

一类余拟三角 Hom-Hopf 代数

董丽红, 薛 栓

(河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

摘 要: 设 C 和 H 是 Hom-Hopf 代数, $\omega: C \otimes H \rightarrow H \otimes C$ 是一个线性映射. 首先介绍了 Hom- ω -smash 余积 Hom-Hopf 代数 $(C_\omega \bowtie H, \alpha \otimes \beta)$ 的相关概念; 然后研究 Hom-Hopf 代数 $(C_\omega \bowtie H, \alpha \otimes \beta)$ 上的余拟三角结构, 得到了其构成余拟三角 Hom-Hopf 代数的充要条件.

关键词: Hom-Hopf 代数; 余拟三角结构; Hom- ω -smash 余积

中图分类号: O153.3

文献标志码: A

Hopf 代数的拟三角结构和余拟三角结构是 Hopf 代数理论中的热点问题. 相关研究见文献[1-4]. 在文献[5]中, 作者讨论了 ω -smash 余积 Hopf 代数上的余拟三角结构, 给出了其构成余拟三角 Hopf 代数的充要条件. 而随着起源于代数形变理论的 Hom-结构(李代数, 代数, 余代数, Hopf 代数)的发展, Hopf 代数和量子群中诸多内容在 Hom-结构下已有许多相对成熟的重要推论, 基于此, 很自然的考虑什么情况下文献[5]中 ω -smash 余积 Hopf 代数在 Hom-意义下可以构成余拟三角 Hopf 代数, 给出了 Hom- ω -smash 余积 Hopf 代数构成余拟三角 Hom-Hopf 代数的充要条件. 本文的所有工作都在域 k 上进行的. 文中将使用 Sweedler 关于余代数余乘的记号 $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$, 以下省略 \sum .

1 预备知识

本节主要回顾 Hom-结构相关定义, Hom- ω -smash 余积成为 Hom-Hopf 代数的充要条件和一些例子.

定义 1^[6-9] 一个 Hom-结合代数是一个四元组 $(A, \mu, 1_A, \alpha)$ (简称 (A, α)), 其中 A 是一个线性空间, $\alpha: A \rightarrow A, \eta: k \rightarrow A, \mu: A \otimes A \rightarrow A, \mu(a \otimes a') = aa'$ 为线性映射, 使对所有 $a, a', a'' \in A$, 下列条件满足
(HA1) $\alpha(aa') = \alpha(a)\alpha(a'), \alpha(1_A) = 1_A$, 其中 $1_A = \eta(1_k)$;
(HA2) $\alpha(a)(a'a'') = (aa')\alpha(a''), a1_A = 1_A a = \alpha(a)$.

一个 Hom-余结合余代数是一个四元组 $(C, \Delta, \epsilon, \beta)$ (简称 (C, β)), 其中 C 是一个线性空间, $\beta: C \rightarrow C, \epsilon: C \rightarrow k, \Delta: C \rightarrow C \otimes C$ 为线性映射, 使对所有 $c \in C$, 下列条件满足

(HC1) $\Delta \circ \beta = (\beta \otimes \beta) \circ \Delta, \epsilon \circ \beta = \epsilon$;
(HC2) $\beta(c_1) \otimes c_2 \otimes c_2 = c_1 \otimes c_{12} \otimes \beta(c_2), \epsilon(c_1)c_2 = c_1\epsilon(c_2) = \beta(c)$.

一个 Hom-双代数是一个六元组 $(H, \mu, 1_H, \Delta, \epsilon, \gamma)$ (简称 (H, γ)), 其中 (H, γ) 是 Hom-代数, 也是 Hom-余代数, 使得线性映射 Δ, ϵ 是 Hom-代数同态, 即对任意 $h, g \in H$ 下列条件满足

$$\Delta(hh') = \Delta(h)\Delta(h'), \Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H, \epsilon(hh') = \epsilon(h)\epsilon(h'), \epsilon(1_H) = 1.$$

进一步, 一个对极是一个线性映射 $S: H \rightarrow H$, 如果满足下列条件

$$S(h_1)h_2 = h_1S(h_2) = \epsilon(h)1_H, S(\gamma(h)) = \gamma(S(h)).$$

收稿日期: 2016-07-28; 修回日期: 2016-10-23.

基金项目: 国家自然科学基金天元基金(11426095); 河南省基础与前沿技术研究计划(152300410086); 河南省教育厅科学技术研究重点项目(14B110003); 河南师范大学博士科研启动项目(qd14151).

第1作者简介(通信作者): 董丽红(1980-), 女, 河南安阳人, 河南师范大学副教授, 主要从事 Hopf 代数方面的研究, E-mail: dlh0373@163.com.

则一个带有对极的 Hom- 双代数称为 Hom-Hopf 代数, 且对任意的 $h, g \in H$, 满足:

$$S(hg) = S(g)S(h), S(1_H) = 1_H, \Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1), \varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h).$$

定义 2^[10] 设 (C, α) 和 (H, β) 是两个 Hom- 余代数, $\omega: C \otimes H \rightarrow H \otimes C$ (对任意 $c \in C, h \in H$, 记 $\omega(c \otimes h) = {}^{\omega}h \otimes {}^{\omega}c$) 是一个线性映射, 且满足 $\alpha({}^{\omega}c) \otimes \beta({}^{\omega}h) = {}^{\omega}\alpha(c) \otimes {}^{\omega}\beta(h)$.

定义 $C_{\omega} \bowtie H, C \otimes H$ 作为它的向量空间, 其上余乘和余单位分别为

$$\Delta_{C_{\omega} \bowtie H} = c_1 \otimes {}^{\omega}\beta^{-1}(h_1) \otimes \alpha^{-1}({}^{\omega}c_2) \otimes h_2, \varepsilon_{C_{\omega} \bowtie H}(c \otimes h) = \varepsilon_C(c)\varepsilon_H(h),$$

如果它是一个 Hom- 余代数, 则称 $(C \otimes H, \Delta_{C_{\omega} \bowtie H}, \varepsilon_{C_{\omega} \bowtie H}, \alpha \otimes \beta)$ 是一个 Hom- ω -smash 余积, 并简记为 $(C_{\omega} \bowtie H, \alpha \otimes \beta)$.

注记 1 该余积和文献[11]中定义的余积不同.

定理 1^[10] 若 $(C_{\omega} \bowtie H, \alpha \otimes \beta)$ 是一个 Hom- ω -smash 余积, 当且仅当下列条件成立(其中 $\bar{\omega} = \omega$):

$$\begin{aligned} \varepsilon_H({}^{\omega}h){}^{\omega}c &= \varepsilon_H(h)\alpha(c), \varepsilon_C({}^{\omega}c){}^{\omega}h = \varepsilon_C(c)\beta(h), \\ ({}^{\omega}h)_1 \otimes ({}^{\omega}h)_2 \otimes \alpha({}^{\omega}c) &= \beta({}^{\omega}\beta^{-1}(h_1)) \otimes {}^{\omega}h_2 \otimes {}^{\omega}({}^{\omega}c), \\ \beta({}^{\omega}h) \otimes ({}^{\omega}\alpha(c))_1 \otimes ({}^{\omega}\alpha(c))_2 &= {}^{\omega}({}^{\omega}h) \otimes {}^{\omega}(\alpha(c_1)) \otimes \alpha({}^{\omega}c_2). \end{aligned}$$

注记 2 若 (C, S_C, α) 和 (H, S_H, β) 是两个 Hom-Hopf 代数, 则 $C_{\omega} \bowtie H$ 是 Hom- ω -smash 余积 Hopf 代数当且仅当定理 1 中的 3 个条件成立, 且 ω 是代数同态, 其对极为

$$S_{C_{\omega} \bowtie H}(c \otimes h) = S_C(\alpha^{-2}({}^{\omega}\alpha(c))) \otimes S_H(\beta^{-1}({}^{\omega}h)).$$

例 1 (1) 设 $(C, \alpha), (H, \beta)$ 是两个 Hom-Hopf 代数, (C, α) 是左 H -Hom- 余模双代数^[12], 余模结构为 $\rho: C \rightarrow H \otimes C, \rho(c) = c_{-1} \otimes c_0$, 且满足 $hc_{-1} \otimes c_0 = c_{-1}h \otimes c_0$, 对任意的 $c \in C, h \in H$, 定义

$$\omega: C \otimes H \rightarrow H \otimes C, c \otimes h \mapsto c_{-1}h \otimes c_0,$$

则 $C_{\omega} \bowtie H$ 是一个 Hom-smash 余积 Hopf 代数.

(2) 设 (H, α, S) 是一个有限维 Hom-Hopf 代数, 其中 $\alpha^2 = I$, 设 h_i 是 H 的基, h_i^* 是 H 的对偶基, 对任意的 $x \in H^*, h \in H^{\omega}$, 定义

$$\omega: H^{\omega} \otimes H^* \rightarrow H^* \otimes H^{\omega}, h \otimes x \mapsto h_i^* (\alpha^*(x)\alpha^*(h_i^*)) \otimes (\alpha(h_i) \cdot \alpha(h)) \cdot S^{-1}(h_i),$$

这里“ \cdot ”是 H^{ω} 的乘法, 则 $H_{\omega}^{\omega} \bowtie H^*$ 是 Drinfeld double 的对偶 Hom-Hopf 代数 $D(H)^*$.

定义 3^[13] 设 (H, α) 是 Hom-Hopf 代数, $\sigma: H \otimes H \rightarrow k$ 是一个线性映射. 若对任意 $h, g, l \in H$, 满足以下条件:

$$\begin{aligned} (\sigma 1) \sigma(h, 1_H) &= \sigma(1_H, h) = \varepsilon(h), (\sigma 2) \sigma(hg, \alpha(l)) = \sigma(\alpha(h), l_1)\sigma(\alpha(g), l_2), \\ (\sigma 3) \sigma(\alpha(h), gl) &= \sigma(h_1, \alpha(l))\sigma(h_2, \alpha(g)), (\sigma 4) g_1 h_1 \sigma(h_2, g_2) = \sigma(h_1, g_1)h_2 g_2, \end{aligned}$$

则称 (H, α, σ) 是余拟三角 Hom-Hopf 代数.

定义 4 设 $(C, \alpha), (H, \beta)$ 是 Hom-Hopf 代数, $P: C \otimes H \rightarrow k$ 是一个线性映射. 若对任意 $a, b \in C, h, g \in H$, 满足以下条件:

$$\begin{aligned} (P1) P(a, 1_H) &= \varepsilon(a), P(1_C, h) = \varepsilon(h), \\ (P2) P(ab, \beta(h)) &= P(\alpha(a), h_1)P(\alpha(b), h_2), \\ (P3) P(\alpha(a), hg) &= P(a_1, \beta(h))P(a_2, \beta(g)), \end{aligned}$$

则称 (C, α, H, β, P) 是对偶相容 Hom-Hopf 代数.

定义 5 设 $(C, \alpha), (H, \beta)$ 是 Hom-Hopf 代数, $V: H \otimes C \rightarrow k$ 是一个线性映射. 若对任意 $a, b \in C, h, g \in H$, 满足以下条件:

$$\begin{aligned} (V1) V(h, 1_C) &= \varepsilon(h), V(1_H, a) = \varepsilon(a), \\ (V2) V(hg, \alpha(a)) &= V(\beta(g), a_1)V(\beta(h), a_2), \\ (V3) V(\beta(h), ab) &= V(h_1, \alpha(b))V(h_2, \alpha(a)), \end{aligned}$$

则称 (H, β, C, α, V) 是斜对偶相容 Hom-Hopf 代数.

定义 6 设 $(C, \alpha), (H, \beta)$ 是 Hom-Hopf 代数, $\omega: C \otimes H \rightarrow H \otimes C$ 是一个线性映射, (C, α, H, β, P) 是对偶相容 Hom-Hopf 代数, (H, β, C, α, V) 是斜对偶相容 Hom-Hopf 代数, $Q: C \otimes C \rightarrow k$ 是线性映射. 若对任意 $a, b, c \in C$, 满足以下条件:

$$(Q1) \quad Q(a, 1_C) = Q(1_C, a) = \varepsilon(a),$$

$$(Q2) \quad Q(ab, \alpha(c)) = P(a_2, \beta({}^\omega 1_H))Q(a_1, c_1)Q(\alpha(b), {}^\omega \alpha^{-1}(c_2)),$$

$$(Q3) \quad Q(\alpha(a), bc) = V(\beta({}^\omega 1_H), c_2)Q(a_1, c_1)Q({}^\omega \alpha^{-1}(a_2), \alpha(b)),$$

$$(Q4) \quad b_1 a_1 Q(a_2, b_2) = V(\beta({}^\omega 1_H), \alpha^{-1}(b_{22}))P(\alpha^{-1}(a_{21}), \beta({}^\omega 1_H))Q(a_1, b_1){}^\omega \alpha^{-2}(a_{22}){}^\omega \alpha^{-2}(b_{21}),$$

则称 (C, α, Q) 是弱余拟三角 Hom-Hopf 代数.

定义 7 设 $(C, \alpha), (H, \beta)$ 是 Hom-Hopf 代数, $\omega : C \otimes H \rightarrow H \otimes C$ 是线性映射. 若对任意 $h \in H, \omega$ 满足条件: ${}^\omega 1_C \otimes {}^\omega h = 1_C \otimes \beta(h)$, 则称 ω 是右正规的.

2 Hom- ω -smash 余积 Hopf 代数上的余拟三角结构

本节主要讨论 Hom- ω -smash 余积 Hopf 代数 $(C_\omega \bowtie H, \alpha \otimes \beta)$ 构成余拟三角 Hom-Hopf 代数的充要条件, 当 $\alpha \otimes \beta = I$ 时, 可得到文献[5]的定理 3.6.

引理 1 设 $(C_\omega \bowtie H, \alpha \otimes \beta, \sigma)$ 是余拟三角 Hom-Hopf 代数. 对任意 $a, b \in C, h, g \in H$, 定义映射

$$T : H \otimes H \rightarrow k, T(h, g) = \sigma(1_C \otimes h, 1_C \otimes g),$$

$$P : C \otimes H \rightarrow k, P(a, h) = \sigma(a \otimes 1_H, 1_C \otimes h),$$

$$V : H \otimes C \rightarrow k, V(h, b) = \sigma(1_C \otimes h, a \otimes 1_H),$$

$$Q : C \otimes C \rightarrow k, Q(a, b) = \sigma(a \otimes 1_H, b \otimes 1_H).$$

则有 (1) $T(h, 1_H) = T(1_H, h) = \varepsilon(h)$;

$$(2) \quad P(a, 1_H) = \varepsilon(a), P(1_C, h) = \varepsilon(h);$$

$$(3) \quad V(h, 1_C) = \varepsilon(h), V(1_H, a) = \varepsilon(a);$$

$$(4) \quad Q(a, 1_C) = Q(1_C, a) = \varepsilon(a).$$

引理 2 设 $(C_\omega \bowtie H, \Delta_{C_\omega \bowtie H}, \varepsilon_{C_\omega \bowtie H}, \alpha \otimes \beta)$ 是一个 Hom- ω -smash 余积 Hopf 代数, ω 是右正规的线性映射, 则对任意 $c \in C, h \in H$, 有

$$h\beta^{-1}({}^\omega 1_H) \otimes {}^\omega c = {}^\omega h \otimes {}^\omega c = \beta^{-1}({}^\omega 1_H)h \otimes {}^\omega c,$$

$$\beta({}^\omega h) \otimes ({}^\omega \alpha(c))_1 \otimes ({}^\omega \alpha(c))_2 = \beta^{-1}({}^\omega 1_H){}^\omega h \otimes {}^\omega \alpha(c_1) \otimes \alpha({}^\omega c_2),$$

$$\beta({}^\omega h) \otimes ({}^\omega \alpha(c))_1 \otimes ({}^\omega \alpha(c))_2 = {}^\omega h\beta^{-1}({}^\omega 1_H) \otimes {}^\omega \alpha(c_1) \otimes \alpha({}^\omega c_2).$$

证明 直接验证即可.

引理 3 设 $(C_\omega \bowtie H, \alpha \otimes \beta, \sigma)$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数. 则对任意 $a, b \in C, h, g \in H$, 有 $\sigma(\alpha(a) \otimes \beta(h), \alpha(b) \otimes \beta(g)) = T(h_1, g_1)P(a_2, g_2)V(h_2, b_2)Q(a_1, b_1)$.

证明 取 $\omega = \bar{\omega} = \tau, a \otimes h, b \otimes g \in C_\omega \bowtie H$, 因为 $C_\omega \bowtie H$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数, 故可得

$$(b_1 a_1 \otimes {}^\omega \beta^{-1}(g_1){}^\omega \beta^{-1}(h_1))\sigma(\alpha^{-1}({}^\omega a_2) \otimes h_2, \alpha^{-1}({}^\omega b_2) \otimes g_2) =$$

$$\sigma(a_1 \otimes {}^\omega \beta^{-1}(h_1), b_1 \otimes {}^\omega \beta^{-1}(g_1))(\alpha^{-1}({}^\omega a_2)\alpha^{-1}({}^\omega b_2) \otimes h_2 g_2)$$

令 $a = 1_C, g = 1_H$ 并用 $I \otimes \varepsilon$ 作用得 $\sigma(1_C \otimes \beta(h), a_1 \otimes {}^\omega 1_H){}^\omega a_2 = \alpha(a_1)V(\beta(h), a_2)$; 令 $b = 1_C, h = 1_H$ 并用 $I \otimes \varepsilon$ 作用得 $\sigma(a_1 \otimes {}^\omega 1_H, 1_C \otimes \beta(h)){}^\omega a_2 = \alpha(a_1)P(a_2, \beta(h))$.

因此有

$$\sigma(\alpha(a) \otimes \beta(h), \alpha(b) \otimes \beta(g)) = \sigma((1_C \otimes h)(a \otimes 1_H), \alpha(b) \otimes \beta(g)) = \sigma(1_C \otimes \beta(h), b_1 \otimes$$

$$\beta^{-1}({}^\omega 1_H)\beta^{-1}(g_1))\sigma(\alpha(a) \otimes 1_H, \alpha^{-1}({}^\omega b_2) \otimes g_2) = \sigma(1_C \otimes {}^\omega \beta^{-1}(h_1), 1_C \otimes$$

$$g_1)\sigma(\alpha^{-1}({}^\omega 1_C) \otimes h_2, b_1 \otimes \beta({}^\omega 1_H))\sigma(a_1 \otimes {}^\omega 1_H, 1_C \otimes g_2)\sigma(\alpha^{-1}({}^\omega a_2) \otimes 1_H, {}^\omega \alpha^{-1}(b_2) \otimes$$

$$1_H) = \sigma(1_C \otimes h_1, 1_C \otimes g_1)\sigma(1_C \otimes h_2, b_1 \otimes {}^\omega 1_H)\sigma(a_2 \otimes 1_H, 1_C \otimes g_2)\sigma(a_1 \otimes 1_H,$$

$$\alpha^{-1}({}^\omega b_2) \otimes 1_H) = \sigma(1_C \otimes h_1, 1_C \otimes g_1)\sigma(1_C \otimes h_2, b_2 \otimes 1_H)\sigma(a_2 \otimes 1_H, 1_C \otimes g_2)$$

$$\sigma(a_1 \otimes 1_H, b_1 \otimes 1_H) = T(h_1, g_1)P(a_2, g_2)V(h_2, b_2)Q(a_1, b_1).$$

命题 1 设 $(C_\omega \bowtie H, \Delta_{C_\omega \bowtie H}, \varepsilon_{C_\omega \bowtie H}, \alpha \otimes \beta, \sigma)$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数, 其中 $\sigma(\alpha(a) \otimes \beta(h), \alpha(b) \otimes \beta(g)) = T(h_1, g_1)P(a_2, g_2)V(h_2, b_2)Q(a_1, b_1)$, 则对任意 $a, b \in C, h, g \in H$, 有

(1) (H, T) 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数;

- (2) (C, H, P) 是一个对偶相容 Hom-Hopf 代数;
- (3) (H, C, V) 是一个斜对偶相容 Hom-Hopf 代数;
- (4) (C, Q) 是一个弱余拟三角 Hom-Hopf 代数;
- (5) T, P, V, Q 满足以下条件:
- (a) $\alpha(a_1)P(a_2, \beta(g)) = T({}^\omega 1_H, g_1)P(a_1, g_2){}^\omega a_2$,
- (b) $\beta(g_2)P(\alpha(a), g_1) = g_1\beta({}^\omega 1_H)P({}^\omega a, g_2)$,
- (c) $\alpha(a_1)V(\beta(g), a_2) = T(g_1, {}^\omega 1_H)V(g_2, a_1){}^\omega a_2$,
- (d) $\beta({}^\omega 1_H)g_1V(g_2, {}^\omega a) = V(g_1, \alpha(a))\beta(g_2)$,
- (e) $\beta({}^\omega 1_H)\beta({}^\omega 1_H)Q({}^\omega a, {}^\omega b) = Q(\alpha(a), \alpha(b))1_H$,
- (f) $V(\beta(g), b_2)Q(\alpha(a), b_1) = P(a_2, \beta({}^\omega 1_H))Q(a_1, b_1)V(\beta(g), {}^\omega \alpha^{-1}(b_2))$,
- (g) $T(\beta(g), h_1)P(\alpha(a), h_2) = T(\beta(g), h_2)P(\alpha(a), h_1)$,
- (h) $P(a_2, \beta(g))Q(a_1, \alpha(b)) = V(\beta({}^\omega 1_H), b_2)Q(a_1, b_1)P({}^\omega \alpha^{-1}(a_2), \beta(g))$,
- (i) $T(h_1, \beta(g))V(h_2, \alpha(a)) = T(h_2, \beta(g))V(h_1, \alpha(a))$.

证明 对任意 $a, b, c \in C, h, g, l \in H$, 由于 $C_\omega \bowtie H$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数, 可得:

$$T(\beta^{-1}(h_1 g_1), l_1)P(\alpha^{-1}(a_2 b_2), l_2)V(\beta^{-1}(h_2 g_2), c_2)Q(\alpha^{-1}(a_1 b_1), c_1) = T(h_1, \beta^{-1}({}^\omega \beta^{-1}(l_1))_1) \cdot P(a_2, \beta^{-1}({}^\omega \beta^{-1}(l_1))_2)V(h_2, \alpha^{-1}(c_{12}))Q(a_1, \alpha^{-1}(c_{11})) \cdot T(g_1, \beta^{-1}(l_{21}))P(b_2, \beta^{-1}(l_{22}))V(g_2, \alpha^{-2}({}^\omega c_2)_2)Q(b_1, \alpha^{-2}({}^\omega c_2)_1), \quad (1)$$

由于 σ 满足条件($\sigma 3$), 有:

$$T(h_1, \beta^{-1}(g_1 l_1))P(a_2, \beta^{-1}(g_2 l_2))V(h_2, \alpha^{-1}(b_2 c_2))Q(a_1, \alpha^{-1}(b_1 c_1)) = T(\beta^{-1}({}^\omega \beta^{-1}(h_1))_1, l_1)P(\alpha^{-1}(a_{12}), l_2)V(\beta^{-1}({}^\omega \beta^{-1}(h_1))_2, c_2)Q(\alpha^{-1}(a_1 1), c_1) \cdot T(\beta^{-1}(h_{21}), g_1)P(\alpha^{-2}({}^\omega a_2)_2, g_2)V(\beta^{-1}(h_{22}), b_2)Q(\alpha^{-2}({}^\omega a_2)_1, b_1), \quad (2)$$

由于 σ 满足条件($\sigma 4$), 有:

$$(b_1 a_1 \otimes {}^\omega \beta^{-1}(g_1){}^\omega \beta^{-1}(h_1))T(\beta^{-1}(h_{21}), \beta^{-1}(g_{21}))P(\alpha^{-2}({}^\omega a_2)_2, \beta^{-1}(g_{22})) \cdot V(\beta^{-1}(h_{22}), \alpha^{-2}({}^\omega b_2)_2)Q(\alpha^{-2}({}^\omega a_2)_1, \alpha^{-2}({}^\omega b_2)_1) = T({}^\omega \beta^{-2}(h_1))_1, ({}^\omega \beta^{-2}(g_1))_1 \cdot P(\alpha^{-1}(a_{12}), ({}^\omega \beta^{-2}(g_1))_2)V({}^\omega \beta^{-2}(h_1)_2, \alpha^{-1}(b_{12})) \cdot Q(\alpha^{-1}(a_{11}), \alpha^{-1}(b_{11}))({}^\omega \alpha^{-1}(a_2){}^\omega \alpha^{-1}(b_2) \otimes h_2 g_2). \quad (3)$$

在(1)式中令 $a = b = c = 1_C$, 有 $T(hg, \beta(l)) = T(\beta(h), l_1)T(\beta(g), l_2)$; 在(2)式中令 $a = b = c = 1_C$, 有 $T(\beta(h), gl) = T(h_1, \beta(l))T(h_2, \beta(g))$; 在(3)式中令 $a = b = 1_C$, 并用 $\varepsilon \otimes I$ 作用在两端, 有 $g_1 h_1 T(h_2, g_2) = T(h_1, g_1)h_2 g_2$; 由引理 1(1) 知 (H, T) 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数.

在(1)式中令 $c = 1_C, h = g = 1_H$, 有(P2) 成立; 在(2)式中令 $b = c = 1_C, h = 1_H$, 有(P3) 成立; 由引理 1(2) 知 (C, H, P) 是一个对偶相容 Hom-Hopf 代数.

在(1)式中令 $a = b = 1_C, l = 1_H$, 有(V2) 成立; 在(2)式中令 $a = 1_C, g = l = 1_H$, 有(V3) 成立; 由引理 1(3) 知 (H, C, V) 是一个斜对偶相容 Hom-Hopf 代数.

在(1)式中令 $h = g = l = 1_H$, 有(Q2) 成立; 在(2)式中令 $h = g = l = 1_H$, 有(Q3) 成立; 在(3)式中令 $h = g = 1_H$, 并用 $I \otimes \varepsilon$ 作用在两端, 有(Q4) 成立; 由引理 1(4) 知 (C, Q) 是一个弱余拟三角 Hom-Hopf 代数.

在(3)式中令 $b = 1_C, h = 1_H$, 并用 $I \otimes \varepsilon$ 和 $\varepsilon \otimes I$ 作用在两端, 有(a) 与(b) 成立; 令 $a = 1_C, g = 1_H$, 并用 $I \otimes \varepsilon$ 和 $\varepsilon \otimes I$ 作用在两端, 有(c) 与(d) 成立; 令 $h = g = 1_H$, 并用 $\varepsilon \otimes I$ 作用在两端, 有(e) 成立; 在(1)式中令 $b = 1_C, h = l = 1_H$, 有(f) 成立; 令 $b = c = 1_C, h = 1_H$, 有(g) 成立; 在(2)式中令 $b = 1_C, h = l = 1_H$, 有(h) 成立; 令 $a = b = 1_C, l = 1_H$, 有(i) 成立.

命题 2 设 $(C_\omega \bowtie H, \Delta_{C_\omega \bowtie H}, \varepsilon_{C_\omega \bowtie H}, \alpha \otimes \beta)$ 是一个 Hom- ω -smash 余积 Hopf 代数, 对任意 $a, b \in C, h, g \in H$, 若以下条件满足:

- (1) (H, T) 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数;
- (2) (C, H, P) 是一个对偶相容 Hom-Hopf 代数;
- (3) (H, C, V) 是一个斜对偶相容 Hom-Hopf 代数;

(4) (C, Q) 是一个弱余拟三角 Hom-Hopf 代数;

(5) T, P, V, Q 满足命题 1 中的 (a) – (i) 条件. 则 $(C_\omega \bowtie H, \alpha \otimes \beta, \sigma)$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数, 其中 $\sigma(\alpha(a) \otimes \beta(h), \alpha(b) \otimes \beta(g)) = T(h_1, g_1)P(a_2, g_2)V(h_2, b_2)Q(a_1, b_1)$.

证明 这里 $a, b, c \in C, h, g, l \in H, \omega = \bar{\omega} = \tau = \theta$, 由定义 $(\sigma 1), (P1), (V1), (Q1)$ 易知 σ 满足条件 $(\sigma 1)$, 下面验证 σ 满足条件 $(\sigma 2)$:

$$\begin{aligned} \sigma((a \otimes h)(b \otimes g), \alpha(c) \otimes \beta(l)) &= \sigma(ab \otimes hg, \alpha(c) \otimes \beta(l)) = T(\beta^{-1}(h_1 g_1), l_1)P(\alpha^{-1}(a_2 b_2), l_2) \cdot \\ &V(\beta^{-1}(h_2 g_2), c_2)Q(\alpha^{-1}(a_1 b_1), c_1) = T(h_1, \beta^{-1}(l_{11}))T(g_1, \beta^{-1}(l_{12}))P(a_2, \beta^{-1}(l_{21})) \cdot \\ &P(b_2, \beta^{-1}(l_{22}))V(g_2, \alpha^{-1}(c_{21}))V(h_2, \alpha^{-1}(c_{22}))Q(\alpha^{-1}(a_1 b_1), c_1) = T(h_1, \beta^{-1}(l_{11})) \cdot \\ &T(g_1, \beta^{-2}(l_{122}))P(a_2, \beta^{-2}(l_{121}))P(b_2, l_2)P(\alpha^{-1}(a_{12}), (\omega 1_H)_1)P(\alpha^{-1}(b_{12}), (\omega 1_H)_2) \cdot \\ &Q(\alpha^{-2}(a_{11} b_{11}), \alpha^{-1}(c_{11}))V(g_2, \omega \alpha^{-2}(c_{12}))V(h_2, c_2) = T(h_1, \beta^{-1}(l_{11}))T(g_1, \beta^{-2}(l_{122})) \cdot \\ &P(a_2, \beta^{-2}(l_{121}))P(b_2, l_2)P(\alpha^{-1}(b_{12}), \tau 1_H)Q(\alpha^{-1}(a_{11}), \alpha^{-2}(c_{11}))Q(\alpha^{-1}(b_{11}), \\ &\omega \alpha^{-3}(c_{112}))P(\alpha^{-1}(a_{12}), (\omega 1_H)(\omega 1_H))V(g_2, \alpha^{-1}(\tau(\omega \alpha^{-2}(c_{12}))))V(h_2, c_2) = T(h_1, \\ &\beta^{-1}(l_{11}))T(g_1, \beta^{-2}(l_{122}))P(a_2, \beta^{-2}(l_{121}))P(b_2, l_2)P(\alpha^{-1}(b_{12}), \omega 1_H)Q(\alpha^{-1}(a_{11}), \\ &\alpha^{-1}(c_{11}))Q(\alpha^{-1}(b_{11}), \alpha^{-1}((\omega \alpha^{-2}(c_{12}))_1)))P(\alpha^{-1}(a_{12}), \beta(\omega 1_H))V(g_2, \\ &\alpha^{-1}(\omega(\alpha^{-1}(\omega \alpha^{-2}(c_{12}))_2))V(h_2, c_2) = T(h_1, \beta^{-2}((\omega l_1)_1))T(g_1, \beta^{-1}(l_{21})) \cdot \\ &P(a_2, \beta^{-2}((\omega l_1)_2))P(b_2, \beta^{-1}(l_{22}))Q(a_1, \alpha^{-1}(c_{11}))V(g_2, \alpha^{-3}(\omega \alpha(c_2))_2)Q(b_1, \\ &\alpha^{-3}(\omega \alpha(c_2))_1)V(h_2, \alpha^{-1}(c_{21})) = \sigma(\alpha(a) \otimes \beta(h), c_1 \otimes \omega \beta^{-1}(l_1))\sigma(\alpha(b) \otimes \beta(g), \alpha^{-1}(\omega c_2) \otimes l_2). \end{aligned}$$

同理可验证 σ 满足条件 $(\sigma 3)$. 下面验证 σ 满足条件 $(\sigma 4)$:

$$\begin{aligned} (b \otimes g)_1(\alpha \otimes h)_1 \sigma((a \otimes h)_2, (b \otimes g)_2) &= (b_1 a_1 \otimes \omega \beta^{-1}(g_1) \omega \beta^{-1}(h_1))\sigma(\alpha^{-1}(\omega a_2) \otimes h_2, \\ &\alpha^{-1}(\omega b_2) \otimes g_2) = (b_1 a_1 \otimes \omega \beta^{-1}(g_1) \omega \beta^{-1}(h_1))T(\beta^{-1}(h_{21}), \beta^{-1}(g_{21}))P(\alpha^{-2}(\omega a_2)_2, \\ &\beta^{-1}(g_{22}))V(\beta^{-1}(h_{22}), \alpha^{-2}(\omega b_2)_2)Q(\alpha^{-2}(\omega a_2)_1, \alpha^{-2}(\omega b_2)_1) = (b_1 a_1 \otimes \\ &\beta^{-2}((\tau g_1 \beta^{-1}(\theta 1_H))(\beta^{-1}(\omega 1_H) \omega h_1)))T(\beta^{-1}(h_{21}), \beta^{-1}(g_{21})) \cdot \\ &P(\alpha^{-2}(\omega a_{22}), \beta^{-1}(g_{22}))V(\beta^{-1}(h_{22}), \alpha^{-2}(\omega b_{22}))Q(\alpha^{-3}(\omega a_{21}))_1, \\ &\alpha^{-3}(\omega a_{21})) = (b_1 a_1 \otimes \beta^{-1}((\beta^{-1}(\omega 1_H) g_1)(h_1 \beta^{-1}(\omega 1_H))))T(\beta^{-1}(h_{21}), \\ &\beta^{-1}(g_{21}))P(\alpha^{-2}(\omega a_{22}), \beta^{-1}(g_{22}))V(\beta^{-1}(h_{22}), \alpha^{-2}(\omega b_{22}))Q(\alpha^{-1}(a_{21}), \alpha^{-1}(b_{21})) = \\ &(b_1 a_1 \otimes \beta^{-2}((\omega 1_H h_{21})(g_{21} \beta^{-1}(\omega 1_H))))T(h_1, g_1)P(\alpha^{-2}(a_{22}), \beta^{-1}(g_{22}))V(\beta^{-1}(h_{22}), \\ &\alpha^{-2}(\omega b_{22}))Q(\alpha^{-1}(a_{21}), \alpha^{-1}(b_{21})) = (\omega \alpha^{-3}(a_{221}) \omega \alpha^{-2}(b_{21})) \otimes \beta^{-1}(h_{22} g_{22}) \cdot \\ &T(h_1, g_1)P(\alpha^{-2}(a_{222}), \beta^{-1}(g_{21}))V(\beta^{-1}(h_{21}), \alpha^{-2}(b_{222}))Q(a_1, b_1)V(\beta(\omega 1_H), \alpha^{-2}(b_{221})) \cdot \\ &P(\alpha^{-1}(a_{21}), \beta(\omega 1_H)) = (\alpha^{-2}(\omega(\omega \alpha^{-2}(a_{222})))\tau \alpha^{-2}(b_{21})) \otimes \beta^{-1}(h_{22} g_2)T(h_1, \\ &\beta^{-2}(g_{111}))T(\omega 1_H, \beta^{-2}(g_{112}))P(\alpha^{-2}(a_{221}), \beta^{-1}(g_{12}))V(\beta^{-2}(h_{21}) \beta^{-2}(\omega 1_H), \\ &\alpha^{-1}(b_{22}))Q(a_1, b_1)P(\alpha^{-1}(a_{21}), \beta(\tau 1_H)) = (\alpha^{-1}(\omega \alpha^{-1}(a_{22})) \omega \alpha^{-2}(\tau \alpha^{-1}(b_{22})) \otimes \\ &h_2 g_2)T(\beta^{-2}(h_{11}) \beta^{-2}(\omega 1_H)_1, \beta^{-1}(\tau 1_H) \beta^{-2}(g_{11}))P(\alpha^{-2}(a_{212}), \beta^{-1}(g_{12})) \cdot V \\ &(\beta^{-2}(h_{12}) \beta^{-2}(\omega 1_H)_2, \alpha^{-1}(b_{21}))Q(a_1, b_1)P(\alpha^{-2}(a_{211}), \beta(\omega 1_H)) = (\alpha^{-1}(\omega \alpha^{-1}(a_{22})) \cdot \\ &\alpha^{-1}(\omega \alpha^{-1}(b_{22})) \otimes h_2 g_2)T(\beta^{-2}(h_{11}) \beta^{-2}(\omega 1_H)_1, \beta^{-2}(\omega 1_H)_1 \beta^{-2}(g_{11})) \cdot \\ &P(\alpha^{-1}(a_{21}), \beta^{-2}(\omega 1_H)_2 \beta^{-2}(g_{12}))V(\beta^{-2}(h_{12}) \beta^{-2}(\omega 1_H)_2, \alpha^{-1}(b_{21}))Q(a_1, b_1) = \sigma(a_1 \otimes \\ &\omega \beta^{-1}(h_1), b_1 \otimes \omega \beta^{-1}(g_1))(\alpha^{-1}(\omega a_2) \alpha^{-1}(\omega b_2) \otimes h_2 g_2) = \sigma((a \otimes h)_1, (b \otimes g)_1)(a \otimes h)_2 (b \otimes g)_2, \end{aligned}$$

故 σ 满足条件 $(\sigma 4)$, 因此 $(C_\omega \bowtie H, \alpha \otimes \beta, \sigma)$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数.

于是得到本节的主要结论:

定理 2 设 $(C_\omega \bowtie H, \Delta_{C_\omega \bowtie H}, \varepsilon_{C_\omega \bowtie H}, \alpha \otimes \beta)$ 是一个 Hom- ω -smash 余积 Hopf 代数, 对任意 $a, b \in C, h, g \in H, (C_\omega \bowtie H, \alpha \otimes \beta, \sigma)$ 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数当且仅当以下条件成立:

- (1) (H, T) 是一个余拟三角 Hom-Hopf 代数;
- (2) (C, H, P) 是一个对偶相容 Hom-Hopf 代数;
- (3) (H, C, V) 是一个斜对偶相容 Hom-Hopf 代数;

(4) (C, Q) 是一个弱余拟三角 Hom-Hopf 代数;

(5) T, P, V, Q 满足命题 1 中的(a) – (i) 条件;

其中 $\sigma(\alpha(a) \otimes \beta(h), \alpha(b) \otimes \beta(g)) = T(h_1, g_1)P(a_2, g_2)V(h_2, b_2)Q(a_1, b_1)$.

特别的,若 C, H 是 Hopf 代数,可得文献[1] 中的定理.

推论 1^[1] 设 $(C_\omega \bowtie H, \Delta_{C_\omega \bowtie H}, \epsilon_{C_\omega \bowtie H})$ 是 ω -smash 余积 Hopf 代数,对 $\forall a, b \in C, h, g \in H, (C_\omega \bowtie H, \sigma)$ 是一个余拟三角 Hopf 代数当且仅当以下条件成立: (H, T) 是一个余拟三角 Hopf 代数, (C, H, P) 是一个对偶相容 P-Hopf 代数, (H, C, V) 是一个斜对偶相容 V-Hopf 代数, (C, Q) 是一个 (P, V, ω) -弱余拟三角 Hopf 代数,并且对 T, P, V, Q 满足以下条件:

- (a) $a_1 P(a_2, g) = T({}^\omega 1_H, g_1)P(a_1, g_2){}^\omega a_2$,
- (b) $g_2 P(a, g_1) = g_1^{\omega} 1_H P({}^\omega a, g_2)$,
- (c) $a_1 V(g, a_2) = T(g_1, {}^\omega 1_H)V(g_2, a_1){}^\omega a_2$,
- (d) ${}^\omega 1_H g_1 V(g_2, {}^\omega a) = V(g_1, a)g_2$,
- (e) ${}^\omega 1_H {}^\omega 1_H Q({}^\omega a, {}^\omega b) = Q(a, b)1_H$,
- (f) $V(g, b_2)Q(a, b_1) = P(a_2, {}^\omega 1_H)Q(a_1, b_1)V(g, {}^\omega b_2)$,
- (g) $T(g, h_1)P(a, h_2) = T(g, h_2)P(a, h_1)$,
- (h) $P(a_2, g)Q(a_1, b) = V({}^\omega 1_H, b_2)Q(a_1, b_1)P({}^\omega a_2, g)$,
- (i) $T(h_1, g)V(h_2, a) = T(h_2, g)V(h_1, a)$,

其中 $\sigma(a \otimes h, b \otimes g) = T(h_1, g_1)P(a_2, g_2)V(h_2, b_2)Q(a_1, b_1)$.

参考文献

- [1] 焦争鸣, 郭敏, 夏正亮. Hom-T-smash 积 Hom-Hopf 代数上的拟三角结构[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2015, 43(1): 1-7.
- [2] 马天水, 李海英. Hopf 交叉积上的余拟三角结构[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2012, 40(2): 22-25.
- [3] 马天水, 景俊霞, 景艳艳. 一类交叉双积[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2014, 42(2): 16-20.
- [4] Ma T S, Li H Y, Yang T. Cobraided smash product Hom-Hopf algebras[J]. Colloq Math, 2014, 134(1): 75-92.
- [5] Jiao Z, Wisbauer R. The braided structures for ω -smash coproduct Hopf algebras[J]. J Algebra, 2005, 287(2): 474-495.
- [6] Yau D. Module Hom-algebras[EB/OL]. [2015-07-16]. <http://arxiv.org/abs/0812.4695>.
- [7] Yau D. Hom-quantum groups III: Representations and module Hom-algebras[EB/OL]. [2015-07-16]. <http://arxiv.org/abs/0911.5402>.
- [8] Makhlof A, Silvestrov S. Hom-algebras and Hom-coalgebras[J]. J Algebra Appl, 2010, 9(4): 553-589.
- [9] Makhlof A, Silvestrov S. Hom-Lie admissible Hom-coalgebras and Hom-Hopf algebras[M]. Berlin: Springer Verlag, 2009.
- [10] Caenepeel S, Goyvaerts I. Monoidal Hom-Hopf Algebras[J]. Comm Algebra, 2011, 39(6): 2216-2240.
- [11] Li, H Y, Ma, T S. A construction of the Hom-Yetter-Drinfeld category[J]. Colloq Math, 2014, 137(1): 43-65.
- [12] Zheng N F. The braided structures over Hom- ω -smash coproduct Hopf algebras[J]. Acta Math Sci Ser A, 2013, 33(6): 1068-1088.
- [13] Yau D. Hom-bialgebras and comodule Hom-algebras[J]. Int Electron J Algebra, 2010, 8: 45-64.
- [14] Yau D. Hom-quantum groups II: Cobraided Hom-bialgebras and Hom-quantum geometry[EB/OL]. [2015-07-16]. <http://arxiv.org/abs/0907.1880>.

A Class of Coquasitriangular Hom-Hopf Algebras

DONG Lihong, XUE Shuan

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xingxiang 453007, China)

Abstract: In this paper, let C and H be two Hom-Hopf algebras, and $\omega: C \otimes H \rightarrow H \otimes C$ a linear map. We first introduce some basic definitions about Hom- ω -smash coproduct Hom-Hopf algebra $(C_\omega \bowtie H, \alpha \otimes \beta)$; then we discuss the coquasitriangular structures for Hom- ω -smash coproduct Hopf algebras, and obtain the necessary and sufficient conditions for it to be coquasitriangular Hom-Hopf algebras.

Keywords: Hom-Hopf algebra; coquasitriangular structures; Hom- ω -smash coproduct