0.6,0.2>,<x_3,0.7,0.1>,<x_4,0.8,0.0>,<x_5,0.8,0.2>,<x_6,0.7,0.2>,<x_{10},1.0,0.0>\};$$

$$(B)^s_{(\lambda,\theta)}(x)=\{<x_2,0.6,0.2>,<x_3,0.7,0.1>,<x_4,0.8,0.0>,<x_5,0.8,0.2>,<x_6,0.7,0.2>,<x_{10},1.0,0.0>\};$$

$$(B')_{[\lambda,\theta]}(x)=\{<x_1,0.6,0.0>,<x_2,0.5,0.1>,<x_3,0.6,0.2>,<x_4,0.9,0.1>,<x_5,0.7,0.2>,<x_6,0.8,0.1>,<x_{10},0.8,0.0>\};$$

$$(B')^s_{(\lambda,\theta)}(x)=\{<x_1,0.6,0.0>,<x_3,0.6,0.2>,<x_4,0.9,0.1>,<x_5,0.7,0.2>,<x_6,0.8,0.1>,<x_{10},0.8,0.0>\};$$

$$(B'')_{[\lambda,\theta]}(x)=\{<x_1,0.7,0.2>,<x_5,0.5,0.1>,<x_6,0.7,0.0>,<x_7,0.8,0.0>,<(x_8,0.6,0.2>\};$$

$$(B'')^s_{(\lambda,\theta)}(x)=\{<x_1,0.7,0.2>,<x_6,0.7,0.0>,<x_8,0.6,0.2>,<x_7,0.8,0.0>\}.$$

现设定当采集的小麦生长条件属性数据集 B,B',B'' 中元素对应与理想情况下小麦生长条件属性 A_1,A_2,A_3 中的相似度大于等于0.60时即可判定该小麦长势较好.根据定义12中相似度公式 $M(A,B)$,计算 B,B',B'' 中各元素对应与 A 中各元素的相似度.求得相似度结果如表2所示.

表1 采集的小麦生长条件数据

采集的样本小麦	生长条件属性		
	光照	水分	温度
x_1	(0.5,0.1)	(0.6,0.0)	(0.7,0.2)
x_2	(0.6,0.2)	(0.5,0.1)	(0.3,0.4)
x_3	(0.7,0.1)	(0.6,0.2)	(0.3,0.3)
x_4	(0.8,0.0)	(0.9,0.1)	(0.4,0.3)
x_5	(0.8,0.2)	(0.7,0.2)	(0.5,0.1)
x_6	(0.7,0.2)	(0.8,0.1)	(0.7,0.0)
x_7	(0.3,0.5)	(0.4,0.4)	(0.8,0.0)
x_8	(0.2,0.3)	(0.3,0.2)	(0.6,0.2)
x_9	(0.0,1.0)	(0.0,0.5)	(0.4,0.4)
x_{10}	(1.0,0.0)	(0.8,0.1)	(0.2,0.6)

表2 采集的数据与理想情况下的相似度

采集的样本小麦	生长条件相似度		
	光照	水分	温度
x_1	0.54	0.62	0.74
x_2	0.59	0.70	0.45
x_3	0.68	1.00	0.47
x_4	1.00	0.60	0.54
x_5	0.69	0.74	0.62
x_6	0.64	0.64	0.70
x_7	0.39	0.62	0.68
x_8	0.37	0.54	0.68
x_9	0.05	0.33	0.51
x_{10}	0.69	0.64	0.35

表2中各采集的小麦生长光照条件与理想情况下小麦光照条件的相似度 $M(A_1,x_i)\geq 0.60$ 的有$\{x_3,x_4,x_5,x_6,x_{10}\}$,水分条件相似度 $M(A_2,x_i)\geq 0.60$ 的有$\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_{10}\}$,温度条件相似度 $M(A_3,x_i)\geq 0.60$ 的有$\{x_1,x_5,x_6,x_7,x_8\}$,根据筛选出的小麦集合,结合 B,B',B'' 的截集和强截集对应求得这块农田中采集的小麦长势的乐观多粒度粗糙直觉模糊集的上近似和悲观多粒度下近似集合为

$$\underline{\sum_{i=1}^{m}R^P_{A_i}}(B)=\{x_1,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10}\},\quad \overline{\sum_{i=1}^{m}R^O_{A_i}}(B)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10}\}.$$

由此得出的结论通过计算得出小麦长势情况,通过所求结果可以看出区域 $x_1,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_{10}$ 的小麦长势更接近理想情况可判定长势良好,区域 x_2 的小麦生长情况需要进行进一步评估,并可得出区域 x_9 的小麦长势情况不是太好,需要进行相应的措施来改变小麦的生长情况,来保证小麦的长势.由此分析可看出,运用本文给出模型所得出的结果与给出的各个区域小麦长势情况基本相符,证明了结果的正确性.

该方法通过计算采集的小麦生长条件属性数据与理想条件下小麦长势较好的条件属性数据的相似度,并进行比较,运用直觉模糊集的截集及其分解定理求出了乐观多粒度上近似集和悲观多粒度下近似集合,从而对小麦长势进行评估.实例中所给出的阈值是通过具体问题具体分析所确定的,对于不同阈值的选取会对最终结果有一定的影响.

5 结 论

本文根据直觉模糊集的截集,利用直觉模糊集分解定理,建立了乐观和悲观多粒度粗糙直觉模糊集模

型，并给出了性质的证明. 定义了新的乐观和悲观多粒度粗糙直觉模糊集的上下近似集，证明了其一些性质. 同时提出了一个新的直觉模糊集相似度计算公式. 最后结合小麦长势情况，利用新的相似度计算公式和乐观和悲观多粒度粗糙直觉模糊集的上下近似集对小麦长势进行评估，同时也分析了相似度计算公式的特性. 下一步工作将对多粒度粗糙区间直觉模糊集的表示问题进行研究.

参 考 文 献

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] Atanassov K. Intuitionistic Fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] Guha D, Chakraborty D. A new similarity measure of intuitionistic fuzzy sets and its application to estimate the priority weights from intuitionistic preference relations[J]. Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets, 2012, 18(1): 37-47.

[4] Xu Z S. Some similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and their applications to multiple attribute decision making[J]. Fuzzy Optimization and Decision Making, 2007, 6(2): 109-121.

[5] Chaira T, Ray A K. A new measure using intuitionistic fuzzy set theory and its application to edge detection[J]. Applied Soft Computing, 2008, 8(2): 919-927.

[6] 欧阳春娟，李　斌，李　霞，等. 基于 Vague 集相似度量的图像隐写系统安全性测度[J]. 计算机学报，2012，35(7)：1510-1521.

[7] 薛占熬，程惠茹，黄海松，等. 模糊空间中的直觉模糊粗糙近似[J]. 计算机科学，2013，40(4)：221-226.

[8] 宋娟萍，杨　勇，朱英丽. 一种新的直觉模糊集相似度测量[J]. 计算机工程与科学，2015，37(4)：824-829.

[9] 全雪峰，常梦星. 直觉模糊集(数)间相似度量新方法[J]. 计算机工程与应用，2015，51(12)：208-212.

[10] Pawlak Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer and Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[11] Qian Y H, Liang J Y, Yao Y Y, et al. MGRS: A multi-granulation rough set[J]. Information Sciences, 2010, 180(6): 949-970.

[12] 张　明，唐振民，徐维艳，等. 可变多粒度粗糙集模型[J]. 模式识别与人工智能，2012，25(4)：709-720.

[13] 黄　婧，李进金. 最小描述的多粒度覆盖粗糙集模型[J]. 计算机工程与应用，2013，49(9)：134-149.

[14] 孙文鑫. 基于双论域的一般多粒度模糊粗糙集[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版)，2015，32(3)：12-15.

[15] Huang B, Guo C X, Zhuang Y L, et al. Intuitionistic fuzzy multi-granulation rough sets[J]. Information Sciences, 2014, 277: 299-320.

[16] Pawlak Z. Rough set. Theoretical aspects of reasoning about data[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

[17] Xu W H, Wang Q R. Multi-granulation fuzzy rough sets in a fuzzy tolerance approximation space[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2011, 13(4): 246-259.

[18] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Studies in Fuzziness & Soft Computing, 1986, 20(1): 87-96.

[19] 李　敏. 直觉模糊集的截集[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版)，2007，30：152-154.

[20] Zhou L, Wu W Z. On generalized intuitionistic fuzzy approximation operators[J]. Information Sciences, 2008, 178(11): 2448-2465.

Research on Multi-granularity Rough Intuitionistic Fuzzy Cut Sets

XUE Zhanao, WANG Nan, SI Xiaomeng, ZHU Tailong

(College of Computer and Information Engineering; Engineering Lab of Henan Province for Intelligence Business & Internet of Things, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: It has been a hot research topic about the combination of multi-granularity rough sets and intuitionistic fuzzy sets. In this paper, for the representation problem of multi-granularity rough intuitionistic fuzzy sets, the optimistic and pessimistic multi-granularity rough intuitionistic fuzzy sets model are structured with the decomposition theorems and the cut set theory of intuitionistic fuzzy sets, and the upper and lower approximation sets are defined on the optimistic and pessimistic multi-granularity rough intuitionistic fuzzy sets. Furthermore, some properties of multi-granularity rough intuitionistic fuzzy sets are proved. At the same time, a new similarity formula of intuitionistic fuzzy sets is proposed. Finally, we analyze and discuss the validity of the optimistic and pessimistic multi-granularity rough intuitionistic fuzzy model through the example of wheat growth evaluation.

Keywords: intuitionistic fuzzy sets; rough sets; multi-granularity; cut sets; similarity