

# Floquet 相空间方法分析周期驱动下原子玻色爱因斯坦凝聚体动力学

梁炜杰,张可焯

(华东师范大学 物理与电子科学学院,上海 200241)

**摘要:**用相空间动力学方法研究一维无限深势阱内的原子玻色爱因斯坦凝聚体受到时域周期性微扰时的动力学行为.通过功角变换和共振频率近似,在 Floquet 相空间中构造有效的势场来预言玻色爱因斯坦凝聚体的运动,并通过数值模拟实空间动力学方程,验证了该方法.

**关键词:**无限深方势阱;原子玻色爱因斯坦凝聚体;含时 Gross-Pitaevskii 方程;Floquet 相空间;功角变换

**中图分类号:**O413

**文献标志码:**A

原子玻色爱因斯坦凝聚体在时变势场中的动力学是原子光学、量子模拟等研究方向经常面对的问题.周期驱动下凝聚体的动力学行为是研究动力学相变<sup>[1-2]</sup>、量子混沌<sup>[3-4]</sup>、量子态控制<sup>[5]</sup>与精密测量的重要模型<sup>[6-8]</sup>.然而此动力学系统复杂,研究主要依靠数值模拟含时 Gross-Pitaevskii(G-P)方程的方法.此方法较难对动力学行为进行定性分析和物理解释<sup>[9]</sup>.

本文提出一种对保守势场中周期驱动的原子凝聚体的平均场动力学的分析方法.使用经典力学保守系统中常用的功角变换方法<sup>[10-11]</sup>配合共振驱动近似将 G-P 方程转入 Floquet 相空间进行分析<sup>[12]</sup>.在此相空间中,动力学方程不再含时,可以显著降低理论分析的难度.类似的分析思路在经典非线性共振<sup>[13-14]</sup>、里德堡原子动力学<sup>[15-16]</sup>、时间晶体<sup>[17-20]</sup>等研究领域都发挥了重要作用.在本文中,使用了一维无限深方势阱中的原子凝聚体作为例子,展示了含时单频驱动下,其相空间动力学与简谐势阱中的波包或孤子的动力学的相似性.用此方法可以简单地解释其振荡动力学的几个特征频率出现的原因.

## 1 模型简介

首先,考虑一维无限深方势阱中的玻色爱因斯坦凝聚体,受到含时微扰,其动力学在平均场近似下,可由含时 G-P 方程描述,

$$i\hbar\partial_t\Psi(x,t)=\left(\frac{p^2}{2m}+V(x)+\lambda Fx\cos(\omega t)+gN|\Psi|^2\right)\Psi(x,t), \quad (1)$$

其中, $m$  是单原子质量, $F$  是系统所受到的外力, $g$  是凝聚体中原子间的相互作用强度, $N$  是原子数,后文所有物理量均无量纲(能量单位  $E=(\hbar^2 F^2/m)^{1/3}$ ,长度单位  $l_0=(\hbar^2/mF)^{1/3}$ ,时间单位  $t_0=(m\hbar/F^2)^{1/3}$ ),为方便起见,无量纲后的时间、位置、动量、频率仍分别采用  $t,x,p,\omega$  表示.

空间线性微扰频率为  $\omega$  强度为  $\lambda$ , $V(x)$  代表宽度为  $L$  的一维无限深方势阱  $V(x)=\begin{cases} 0, & |x| < \frac{L}{2} \\ \infty, & |x| > \frac{L}{2} \end{cases}$ .可

收稿日期:2022-03-20;修回日期:2022-05-30.

基金项目:国家自然科学基金(11974116);中央高校基本科研业务费专项资金资助(40500-20101-222091).

作者简介:梁炜杰(1996—),男,广西梧州人,华东师范大学硕士研究生,研究方向为量子光学,E-mail:51194700013@stu.ecnu.edu.cn.

通信作者:张可焯,E-mail:kzyzhang@phy.ecnu.edu.cn.

以根据不含微扰的保守哈密顿量部分  $H_0(x) = \frac{p^2}{2} + V(x)$ , 获得功角变换关系, ( $p = \sqrt{2E_0} \text{sign}(\sin(\theta))$ ),  $x = -\frac{L}{2} + \frac{L}{\pi} |\theta|$ ,  $I = \frac{L\sqrt{2E_0}}{\pi}$ ), 其中,  $E_0$  是不含时间微扰时的能量. 变换后的哈密顿量  $H = H_0(I) + \lambda(-\frac{L}{2} + \frac{L}{\pi} |\theta|) \cos(\omega t)$ , 其中  $H_0(I) = \frac{\pi^2 I^2}{2L^2}$  描述周期型的运动, 对应的本征频率  $\Omega = \frac{\partial H_0(I)}{\partial I} = \frac{\pi^2 I}{L^2}$ . 将时间调制的微扰势场展开为  $H = H_0(I) + \lambda \sum n c_n e^{in\theta} \cos(\omega t)$ . 对于这个含时的哈密顿量, 可以构建一个特殊的相空间, 其中的广义坐标包含时间  $t$ , 对应的哈密顿量  $\mathcal{H} = P_t + H_0(I) + \lambda \sum n c_n e^{in\theta} \cos(\omega t)$ , 其中,  $P_t$  是广义坐标时间  $t$  对应的正则动量. 考虑到驱动频率是本征频率的整数倍时, 即  $\omega = s\Omega$ , 对系统动力学影响最大, 可采用“共振频率近似”剥离掉干扰项.

首先作变换 ( $\bar{\theta} = \theta - \Omega t$ ,  $\bar{I} = I$ ,  $\bar{P}_t = P_t + \Omega I$ ), 获得慢变参考系中的有效哈密顿量  $\mathcal{H} = H_0(\bar{I}) + \bar{P}_t - \Omega \bar{I} + \lambda \sum n c_n \cos(n\bar{\theta} + \frac{n-s}{s}\omega t)$ . 如果选择的初始能量  $H_0(\bar{I})$  接近某个能量  $H_0(\bar{I}_s)$ , 就可以在  $\bar{I}_s$  附近对  $\bar{I}$  泰勒展开. 此时  $\bar{I} \approx \bar{I}_s$ , 唯一的快速变量是  $t$ . 对该哈密顿量做时间平均, 得到  $\mathcal{H} = H_0(\bar{I}_s) + \frac{\partial H_0(I)}{\partial I}(\bar{I} - \bar{I}_s) + \bar{P}_t - \Omega \bar{I} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H_0(\bar{I})}{\partial \bar{I}^2}(\bar{I} - \bar{I}_s)^2 + \lambda V_s \cos(s\bar{\theta})$ . 此时哈密顿量不再显含时间, 所以  $\bar{P}_t$  是常量, 而微扰势场变成了一个周期格子势场. 定义有效质量  $m_{\text{eff}}^{-1} = \frac{\partial^2 H_0(\bar{I})}{\partial \bar{I}^2}$  和新正则动量  $P_{\bar{\theta}} = \bar{I} - \bar{I}_s$ , 略去常数项可推导出有效哈密顿量

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{P_{\bar{\theta}}^2}{2m_{\text{eff}}} + \lambda V_s \cos(s\bar{\theta}). \quad (2)$$

称由  $(\bar{\theta}, P_{\bar{\theta}})$  构成的共轭量空间为 Floquet 相空间. 其量子动力学分析, 只需把上述有效哈密顿量算符化即可 (即,  $P_{\bar{\theta}} = -i \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}}$ ). 当凝聚体中原子之间的相互作用不可忽略时, 在 Floquet 相空间中描述凝聚体动力学的

G-P 方程  $i\partial_t \Phi(\bar{\theta}, t) = (\frac{P_{\bar{\theta}}^2}{2m_{\text{eff}}} + \lambda V_s \cos(s\bar{\theta}) + g'N |\Phi|^2) \Phi(\bar{\theta}, t)$ . 上式说明, 在一维无限深方势阱中 BEC 含时微扰的动力学可以在 Floquet 相空间中由具有有效周期势的 G-P 方程描述.

为简单起见分析一倍共振情况, 驱动频率  $\omega = \Omega$  时, 在 Floquet 相空间中的 G-P 方程为

$$i\partial_t \Phi(\bar{\theta}, t) = (\frac{P_{\bar{\theta}}^2}{2m_{\text{eff}}} + \lambda V_1 \cos(\bar{\theta}) + g'N |\Phi|^2) \Phi(\bar{\theta}, t), \quad (3)$$

其中,  $V_1 = -\frac{2L}{\pi^2}$ ,  $g' = \frac{g\pi}{L}$ . 因为 Floquet 相空间中  $\bar{\theta} \in (-\pi, \pi)$ , 对于  $s = 1$ , 周期势场蜕化为  $\cos(\bar{\theta})$ . 在  $\bar{\theta} = 0$

附近做泰勒展开, 保留二阶项, 可以近似为谐振子势  $V(\bar{\theta}) = \frac{\lambda}{2} V_1 \bar{\theta}^2$ , 其动力学分析可以大为简化.

## 2 动力学模拟与分析

首先考虑凝聚体内原子之间无相互作用的情况. Floquet 相空间中的等效哈密顿量 ((2) 式) 在  $\bar{\theta} = 0$  附近可近似为谐振子的哈密顿量. 如果在 Floquet 相空间中选择的凝聚体初始波函数为高斯波包

$$\phi(\bar{\theta}, 0) = (\frac{\alpha}{\pi})^{1/4} \exp(-\frac{\alpha}{2}(\bar{\theta} - \bar{\theta}_0)^2),$$

凝聚体则会随着时间以谐振子势阱中心为平衡位置来回振荡. 振荡的振幅取决于初态的初始中心位置  $\bar{\theta}_0$ , 振荡频率取决于谐振子势对应简谐频率.

通过该初态,数值求解(3)式,得到图 1.从图 1(a)可知,在 Floquet 相空间中,凝聚体在  $\bar{\theta} = 0$  附近来回振荡.振荡的频率  $ft_0 = 0.25$ (近似导致与谐振子势的简谐频率稍有差异).虽然在 Floquet 相空间中,振荡可以持续,但是在振荡的过程中,凝聚体的波包宽度在反复扩大和缩小.这是因为在 Floquet 相空间的势场只是近似成谐振子势.

而在实验室坐标系下,在相同参数下通过对应的凝聚体初始波函数

$$\varphi(x, 0) = \left(\frac{\alpha'}{\pi}\right)^{1/4} \exp(ikx)$$

$\exp(-\frac{\alpha'}{2}(x - x_0)^2)$ ,其中,  $\alpha' = \alpha(\frac{\pi}{L})^2$ .数值求解实验室坐标系下的(1)式,得到了实验室坐标系下凝聚体的运动(图 1(b)).凝聚体波包在一维无限深势阱中来回振荡,但是并没有随着时间逐渐弥散在整个方势阱中.这与没有含时微扰的情况显然不同.这种稳定性是由周期驱动引发的.而其原理可以通过 Floquet 相空间动力学来理解.凝聚体在相空间的有效简谐势阱中做简谐振荡.在相空间波包振荡时的宽度的周期性扩大与缩小行为在实验室坐标系下的振荡运动中也有同样的体现.

还可以通过  $x$  和  $\bar{\theta}$  的期望值的傅里叶谱来分析其动力学,结果如图 2 所示.图 2(a)有一个清晰的单峰结构,对应频率为  $ft_0 = 0.25$ .图 2(b)有一个清晰的三峰结构.两个对称的频率峰,  $f_1 t_0 = 2.25$  和  $f_2 t_0 = 1.75$ ,位于本征频率  $\Omega t_0 = 2$  两边.这是一个典型的频率调制特征.本征频率  $\Omega$  与其附近两个频率  $f_1$  和  $f_2$  之间的差,正是 Floquet 相空间中凝聚体振荡的频率  $f$ .这是因为 Floquet 相空间中描述的是  $H_0$  决定的系统运动附近的微扰运动,所以实验室坐标系下凝聚体的完整运动的频率受到 Floquet 相空间中运动频率的调制.

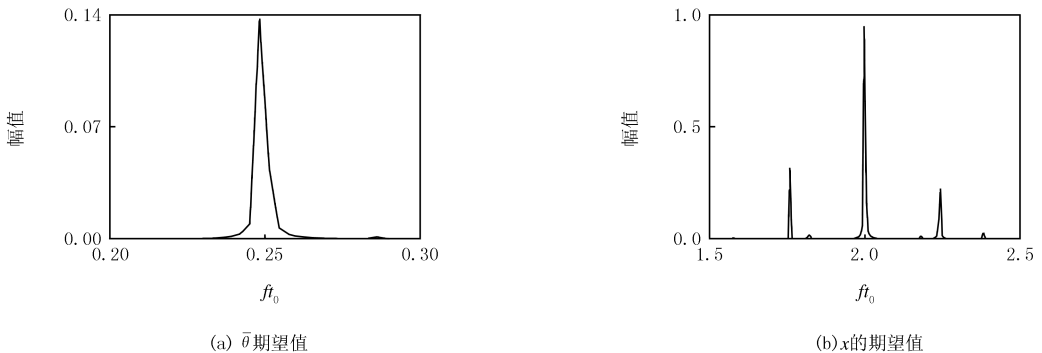
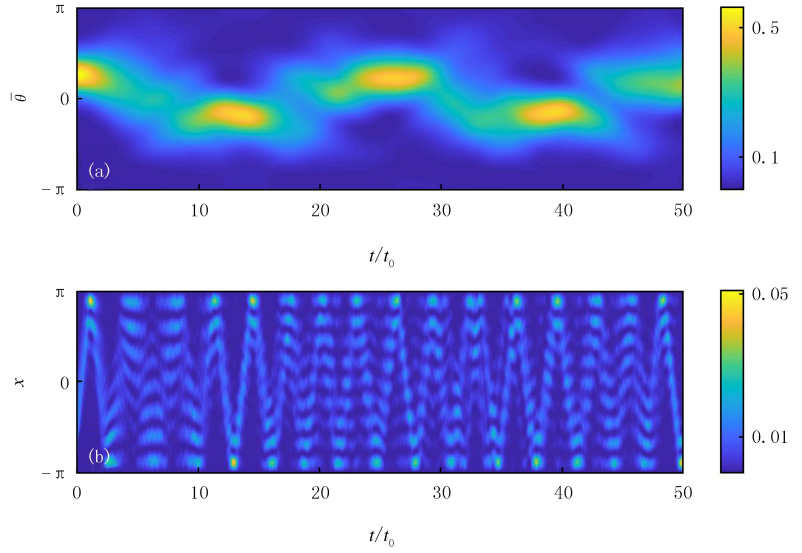


图2 傅里叶谱

Fig.2 Fourier Spectrum

当考虑凝聚体原子之间存在吸引型相互作用时,数值求解(3)式,得到的结果如图 3(a)所示.此时凝聚体在 Floquet 相空间中仍然展示简谐振荡,振荡频率与无相互作用情况相同,但是波包宽度的变化远小于无相互作用的情况(见图 1(a)和图 3(a)).这是因为粒子之间吸引的相互作用,可以抵消凝聚体色散导致的扩散,



(a) Floquet相空间; (b) 一维无限深方势阱.  $\lambda=0.25$ ,  $a=0.5$ ,  $x_0=-1.54$ ,  $a'=2$ ,  $\bar{\theta}_0=0.8$ ,  $L=2\pi$ .

图1 无相互作用时,凝聚体的运动(在线彩图)

Fig.1 Dynamics of BEC without interaction (colour online)

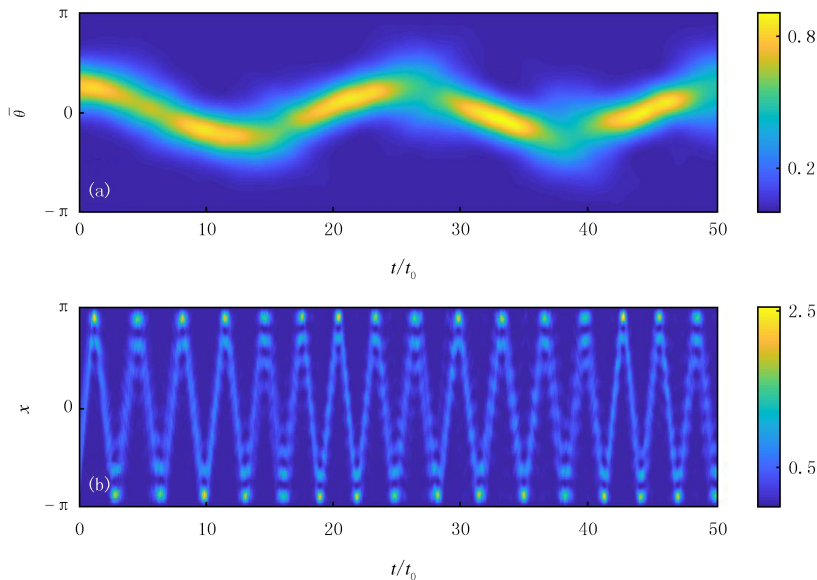
形成了孤子<sup>[21-22]</sup>,从而保持凝聚体在 Floquet 相空间中周期运动时波包形状不变。

而在同样的参数下,数值求解实验室坐标系下的(1)式,得到的实验室坐标系下的凝聚体运动(图 3(b)).与无相互作用情况相同,凝聚体在一维无限深方势阱中来回移动,但在移动过程中,凝聚体波包宽度的变化也显著缩小了。

### 3 结 论

通过功角变换和共振频率近似,推导出了在 Floquet 相空间中的描述系统动力学的有效 G-P 方程.该方程不显含时间,容易分析凝聚体的动力学行为.通过数值模拟

G-P方程的时域和频域解,探索了凝聚体在实验室坐标系下和在 Floquet 相空间中的动力学之间的差异和联系.发现该方法可以简单解释凝聚体波包在单频周期驱动下的动力学稳定现象.而凝聚体原子之间的吸引型相互作用对凝聚体波包的影响也可以用 Floquet 相空间中的非线性孤子效应来解释.该分析方法有普适性,对一维无限深方势阱以外的其他保守势场和不同周期和耦合形式的弱驱动也适用。



(a) Floquet相空间; (b) 一维无限深方势阱.  $gN=-1$ ,  $g'N=-0.5$ , 其余参数与图1相同。

图3 有吸引相互作用时,凝聚体的运动

Fig. 3 Dynamics of BEC with attractive interaction

### 参 考 文 献

- [1] JIN D S, ENSHER J R, MATTHEWS M R, et al. Collective excitations of a Bose-Einstein condensate in a dilute gas[J]. Physical Review Letters, 1996, 77(3): 420-423.
- [2] LIN R, PAPARIELLO L, MOLIGNINI P, et al. Superfluid-Mott-insulator transition of ultracold superradiant bosons in a cavity[J]. Physical Review A, 2019, 100: 013611.
- [3] ABDULLAEV F K, KRAENKEL R A. Coherent atomic oscillations and resonances between coupled Bose-Einstein condensates with time-dependent trapping potential[J]. Physical Review A, 2000, 62(2): 023613.
- [4] CHENG J. Chaotic dynamics in a periodically driven spin-1 condensate[J]. Physical Review A, 2010, 81(2): 023619.
- [5] MALOSSI N, BASON M G, VITEAU M, et al. Quantum driving protocols for a two-level system: from generalized Landau-Zener sweeps to transitionless control[J]. Physical Review A, 2013, 87: 012116.
- [6] BOIXO S, DATTA A, DAVIS M J, et al. Quantum-limited metrology and Bose-Einstein condensates[J]. Physical Review A, 2009, 80(3): 032103.
- [7] JIMÉNEZ-GARCÍA K, LEBLANC L J, WILLIAMS R A, et al. Tunable spin-orbit coupling via strong driving in ultracold-atom systems[J]. Physical Review Letters, 2015, 114(12): 125301.
- [8] LAUDAT T, DUGRAIN V, MAZZONI T, et al. Spontaneous spin squeezing in a rubidium BEC[J]. New Journal of Physics, 2018, 20(7): 073018.
- [9] ECKARDT A. Colloquium: Atomic quantum gases in periodically driven optical lattices[J]. Reviews of Modern Physics, 2017, 89: 011004.
- [10] FÉJOZ J. On action-angle coordinates and the Poincaré coordinates[J]. Regular and Chaotic Dynamics, 2013, 18(6): 703-718.
- [11] LAURENT-GENGOUX C, MIRANDA E, VANHAECKE P. Action-angle coordinates for integrable systems on Poisson manifolds[J]. International Mathematics Research Notices, 2011(8): 1839-1869.
- [12] BUCHLEITNER A, DELANDE D, ZAKRZEWSKI J. Non-dispersive wave packets in periodically driven quantum systems[J]. Physics Reports, 2002, 368(5): 409-547.

- [13] MARTIN, HOLTHAUS, .On the classical-quantum correspondence for periodically time dependent systems[J].Chaos, Solitons & Fractals, 1995, 5(7): 1143-1167.
- [14] VAKAKIS A F, GENDELMAN O. Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators; part II-resonance capture[J]. Journal of Applied Mechanics, 2001, 68(1): 42-48.
- [15] GRIFFITHS J A, FARRELLY D. Ionization of Rydberg atoms by circularly and elliptically polarized microwave fields[J]. Physical Review A, 1992, 45(5): R2678-R2681.
- [16] GIERGIEL K, SACHA K. Anderson localization of a Rydberg electron along a classical orbit[J]. Physical Review A, 2017, 95(6): 063402.
- [17] GIERGIEL K, KOSIOR A, HANNAFORD P, et al. Time crystals; analysis of experimental conditions[J]. Physical Review A, 2018, 98: 013613.
- [18] SACHA K. Modeling spontaneous breaking of time-translation symmetry[J]. Physical Review A, 2015, 91(3): 033617.
- [19] SACHA K, DELANDE D. Anderson localization in the time domain[J]. Physical Review A, 2016, 94(2): 023633.
- [20] MATUS P, SACHA K. Fractional time crystals[J]. Physical Review A, 2019, 99(3): 033626.
- [21] KHAYKOVICH L, SCHRECK F, FERRARI G, et al. Formation of a matter-wave bright soliton[J]. Science, 2002, 296(5571): 1290-1293.
- [22] STRECKER K E, PARTRIDGE G B, TRUSCOTT A G, et al. Bright matter wave solitons in Bose-Einstein condensates[J]. New Journal of Physics, 2003, 5: 73.

## Dynamics of periodically driven atomic Bose-Einstein condensates by Floquet phase space method

Liang Weijie, Zhang Keye

(School of Physics and Electronic Science, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

**Abstract:** The dynamic behavior of atomic Bose-Einstein condensates in a one-dimensional infinite-square-well subjected to a temporal periodic perturbation is studied by the method of phase space dynamics. We construct an effective potential field in the Floquet phase space to predict the motion of the Bose-Einstein condensate through action-angle transformation and secular approximation, verifying this method by numerically solving the dynamic equation of the laboratory frame.

**Keywords:** infinite-square-well; atomic Bose-Einstein condensate; time-dependent Gross-Pitaevskii equation; Floquet phase space; action-angle transform

[责任编辑 杨浦 刘洋]