

\mathbf{R}^n 中具有 3 个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面

姬 秀,胡传峰

(长江大学 文理学院,湖北 荆州 434000)

摘 要:若超曲面的 Laguerre 形式为零且 Laguerre 第二基本形式的特征值(称为 Laguerre 主曲率)为常数,则称超曲面为 Laguerre 等参超曲面.对 \mathbf{R}^n 中具有 3 个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面进行了研究,得到了相应的分类定理.

关键词:Laguerre 度量; Laguerre 形式; Laguerre 等参超曲面; Laguerre 张量; Laguerre 第二基本形式

中图分类号: O174.2

文献标志码: A

文献[1]研究了 \mathbf{R}^3 上曲面的 Laguerre 几何,接着文献[2]建立了 \mathbf{R}^n 上超曲面的 Laguerre 微分几何框架,近年来,对 Laguerre 几何的研究已取得了较大进展^[3-6].在 Laguerre 微分几何中研究 Laguerre 等参超曲面是一重要的研究课题,目前已有结果见文献[7-11].本文研究 \mathbf{R}^n 中具有 3 个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面.

为了得到主要定理,我们需要下面的引理

引理 1^[3] 设 $x:M \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是主曲率非零的无脐超曲面,若 Laguerre 第二基本形式平行,则 x Laguerre 等价于下列超曲面的开部分之一.

- (1) 超曲面 $x:S^{k-1} \times H^{n-k} \rightarrow \mathbf{R}^n$ (见例 1);
 - (2) 超曲面 $x:\mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}_0^n$ 在 τ 下的像(见例 2).
- Laguerre 嵌入 $\tau:UR_0^n \rightarrow UR^n$ 的定义见文献[3].

引理 2^[4] 设 $x:M \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是主曲率非零且具有常 Laguerre 特征值的无脐超曲面,若 x 的 Laguerre 形式为零且 x 不是 Laguerre 迷向超曲面,则 x Laguerre 等价于下列超曲面的开部分之一.

- (1) 超曲面 $x:S^k - 1 \times H^{n-k} \rightarrow \mathbf{R}^n$ (见例 1);
- (2) 超曲面 $x = \left(-\frac{w}{\xi_1}f, v - \frac{w_1}{\xi_0}\right); S^m(1) \times M^{n-m-1} \rightarrow \mathbf{R}^n$ (见例 3).

例 1 超曲面 $x:S^{k-1} \times H^{n-k} \rightarrow \mathbf{R}^n$,其中 $x(u, v, w) = \left(\frac{u}{w}(1+w), \frac{v}{w}\right)$,这里 $(v, w):H^{n-k} \rightarrow \mathbf{R}^{n-k+1}$ 是截曲率为 -1 的 $(n-k)$ -维双曲空间到 $(n-k+1)$ -维罗伦兹空间 \mathbf{R}_1^{n-k+1} 的标准嵌入.

文献[3]已证明超曲面 x 是具有两个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面且第二基本形式平行.

例 2 超曲面 $x:\mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}_0^n$ 在 τ 下的像,其中

$$x(u_1, u_2, \dots, u_t) = \left(\frac{\mu_1 |u_1|^2 + \mu_2 |u_2|^2 + \dots + \mu_t |u_t|^2}{2}, u_1, u_2, \dots, u_t, \frac{\mu_1 |u_1|^2 + \mu_2 |u_2|^2 + \dots + \mu_t |u_t|^2}{2} \right)$$

$(u_1, u_2, \dots, u_t) \in \mathbf{R}_1^k \times \mathbf{R}_2^k \times \dots \times \mathbf{R}_t^k = \mathbf{R}^{n-1}$, $|u_i|^2 = u_i \cdot u_i$, $i = 1, \dots, t, \mu_1, \dots, \mu_t$ 是非零常数.

文献[3]已证明超曲面 x 是具有 t 个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面且第二基本形式平行.

例 3 设 $y = (v, w):M^{n-m-1} \rightarrow \mathbf{R}_1^{n-m}$ 是具有非零主曲率的无脐类空可定向超曲面, $\xi = (\xi_0, \xi_1):M^{n-m-1} \rightarrow$

\mathbf{R}_1^{n-m} 是单位法场, 其中 $v, \xi_0 \in \mathbf{R}^{n-m-1}, \omega, \xi_1 \in \mathbf{R}, \xi_0 \cdot \xi_0 - \xi_1^2 = -1$. y 有常平均曲率半径

$$r = \frac{1}{n-m-1} \sum_i \frac{1}{k_i} = \frac{1}{n-m-1} \sum_i r_i = \text{constant}, \rho = \sum_i (r - r_i)^2 = \text{constant},$$

其中 k_i 是 y 的主曲率.

设 $f: S^m(1) \rightarrow \mathbf{R}^{m+1}$ 是古典嵌入. 定义超曲面如下

$$x = \left(-\frac{\omega}{\xi_1} f, v - \frac{\omega}{\xi_1} \xi_0 \right): S^m(1) \times M^{n-m-1} \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

文献[4]已证明超曲面 x 有常 Laguerre 特征值及零 Laguerre 形式, 且 x 是具有两个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面.

本文我们证明了下面的主要定理:

定理 1 设 $x: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是主曲率非零的无脐超曲面, 若 x 是具有 3 个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面, 则 x Laguerre 等价于超曲面 $x: \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}_0^n$ 在 τ 下的像, 其中

$$x(u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{\mu_1 |u_1|^2 + \mu_2 |u_2|^2 + \mu_3 |u_3|^2}{2}, u_1, u_2, u_3, \frac{\mu_1 |u_1|^2 + \mu_2 |u_2|^2 + \mu_3 |u_3|^2}{2} \right),$$

$(u_1, u_2, u_3) \in \mathbf{R}_1^k \times \mathbf{R}_2^k \times \mathbf{R}_3^k = \mathbf{R}^{n-1}, |u_i|^2 = u_i \cdot u_i, i = 1, 2, 3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ 是非零常数.

1 预备知识

设 $x: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是主曲率非零的无脐超曲面, 在 Laguerre 变换群下 x 的 4 个基本不变量是: Laguerre 度量 $g = \langle dY, dY \rangle$; Laguerre 第二基本形式 $B = \sum_{i,j} B_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$; Laguerre 张量 $L = \sum_{i,j} L_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$; Laguerre 形式 $C = \sum_i C_i \omega_i$. 更详细的内容参考文献[2].

L_{ij}, B_{ij} 及 C_i 的共变导数定义为

$$\sum_k L_{ij,k} \omega_k = dL_{ij} + \sum_k (L_{ik} \omega_{kj} + L_{kj} \omega_{ki}). \quad (1)$$

$$\sum_k B_{ij,k} \omega_k = dB_{ij} + \sum_k (B_{ik} \omega_{kj} + B_{kj} \omega_{ki}). \quad (2)$$

$$\sum_j C_{i,j} \omega_j = dC_i + \sum_j C_j \omega_{ji}. \quad (3)$$

B_{ij} 的第二共变导数定义为

$$\sum_l B_{ij,kl} \omega_l = dB_{ij,k} + \sum_l (B_{ij,k} \omega_{il} + B_{il,k} \omega_{lj} + B_{ij,l} \omega_{lk}). \quad (4)$$

微分(2)可得 Ricci 恒等式

$$B_{ij,kl} - B_{ij,lk} = \sum_m (B_{mj} R_{mikl} + B_{im} R_{mjkl}). \quad (5)$$

结构方程可积条件为

$$L_{ij,k} = L_{ik,j}, \quad (6)$$

$$C_{i,j} - C_{j,i} = \sum_k (B_{ik} L_{kj} - L_{ik} B_{kj}), \quad (7)$$

$$B_{ij,k} - B_{ik,j} = C_j \delta_{ik} - C_k \delta_{ij}, \quad (8)$$

$$R_{ijkl} = L_{jk} \delta_{il} + L_{il} \delta_{jk} - L_{ik} \delta_{jl} - L_{jl} \delta_{ik}, \quad (9)$$

$$\sum_{i,j} B_{ij}^2 = 1, \sum_i B_{ii} = 0, \sum_i B_{ij,i} = (n-2)C_j. \quad (10)$$

2 定理 1 的证明

设 $x: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是具有 3 个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面, 主曲率 B_1, B_2, B_3 的重数分别为 m_1, m_2, m_3 . 不失一般性可设 $m_1 \geq m_2 \geq m_3$. 由 Laguerre 形式 $C = 0$, 可取局部正交标架场 $\{E_i \mid 1 \leq i \leq n-1\}$ 使得

$$B_{ij} = b_i \delta_{ij}, L_{ij} = L_i \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n-1, \quad (11)$$

其中 $\{b_i\}$ 均为常数. 由假设可令

$$b_1 = \dots = b_{m_1} = B_1, b_{m_1+1} = \dots = b_{m_1+m_2} = B_2, b_{m_1+m_2+1} = \dots = b_{n-1} = B_3. \quad (12)$$

由(10)得

$$m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3 = 0, m_1 B_1^2 + m_2 B_2^2 + m_3 B_3^2 = 1. \quad (13)$$

约定指标范围如下:

$$1 \leq a, b, c, d \leq m_1, m_1 + 1 \leq p, q \leq m_1 + m_2, m_1 + m_2 + 1 \leq \alpha, \beta \leq n - 1.$$

由(6), (8) 及 Laguerre 形式 $C = 0$ 可知

$L_{ij,k}, B_{ij,k}$ 都是全对称张量. 定义

$$\omega_{ij} = \sum_k \Gamma^{kj} \omega_k, \Gamma_{ki}^j = -\Gamma_{ki}^j. \quad (14)$$

利用 (2), (11), (14) 及 $\{b_i\}$ 是常数得, 对 $\forall i, j, k$ 有

$$B_{ij,k} = (b_i - b_j) \Gamma_{kj}^i = (b_j - b_k) \Gamma_{ik}^j = (b_k - b_i) \Gamma_{ji}^k, \quad (15)$$

因此对 $\forall i, j, a, b, p, q, \alpha, \beta$ 有

$$B_{ij,i} = B_{ii,j} = B_{ab,j} = B_{pa,j} = B_{qa,j} = 0. \quad (16)$$

即 $\{B_{ij,k}\}$ 中非零元的形式是 $B_{ap,\alpha}$. 设 $B_{ij,k} \neq 0$ 且定义非负光滑函数 f 为

$$f = \frac{1}{6} |\nabla B|^2 = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} B_{ij,k}^2 = \sum_{a,p,\alpha} B_{ap,\alpha}^2.$$

并定义如下 3 个向量矩阵: $m_2 \times m_3$ 矩阵 $(\check{v}_{p\alpha})$, $m_1 \times m_3$ 矩阵 $(\check{v}_{\alpha a})$, $m_2 \times m_1$ 矩阵 (\check{v}_{pa}) , 其中

$$\begin{aligned} \check{w}_{pa} &= (B_{pa,1}, B_{pa,2}, \dots, B_{pa,m_1}) \in \mathbf{R}^{m_1}, \\ \check{v}_{\alpha a} &= (B_{\alpha a, m_1+1}, B_{\alpha a, m_1+2}, \dots, B_{\alpha a, m_1+m_2}) \in \mathbf{R}^{m_2}, \\ \check{v}_{pa} &= (B_{pa, m_1+m_2+1}, B_{pa, m_1+m_2+2}, \dots, B_{pa, n-1}) \in \mathbf{R}^{m_3}. \end{aligned}$$

利用类似于文献[12]的方法, 可以得到如下引理:

引理 3 矩阵 $(\check{v}_{pa}), (\check{v}_{\alpha a}), (\check{v}_{pa})$ 满足

- < 1 > $\check{v}_{pa} \cdot \check{v}_{p\beta} = \check{v}_{\alpha a} \cdot \check{v}_{\alpha\beta} = 0, \forall p, a, \alpha \neq \beta,$
- < 2 > $\check{v}_{pa} \cdot \check{v}_{qa} = \check{v}_{pa} \cdot \check{v}_{qa} = 0, \forall a, \alpha, p \neq q,$
- < 3 > $\check{v}_{\alpha a} \cdot \check{v}_{\beta a} = \check{v}_{pa} \cdot \check{v}_{pb} = 0, \forall p, \alpha, a \neq b,$
- < 4 > $\check{v}_{pa} \cdot \check{v}_{q\beta} + \check{v}_{qa} \cdot \check{v}_{p\beta} = 0, \forall p \neq q, \alpha \neq \beta,$
- < 5 > $\check{v}_{\alpha a} \cdot \check{v}_{\beta\beta} + \check{v}_{\beta a} \cdot \check{v}_{\alpha\beta} = 0, \forall a \neq b, \alpha \neq \beta,$
- < 6 > $\check{v}_{pa} \cdot \check{v}_{pb} + \check{v}_{qa} \cdot \check{v}_{pb} = 0, \forall a \neq b, p \neq q,$
- < 7 > $|\check{v}_{pa}|^2 + |\check{v}_{q\beta}|^2 = |\check{v}_{qa}|^2 + |\check{v}_{p\beta}|^2 = 0, \forall p \neq q, \alpha \neq \beta,$
- < 8 > $|\check{v}_{\alpha a}|^2 + |\check{v}_{\beta\beta}|^2 = |\check{v}_{\beta a}|^2 + |\check{v}_{\alpha\beta}|^2 = 0, \forall a \neq b, \alpha \neq \beta,$
- < 9 > $|\check{v}_{pa}|^2 + |\check{v}_{q\beta}|^2 = |\check{v}_{qa}|^2 + |\check{v}_{pb}|^2 = 0, \forall p \neq q, a \neq b,$

其中“ \cdot ”分别表示 $\mathbf{R}_1^m, \mathbf{R}_2^m, \mathbf{R}_3^m$ 中的标准乘积.

证明 由(2), (16) 式得

$$\sum_a B_{pa,a} \omega_a = (B_2 - B_3) \omega_{pa}, \quad (17)$$

$$\sum_p B_{\alpha a,p} \omega_p = (B_1 - B_3) \omega_{\alpha a}, \quad (18)$$

$$\sum_a B_{pa,a} \omega_a = (B_1 - B_2) \omega_{ap}. \quad (19)$$

微分(17)且利用(14), (15) 式并比较 $\omega_q \wedge \omega_\beta$ 的系数得

$$\sum_a B_{pa,a} B_{q\beta,a} + \sum_a B_{p\beta,a} B_{qa,a} = (B_1 - B_2)(B_1 - B_3) R_{paqa} \delta_{pq} \delta_{q\beta}. \quad (20)$$

同理微分(18) 式, (19) 式得

$$\sum_p B_{pa,a} B_{p\beta,b} + \sum_p B_{p\beta,a} B_{pa,b} = (B_2 - B_1)(B_2 - B_3) R_{paqa} \delta_{pq} \delta_{q\beta}, \quad (21)$$

$$\sum_a B_{pa,a} B_{qa,b} + \sum_a B_{pa,b} B_{qa,a} = (B_3 - B_2)(B_3 - B_1) R_{paqa} \delta_{pq} \delta_{ab}. \quad (22)$$

由(20) ~ (22) 可得 < 1 > ~ < 6 >. 且由(20) ~ (22) 及(9) 得

$$2 |\check{v}_{pa}|^2 = (B_1 - B_2)(B_1 - B_3)(-L_p - L_a), \quad (23)$$

$$2|\dot{v}_{\alpha\alpha}|^2 = (B_2 - B_1)(B_2 - B_3)(-L_\alpha - L_\alpha), \quad (24)$$

$$2|\dot{v}_{\beta\alpha}|^2 = (B_3 - B_2)(B_3 - B_1)(-L_\alpha - L_\beta). \quad (25)$$

由(23)~(25)可得 $\langle 7 \rangle \sim \langle 9 \rangle$.

引理 4 若矩阵 $(\dot{v}_{\rho\alpha})$ 中有一个元是零向量, 则此元所在的行(或列)中的元全是零向量.

证明 为了方便表示, 在证明中用 (\dot{v}_{ij}) 表示矩阵 $(\dot{v}_{\rho\alpha})$, 其中 $1 \leq i \leq m_2, 1 \leq j \leq m_1, \dot{v}_{ij} \in \mathbf{R}^3$. 由引理 3 得矩阵 (\dot{v}_{ij}) 具有如下性质.

性质 1 每行中的向量构成一正交集.

性质 2 每列中的向量构成一正交集.

对二阶子矩阵 $\begin{bmatrix} \dot{v}_{ik} & \dot{v}_{il} \\ \dot{v}_{jk} & \dot{v}_{jl} \end{bmatrix}$ 有

性质 3 $\dot{v}_{ik} \cdot \dot{v}_{jl} + \dot{v}_{il} \cdot \dot{v}_{jk} = 0$.

性质 4 $|\dot{v}_{ik}|^2 + |\dot{v}_{jl}|^2 = |\dot{v}_{il}|^2 + |\dot{v}_{jk}|^2 = 0$.

易知矩阵的行变换及列变换不会改变上述性质. 因此可假设 $\dot{v}_{11} = 0$. 由性质 1, 2, 3 可得第 1 行及第 1 列的其余向量 $\dot{v}_{12}, \dots, \dot{v}_{1m_1}, \dot{v}_{21}, \dots, \dot{v}_{m_21}$ 相互正交且其中至多有 m_3 个非零向量. 不妨设 $\dot{v}_{11} = \dots = \dot{v}_{1j} = 0, \dot{v}_{11} = \dots = \dot{v}_{il} = 0$, 其中 i, j 分别是 $\{1, 2, \dots, m_2\}, \{1, 2, \dots, m_1\}$ 中的某个值, 而其余的向量都非零. 即矩阵的第 1 行为 $(0, 0, \dots, \dot{v}_{1(j+1)}, \dots, \dot{v}_{1m_1})$, 第 1 列为 $(0, 0, \dots, \dot{v}_{(i+1)1}, \dots, \dot{v}_{m_21})$. 由性质 4 得 $\dot{v}_{kl} = 0, \forall 1 \leq k \leq i, 1 \leq l \leq j$. 因此可得左上角 $i \times j$ 子矩阵中的元都为零. 若第 1 行的元全为零, 得证. 否则, 则有 $j < m_1$ 且对所有 $l \geq j+1$ 有 $\dot{v}_{il} \neq 0$. 固定任意 $k \in \{i+1, \dots, m_2\}, l \in \{j+1, \dots, m_1\}$. 由性质 4 得

$$|\dot{v}_{k1}| = \dots = |\dot{v}_{kj}|, |\dot{v}_{il}| = \dots = |\dot{v}_{il}| \neq 0. \quad (26)$$

对 2 阶子式 $\begin{bmatrix} 0 & \dot{v}_{il} \\ \dot{v}_{kj} & \dot{v}_{kl} \end{bmatrix}$ 有

$$|\dot{v}_{kl}|^2 = |\dot{v}_{kj}|^2 + |\dot{v}_{il}|^2 \neq 0. \quad (27)$$

另外, 由性质 1, 2, 3 得 \mathbf{R}^{m_3} 中的 $i+j+1$ 个向量

$$\dot{v}_{k1}, \dots, \dot{v}_{kj}, \dot{v}_{il}, \dots, \dot{v}_{il}, \dot{v}_{kl}, \quad (28)$$

相互正交. 又由第 1 行及第 1 列中的 $m_1 + m_2 - i - j$ 个非零向量相互正交可得 $m_1 + m_2 - i - j \leq m_3$, 即 $i + j + 1 \geq m_1 + m_2 - m_3 + 1 \geq m_1 + 1 > m_3$. 因此(28)中存在零向量. 由(26), (27) 得对所有 $k = i+1, \dots, m_2$ 有 $\dot{v}_{k1} = \dots = \dot{v}_{kj} = 0$, 所以矩阵的前 j 列全为零. 证毕.

引理 5 若 $\nabla B \neq 0$, 则在矩阵 $(\dot{v}_{\rho\alpha}), (\dot{v}_{\rho\beta})$ 或 $(\dot{v}_{\alpha\alpha})$ 中不可能同时有 1 行及 1 列的元全是零向量.

证明 反证法 设矩阵 (\dot{v}_{ij}) 的第 \bar{i} 行及第 \bar{j} 列的元全为零, 则对 $\forall k \neq \bar{i}, l \neq \bar{j}$, 由性质 4 得

$$|\dot{v}_{kl}|^2 = |\dot{v}_{k\bar{j}}|^2 + |\dot{v}_{\bar{i}l}|^2 - |\dot{v}_{\bar{i}\bar{j}}|^2 = 0.$$

因此矩阵 (\dot{v}_{ij}) 中的所有元都是零, 与 $\nabla B \neq 0$ 矛盾. 证毕

下面将讨论如下两种情形:

情形 I $m_1 = m_2 = m_3$;

情形 II $m_1 \geq m_2 \geq m_3$ 且 $m_1 > m_3$.

对情形 I 有

引理 6 设 $x: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是具有 3 个不同主曲率且重数均为 m 的 Laguerre 等参超曲面, 若 $\nabla B \neq 0$, 则矩阵 $\dot{v}_{\rho\alpha}, \dot{v}_{\alpha\alpha}, \dot{v}_{\alpha\beta}$ 中的每个向量的模长都等于 $\frac{\sqrt{f}}{m} > 0$, 其中 $f = \sum_{\alpha, \beta, \alpha} B_{\alpha\beta, \alpha}^2$ 是常值函数.

证明 证明方法类似于文献[12]中的证明方法.

命题 1 情形 I 不可能发生.

证明 由(23)~(25)及(9)得

$$R_{\rho\alpha\rho} = \frac{2|\dot{v}_{\rho\alpha}|^2}{(B_1 - B_2)(B_1 - B_3)} = -L_\rho - L_\alpha, \quad (29)$$

$$R_{\alpha\alpha\alpha} = \frac{2|\dot{v}_{\alpha\alpha}|^2}{(B_2 - B_1)(B_2 - B_3)} = -L_\alpha - L_\alpha, \quad (30)$$

$$R_{apa\rho} = \frac{2|\dot{v}_{pa}|^2}{(B_2 - B_3)(B_1 - B_3)} = -L_p - L_a, \tag{31}$$

(29)、(30)、(31) 这 3 式相加得

$$L_p + L_a + L_a = 0. \tag{32}$$

由 (29) ~ (32) 式及引理 6 得

$$L_a = \frac{2f}{m^2(B_1 - B_2)(B_1 - B_3)}, L_p = \frac{2f}{m^2(B_2 - B_1)(B_2 - B_3)}, L_a = \frac{2f}{m^2(B_3 - B_2)(B_3 - B_1)}.$$

由 $f \neq 0, B_i$ 是常数得 Laguerre 张量 L 的特征值均为常数且不等(若相等则有 $B_1 = B_2 = B_3$ 与假设矛盾). 由文献[4], 例 1 (文献[3] 已证明超曲面 x 是具有两个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面) 及例 3 (x 是具有两个不同 Laguerre 主曲率的 Laguerre 等参超曲面) 知, 与假设矛盾, 所以得证命题 1.

对情形 II, 可设

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \{1, 2, \dots, m_1\}, \\ \mu_2 &= \{m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, m_1 + m_2\}, \\ \mu_3 &= \{m_1 + m_2 + 1, m_1 + m_2 + 2, \dots, n - 1\}. \end{aligned}$$

引理 7 存在一整数 m'_1 满足 $0 < m_1 - m_3 \leq m'_1 < m_1$ 且使得矩阵 (\dot{v}_{pa}) 恰好有 m'_1 列全为零. 即存在含有 m'_1 个元的子集 $m_0 \subset \mu_1$ 使得

$$\dot{v}_{pa} = 0, a \in m_0, p \in \mu_2, \tag{33}$$

$$\dot{v}_{pc} \neq 0, \forall c \in m_1, p \in \mu_2, \tag{34}$$

其中 m_1 是 m_0 在 μ_1 中的补集.

证明 对 $\bar{p} \in \mu_2$, 由引理 3 得 矩阵 (\dot{v}_{pa}) 的第 \bar{p} 行的元 (m_1 个) 相互正交. 因此第 \bar{p} 行至少有 $m_1 - m_3$ 元是零. 另外由引理 4, 5 知 矩阵 (\dot{v}_{pa}) 中不可能有一行全为零. 交换矩阵的列使得第 \bar{p} 行的所有非零元靠左. 设 $\dot{v}_{p\bar{m}_1}$ 是第 \bar{p} 行的最后一个非零元, 则有

$$1 < \bar{m}_1 \leq m_3 < m_1. \tag{35}$$

所以当 $1 \leq c \leq \bar{m}_1$ 时有 $\dot{v}_{p\bar{c}} \neq 0$, 当 $1 + \bar{m}_1 \leq a \leq m_1$ 时有 $\dot{v}_{p\bar{a}} = 0$. 因为第 \bar{p} 行至少有一个非零元, 因此由引理 4 得 矩阵 (\dot{v}_{pa}) 的最后 $m_1 - \bar{m}_1$ 列全为零. 即 当 $1 + \bar{m}_1 \leq a \leq m_1$ 时对 $\forall p \in \mu_2$ 有 $\dot{v}_{pa} = 0$. 将性质 4

应用于二阶子矩阵 $B = \begin{bmatrix} \dot{v}_{p\bar{c}} & \dot{v}_{p\bar{a}} \\ \dot{v}_{pc} & \dot{v}_{pa} \end{bmatrix}$, 其中 $1 \leq c \leq \bar{m}_1, 1 + \bar{m}_1 \leq a \leq m_1, \forall p$ 得

$$|\dot{v}_{(m_1+1)c}| = \dots = |\dot{v}_{(m_1+m_2)c}| = |\dot{v}_{p\bar{c}}|, \forall 1 \leq \bar{m}_1. \tag{36}$$

令 $m'_1 = m_1 - \bar{m}_1$. 则有 $0 < m_1 - m_3 \leq \bar{m}_1 < m_1$, 且 $m_0 = \{\bar{m}_1 + 1, \bar{m}_1 + 2, \dots, m_1\}, m_1 = \{1, 2, \dots, \bar{m}_1\}$. 证毕.

引理 8 设 $\nabla B \neq 0, m_1 \geq m_2 \geq m_3$. 若 $m_1 > m_3$, 则 $m_2 = m_3$.

证明 对 $c \in m_1$ 由 (34) 及引理 3 得 矩阵的第 c 列的元 (m_2 个) 相互正交. 因此 $m_2 \leq m_3$, 由假设 $m_2 > m_3$ 得 $m_2 = m_3$. 证毕.

引理 9 对所有 $a, b \in m_0, c \in m_1, p, q \in \mu_2, \alpha, \beta \in \mu_3$, 有 $L_a = L_b \neq L_c, L_p = L_q, L_\alpha = L_\beta$.

证明 由 (33), (34) 得 对所有 $a, b \in m_0, c \in m_1, p, q \in \mu_2$,

$$|\dot{v}_{pa}| = |\dot{v}_{pb}| = |\dot{v}_{qa}| = 0 \neq |\dot{v}_{pc}|.$$

再由 (25) 得 $L_a = L_b \neq L_c, L_p = L_q$. 由 (33) 得 对所有 $a \in m_0, p \in \mu_2, \alpha \in \mu_3$ 有,

$$B_{pa,\alpha} = 0. \tag{37}$$

又因为 $B_{ij,k}$ 是全对称的, 因此可得 对所有 $a \in m_0, \alpha \in \mu_3$ 有 $\dot{v}_{a\alpha} = 0$, 再由 (24) 得 $L_a = L_\beta$. 证毕.

引理 10 $\bar{m}_1 = m_2 = m_3$.

证明 由引理 9 得 $L_p = L_q, L_\alpha = L_\beta$. 由 (23) 及 $\nabla B \neq 0$ 得

$$|\dot{v}_{pa}|^2 = \frac{1}{m_2^2} \sum_{q,\beta,c} B_{q\beta,c}^2 = \frac{1}{m_2^2} f \neq 0, \forall p, a. \tag{38}$$

由 (37) 得 每一个向量 \dot{v}_{pa} 的最后 $m_1 - \bar{m}_1$ 个分量都为零, 因此向量 \dot{v}_{pa} 可被视为 $\mathbf{R}^{\bar{m}_1}$ 中的向量. 由引理 3

得:对每个 p , 矩阵 (\dot{v}_{pa}) 的第 p 行的元(m_3 个) 相互正交, 因此 $m_3 \leq \tilde{m}_1$. 结合(35) 得 $\tilde{m}_1 = m_2 = m_3$. 证毕

引理 11 矩阵 $(\dot{v}_{pa}), (\dot{v}_{aa}), (\dot{v}_{pa})$ 中的非零向量的模长都等于常数 $\frac{\sqrt{f}}{m_2}$. 即对所有 $c, d \in m_1, p, q \in \mu_2, \alpha, \beta \in \mu_3$ 有

$$|\dot{v}_{cp}|^2 = |\dot{v}_{dc}|^2 = |\dot{v}_{pq}|^2 = \frac{f}{m_2^2} = \text{constant} \neq 0.$$

证明 证明方法类似于文献[12] 中的证明方法.

引理 12 对所有 $a \in m_0, c \in m_1, p \in \mu_2, \alpha \in \mu_3$ 有

$$R_{acac} = R_{apap} = R_{aaaa} = 0, R_{cpcp} = \frac{2|\dot{v}_{cp}|^2}{(B_2 - B_3)(B_1 - B_3)},$$

$$R_{acaa} = \frac{2|\dot{v}_{\alpha a}|^2}{(B_2 - B_1)(B_2 - B_3)}, R_{pa\alpha a} = \frac{2|\dot{v}_{pa}|^2}{(B_1 - B_2)(B_1 - B_3)}.$$

证明 由(37) 得 $w_{ap} = w_{\alpha a} = 0$. 因此对 $\forall a \in m_0, c \in m_1$ 有

$$0 = -R_{apap}w_a \wedge w_p = dw_{ap} - \sum_i w_{ai} \wedge w_{ip} = - \sum_{\beta \in \mu_3, c \in m_1} \Gamma_{\beta p}^c w_{ac} \wedge w_{\beta}, \tag{39}$$

$$0 = -R_{aa\alpha a}w_a \wedge w_{\alpha} = dw_{a\beta} - \sum_i w_{ai} \wedge w_{i\alpha} = - \sum_{q \in \mu_2, c \in m_1} \Gamma_{qa}^c w_{ac} \wedge w_q, \tag{40}$$

记

$$w_{ac} = \sum_{b \in m_0} \Gamma_{bc}^a w_b + \sum_{d \in m_1} \Gamma_{dc}^a w_d + \sum_{q \in \mu_2} \Gamma_{qa}^c w_q + \sum_{\beta \in \mu_3} \Gamma_{\beta c}^a w_{\beta}.$$

则由(39), (40) 得

$$\sum_{c \in m_1} \Gamma_{bc}^a \Gamma_{ap}^c = 0, \forall a, b \in m_0, p \in \mu_2, \alpha \in \mu_3, \tag{41}$$

$$\sum_{c \in m_1} \Gamma_{qa}^c \Gamma_{ap}^c = 0, \forall a \in m_0, q \in \mu_2, \alpha \in \mu_3, \tag{42}$$

$$\sum_{c \in m_1} \Gamma_{\beta c}^a \Gamma_{ap}^c = 0, \forall a \in m_0, q \in \mu_2, \alpha, \beta \in \mu_3, \tag{43}$$

$$\sum_{c \in m_1} \Gamma_{dc}^a \Gamma_{ap}^c = 0, \forall a \in m_0, d \in \mu_2, p \in \mu_2, \alpha \in \mu_3, \tag{44}$$

由(41) 可得如下关于 $\{\Gamma_{bc}^a\}_{1 \leq c \leq m}$ 的线性方程组:

$$B_{p(m_1+m+1),1} \Gamma_{b1}^a + B_{p(m_1+m+1),2} \Gamma_{b2}^a + \dots + B_{p(m_1+m+1),m} \Gamma_{bm}^a = 0,$$

$$B_{p(m_1+m+2),1} \Gamma_{b1}^a + B_{p(m_1+m+2),2} \Gamma_{b2}^a + \dots + B_{p(m_1+m+2),m} \Gamma_{bm}^a = 0,$$

...

$$B_{pn,1} \Gamma_{b1}^a + B_{pn,2} \Gamma_{b2}^a + \dots + B_{pn,m} \Gamma_{bm}^a = 0,$$

利用性质 1, 2 及引理 11 得系数矩阵 F 满足 $F^t F = \text{diag}(|\dot{v}_{p1}|^2, |\dot{v}_{p2}|^2, \dots, |\dot{v}_{pm}|^2) = |\dot{v}_{p1}|^2 I_m$.

因此有 $|F| \leq 0$. 所以方程组只有零解, 即对所有的 b 有 $\Gamma_{b1}^a = \Gamma_{b2}^a = \dots = \Gamma_{bm}^a = 0$. 因此有 $\Gamma_{bc}^a = 0, \forall b \in m_0$. 同理由 (42) ~ (44) 可得 $\Gamma_{qa}^c = \Gamma_{\beta c}^a = \Gamma_{dc}^a = 0, \forall d \in m_1, q \in \mu_2, \beta \in \mu_3$. 因此 $\Gamma_{ic}^a = 0, \forall i$, 即 $w_{ac} = 0$. 进一步可得 $R_{acac} = 0$. 其余等式可由(23) ~ (25) 及(9) 直接得到. 证毕.

命题 2 情形 II 不可能发生.

证明 由引理 12 及(9) 得

$$0 = L_p + L_{\alpha} + L_c, L_p = \frac{2f}{m_2^2(B_2 - B_1)(B_2 - B_3)}, L_{\alpha} = \frac{2f}{m_2^2(B_3 - B_2)(B_3 - B_1)},$$

$$L_c = -L_{\alpha} = \frac{2f}{m_2^2(B_1 - B_2)(B_1 - B_3)}.$$

由 $f \neq 0, B_i$ 是常数得 Laguerre 张量 L 的特征值均为常数且不等(若相等则有 $B_1 = B_2 = B_3$ 与假设矛盾). 由文献[4], 例 1 (文献[3] 已证明超曲面 x 是具有两个不同主曲率的 Laguerre 等参超曲面.) 及例 3 (x 是具有两个不同 Laguerre 主曲率的 Laguerre 等参超曲面.) 知, 与假设矛盾, 所以得证命题 2.

定理1的证明 设 $x:M \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是具有3个不同主曲率的Laguerre等参超曲面,由命题1,2得 $\nabla B \equiv 0$. 利用引理1,得证主要定理.

参 考 文 献

- [1] Blasche W. Vorlesungen Über Differentialgeometrie[M]. Berlin:Springer-Verlag,1929.
- [2] Li Tongzhu. Laguerre geometry of hypersurfaces in \mathbf{R}^n [J]. Manuscripta Math,2007,122:73-95.
- [3] Li Tongzhu, Li Haizhong, Wang changping. Classification of hypersurfaces with parallel Laguerre second fundamental form in \mathbf{R}^n [J]. Differential Geometry and its Applications,2010,28:148-157.
- [4] Li Tongzhu, Li Haizhong, Wang changping. Classification of hypersurfaces with constant Laguerre eigenvalues in \mathbf{R}^n [J]. Science China Math,2011,54:1129-1144.
- [5] Li Tongzhu. Laguerre geometry of surface in \mathbf{R}^3 [J]. Acta Mathematica Sinica, English Series,2005,21:1525-1534.
- [6] 胡传峰,姬秀. \mathbf{R}^n 中仿Laguerre张量平行的超曲面[J].中北大学学报:自然科学版,2014,35(5):509-514.
- [7] Li Tongzhu, Sun huafei. Laguerre Isoparametric Hypersurfaces in \mathbf{R}^4 [J]. Acta Mathematica Sinica, English Series,2011,28:1179-1186.
- [8] Ji xiu, Hu chuanfeng. Laguerre Isoparametric Hypersurfaces in \mathbf{R}^5 [J]. Adances in Mathematics(CHINA),2015,44(1):117-127
- [9] Ji xiu, Hu chuanfeng. On Laguerre Isoparametric Hypersurfaces in \mathbf{R}^7 [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics,2014,29(4):486-500.
- [10] Ji xiu, Hu chuanfeng. \mathbf{R}^5 中的Laguerre等参超曲面[J].数学年刊A,2015(2):1-16.
- [11] Song yuping. Laguerre Isoparametric Hypersurfaces in \mathbf{R}^n with two distinct non-zero principal curvatures[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series,2014,30:169-180.
- [12] Hu zejun, Zhai shujie. Mobius isoparametric hypersurfaces with three distinct principal curvatures, II[J]. Pacific Math J,2011,2:343-370.

On Laguerre Isoparametric Hypersurfaces with Three Distinct Principal Curvatures

JI Xiu, HU Chuanfeng

(College of Arts and Science, Yangtze university, Jingzhou 434000, China)

Abstract: A Laguerre isoparametric hypersurface is defined by satisfying the conditions that its Laguerre form vanishes and all the Laguerre eigenvalues are constant. In this paper, we established a complete classification for all Laguerre isoparametric hypersurfaces with three distinct principal curvatures in \mathbf{R}^n .

Keywords: Laguerre metric; Laguerre form; Laguerre isoparametric hypersurface; Laguerre tensor; Laguerre second fundamental form