文章编号:1000-2367(2018)01-0037-08 **DOI**:10.16366/j.cnki.1000-2367.2018.01.006

萤火虫图距离矩阵的两个最大特征值和的下界

陈华, 王国平

(新疆师范大学 数学科学学院,乌鲁木齐 830017)

摘 要:令 $n=2r+2t+s+1(r,s\geq 1,t\geq 0)$,$S_{n-t}$ 是一个 $n-t$ 阶的星,将 S_{n-t} 中的 r 对不同的点分别用 r 条边连接,在另外的 t 条悬挂边上分别接上一条边,得到的图叫作萤火虫图.令图 G 是 n 个点的萤火虫图,主要确定了图 G 的距离矩阵 $D(G)=(d_{ij})_{n\times n}$,距离拉普拉斯矩阵 $L_D(G)$ 与距离无符号拉普拉斯矩阵 $Q_D(G)$ 的两个最大特征值和的下界.

关键词:萤火虫图;特征多项式;第一大与第二大特征值的和;下界

中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A

让 M 是一个 n 阶实对称矩阵,则可以将其 n 个特征值设为 $\lambda_1(M)\geq\lambda_2(M)\geq\cdots\geq\lambda_n(M)$.对于某个确定的正整数 $k\leq n$,图论研究者对 $\lambda_1(M)+\lambda_2(M)+\cdots+\lambda_k(M)$ 的取值范围进行了研究.设 $\varepsilon_n=\{A\in\mathbf{R}^{n\times n}\mid A^{\mathrm{T}}=A,0\leq a_{ij}\leq 1,1\leq i,j\leq n\}$,文献[1]给出了这一类对称矩阵的第一大与第二大特征值和的上下界.同时,他们也将上述结果推广到了更加一般的情况.即令 $\zeta_n=\{A\in\mathbf{R}^{n\times n}\mid A^{\mathrm{T}}=A,a\leq a_{ij}\leq b,1\leq i,j\leq n,a,b$ 为实数,且 $a<b\}$,他们在文献[1]中对这类对称矩阵的第一大与第二大特征值和的下界也给予了界定.

图的邻接矩阵及(无符号)拉普拉斯矩阵等具有特定意义矩阵的上述问题的研究更是颇受关注.文献[2]得到了简单图的拉普拉斯矩阵第一大与第二大特征值和的上界及树的前 k 大特征值和的上界.文献[3]证明了简单图 G 的无符号拉普拉斯矩阵第一大与第二大特征值和的上界为 $e(G)+3$,也证明了正则图 G 的前 k 大特征值的和 $S_k(G)\leq e(G)+\binom{k+1}{2}$.文献[4]证明了简单图的无符号拉普拉斯矩阵第一大与第二大特征值的和取到 $e(G)+3$ 的极图为 S_n^+.文献[5]证明了沙漏图的线图是由它的(无符号)拉普拉斯谱唯一确定的.文献[6]给出了具有 k 个悬挂点且两个圈只有一个交点的 n 阶双圈图有极大 Harary 指数的图类.

设简单图 G 的点集 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,其距离矩阵 $D(G)=(d_{ij})_{n\times n}$,其中 d_{ij} 表示 v_i 与 v_j 之间的距离,其特征值 $\lambda_1(D(G))\geq\lambda_2(D(G))\geq\cdots\geq\lambda_n(D(G))$ 被称为图 G 的距离谱.2013 年,文献[7]给出了距离拉普拉斯矩阵和距离无符号拉普拉斯矩阵的定义.若图 G 中一个点 v 的迹 $Tr(v)$ 表示点 v 到图 G 中其他所有点的距离之和,则 $\mathrm{diag}(Tr)$ 表示 (i,i) 位置上的元素为 $Tr(v_i)$ 的对角矩阵.图 G 的距离拉普拉斯矩阵 $L_D(G)=\mathrm{diag}(Tr)-D(G)$,其特征值 $\mu_1(L_D(G))\geq\mu_2(L_D(G))\geq\cdots\geq\mu_n(L_D(G))$ 被称为图 G 的距离拉普拉斯谱.图 G 的距离无符号拉普拉斯矩阵 $Q_D(G)=\mathrm{diag}(Tr)+D(G)$,其特征值 $q_1(Q_D(G))\geq q_2(Q_D(G))\geq\cdots\geq q_n(Q_D(G))$ 被称为是图 G 的距离无符号拉普拉斯谱.人们对于距离矩阵的谱做了大量的研究,这在文献[8]中有详细的说明.图的距离拉普拉斯谱和距离无符号拉普拉斯谱的研究也有很多,详见文献[9-11].

令 $n=2r+2t+s+1(r,s\geq 1,t\geq 0)$,$S_{n-t}$ 是一个 $n-t$ 阶的星,将 S_{n-t} 中的 r 对不同的点分别用 r 条

收稿日期:2016-12-16;**修回日期**:2017-09-10.

基金项目:国家自然科学基金(11461071);新疆师范大学研究生科技创新项目基金资助(XSY201602012).

作者简介:陈华(1993-),女,山东商河人,新疆师范大学硕士研究生,研究方向为图论与组合数学,E-mail:906727939@qq.com.

通信作者:王国平,男,新疆师范大学教授,研究方向为图论与组合数学,E-mail:xj.wgp@163.com.

边连接,在另外的 t 条悬挂边上分别接上一条边,得到的图叫作萤火虫图,记为 $F_{r,s,t}$(如图 1 所示).

在文献[12]中确定了萤火虫图的邻接矩阵的最大、第二大、最小特征值的上、下界.在这篇文章中确定了萤火虫图的距离矩阵、距离拉普拉斯矩阵及距离无符号拉普拉斯矩阵的第一大与第二大特征值的和的下界.

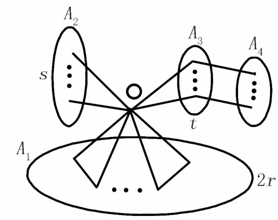

图 1 $F_{r,s,t}$

1 距离矩阵第一大与第二大特征值和的下界

令 e_k 表示第 k 个分量为 1,其余分量为 0 的 n 阶单位列向量.$J_{m\times n}$ 表示所有元素均为 1 的 $m\times n$ 阶矩阵;当 $m=n$ 时,记为 J_n.I_n 表示 n 阶单位阵.

如果图 G 和 H 是同构的,那么就将它们记为 $G\cong H$.

为了书写方便,下面把 $\lambda_i(D(G))$,$\mu_i(L_D(G))$ 和 $q_i(Q_D(G))$ 分别简记为 $\lambda_i(G)$,$\mu_i(G)$ 和 $q_i(G)(1\leq i\leq n)$.

引理 1 设 $n\geq 4$,则 $S_2(F_{1,n-3,0})>2n-5$.

证明 令 $G\cong F_{1,n-3,0}$,通过简单的计算,可以得到 $D(G)=\begin{pmatrix} 2J_{(n-3)}-2I_{(n-3)} & J_{(n-3)\times 1} & 2J_{(n-3)\times 2}\\ J_{1\times(n-3)} & 0 & J_{1\times 2}\\ 2J_{2\times(n-3)} & J_{2\times 1} & J_2-I_2\end{pmatrix}$.
通过观察可得 $e_{n-1}-e_n$ 是 $D(G)$ 关于特征值 -1 的特征向量;对每一个 $2\leq k\leq n-3$,e_1-e_k 都是 $D(G)$ 关于特征值 -2 的特征向量.这表明 -1 是 $D(G)$ 的重数至少为 1 的特征值,-2 是 $D(G)$ 的重数至少为 $n-4$ 的特征值.

接下来,确定 $D(G)$ 的另外 3 个特征值.设 λ_1 为 $D(G)$ 的最大特征值,由对称性可知,其对应的特征向量 $X=(xJ_{1\times(n-3)},y,zJ_{1\times 2})^{\mathrm{T}}$.

由特征方程 $DX=\lambda_1X$ 可以得到 $\begin{cases}2(n-4)x+y+4z=\lambda_1x,\\(n-3)x+2z=\lambda_1y,\\2(n-3)x+y+z=\lambda_1z.\end{cases}$ 令 $M=\begin{pmatrix}2(n-4) & 1 & 4\\ n-3 & 0 & 2\\ 2(n-3) & 1 & 1\end{pmatrix}$,那么,$M$ 的特征值也是 $D(G)$ 的特征值.

经过简单的计算,可以确定 M 的特征多项式:$\psi(j)=j^3-(-7+2n)j^2-(-17+7n)j+5-3n$.

注意到 $\psi(-3)=-10<0$,$\psi(-2)=3n-9>0$,$\psi(-1)=2n-6>0$,$\psi(-\frac{1}{2})=-\frac{15}{8}<0$,$\psi(0)=5-3n<0$,$\psi(2n-4)=-2n^2+11n-15<0$,$\psi((2n-3)=2n^2+4n-10>0$.

从上述不等式可以看出 $2n-4<\lambda_1(G)<2n-3$ 且 $\lambda_2(G)>-1$.这表明 $S_2(G)>2n-5$.

引理 2 设 $s\geq 1$,$t\geq 1$.则 $S_2(F_{1,s,t})>2s+4t+3$.

证明 令 $G\cong F_{1,s,t}$,通过简单的计算,可以得到

$$D(G)=\begin{pmatrix}2J_s-2I_s & 2J_{s\times t} & 3J_{s\times t} & J_{s\times 1} & 2J_{s\times 2}\\ 2J_{t\times s} & 2J_t-2I_t & 3J_t-2I_t & J_{t\times 1} & 2J_{t\times 2}\\ 3J_{t\times s} & 3J_t-2I_t & 4J_t-4I_t & 2J_{t\times 1} & 3J_{t\times 2}\\ J_{1\times s} & J_{1\times t} & 2J_{1\times t} & 0 & J_{1\times 2}\\ 2J_{2\times s} & 2J_{2\times t} & 3J_{2\times t} & J_{2\times 1} & J_2-I_2\end{pmatrix}.$$

通过观察可得,$e_{n-1}-e_n$ 是 $D(G)$ 关于特征值 -1 的特征向量;对每一个 $2\leq k\leq s$,e_1-e_k 都是 $D(G)$ 关于特征值 -2 的特征向量.这表明 -1 为 $D(G)$ 的重数至少为 1 的特征值,-2 为 $D(G)$ 的重数至少为 $s-1$ 的特征值.

因为 $D(G)$ 是非负对称不可约矩阵,根据 Perron 定理可以确定,$D(G)$ 的最大特征值 λ_1 一定是正的,其对应的特征向量 X 也是正的.设 λ_1 为 $D(G)$ 的最大特征值,因此 X 与 -1 和 -2 对应的上述特征向量均正

交.再根据对称性,就能够设 $X=(xJ_{1\times s},yJ_{1\times t},zJ_{1\times t},\ p,qJ_{1\times 2})^{\mathrm{T}}$.

根据特征方程 $DX=\lambda_1 X$ 可以得到 $\begin{cases}2(s-1)x+2ty+3tz+p+4q=\lambda_1 x,\\ 2sx+2(t-1)y+(3t-2)z+p+4q=\lambda_1 y,\\ 3sx+(3t-2)y+4(t-1)z+2p+6q=\lambda_1 z,\\ sx+ty+2tz+2q=\lambda_1 p,\\ 2sx+2ty+3tz+p+q=\lambda_1 q.\end{cases}$

令 $M=\begin{pmatrix}2s-2 & 2t & 3t & 1 & 4\\ 2s & 2t-2 & 3t-2 & 1 & 4\\ 3s & 3t-2 & 4t-4 & 2 & 6\\ s & t & 2t & 0 & 2\\ 2s & 2t & 3t & 1 & 1\end{pmatrix}$.那么,$M$ 的特征值也是 $D(G)$ 的特征值.

经过简单的计算,可以确定 M 的特征多项式:$\psi(j)=j^5-(-7+6t+2s)j^4-(st+t^2+19s+41t-6)j^3-(5st+5t^2+53s+93t+24)j^2-(6st+6t^2+46s+82t+40)j-12s-24t-16$.$\psi(-10s-10t)<0$,$\psi(-3)=6t+50>0$,$\psi(-2)=-12s<0$,$\psi(-1)=2st+2t^2-2s>0$,$\psi(0)=-12s-24t-16<0$,$\psi(2s+4t+4)<0$,$\psi(4s+8t-1)>0$.

从上述不等式可以看出,$2s+4t+4<\lambda_1(G)<4s+8t-1$ 且 $\lambda_2(G)>-1$.这表明 $S_2(G)>2s+4t+3$.

引理 3　设 $2r+s+1\geq 6$,$r\geq 2$.则 $S_2(F_{r,s,0})>4r+2s-4$.

证明　令 $G\cong F_{r,s,0}$,通过简单的计算,可以得到 $D(G)=\begin{pmatrix}2J_s-2I_s & J_{s\times 1} & 2J_{s\times 2r}\\ J_{1\times s} & 0 & J_{1\times 2r}\\ 2J_{2r\times s} & J_{2r\times 1} & B_{2r}\end{pmatrix}$.

这里 B_{2r} 是一个 r 阶的块矩阵,其对角线上的每一块都为 J_2-I_2,其余的块均为 $2J_2$.

通过观察可得,对每一个 $1\leq m\leq r$,$e_{s+2m}-e_{s+2m+1}$ 都是 $D(G)$ 关于特征值 -1 的特征向量;对每一个 $2\leq k\leq s$,e_1-e_k,都是 $D(G)$ 关于特征值 -2 的特征向量.这表明 -1 为 $D(G)$ 的重数至少为 r 的特征值,-2 为 $D(G)$ 的重数至少为 $s-1$ 的特征值.

因为 $D(G)$ 是非负对称不可约矩阵,根据 Perron 定理可以确定,$D(G)$ 的最大特征值 λ_1 一定是正的,其对应的特征向量 X 也是正的.设 λ_1 为 $D(G)$ 的最大的特征值,因此 X 与 -1 和 -2 对应的上述特征向量均正交.因此,就能够确定 $X=(xJ_{1\times s},y,zJ_{1\times 2r})^{\mathrm{T}}$.

再根据特征方程 $DX=\lambda_1 X$ 可以得到 $\begin{cases}2(s-1)x+y+4rz=\lambda_1 x,\\ sx+2rz=\lambda_1 y,\\ 2sx+y+(4r-3)z=\lambda_1 z.\end{cases}$ 令 $M=\begin{pmatrix}2s-2 & 1 & 4r\\ s & 0 & 2r\\ 2s & 1 & 4r-3\end{pmatrix}$,那么,$M$ 的特征值也是 $D(G)$ 的特征值.

经过简单的计算,可以确定 M 的特征多项式:$\psi(j)=j^3-(4r+2s-5)j^2-(10r+7s-6)j-4r-3s$.
$\psi(-3)=-10r<0$,$\psi(-2)=3s>0$,$\psi(-1)=-2+2r+2s>0$,$\psi(0)=-4r-3s<0$,
$\psi(4r+2s-3)=-8r^2-16rs-6r^2+2r+6s<0$,$\psi(4r+2s-1)=24r^2+16rs+2s^2-2r-2>0$.

从上述不等式可以看出,$4r+2s-3<\lambda_1(G)<4r+2s-1$ 且 $\lambda_2(G)>-1$.这表明 $S_2(G)>4r+2s-4$.

引理 4　设 $r\geq 2$,$t,s\geq 1$.则 $S_2(F_{r,s,t})>4r+2s+4t-2$.

证明　令 $G\cong F_{r,s,t}$,通过简单的计算可以得到

$$D(G)=\begin{pmatrix}2J_s-2I_s & 2J_{s\times t} & 3J_{s\times t} & J_{s\times 1} & 2J_{s\times 2r}\\ 2J_{t\times s} & 2J_t-2I_t & 3J_t-2I_t & J_{t\times 1} & 2J_{t\times 2r}\\ 3J_{t\times s} & 3J_t-2I_t & 4J_t-4I_t & 2J_{t\times 1} & 3J_{t\times 2r}\\ J_{1\times s} & J_{1\times t} & 2J_{1\times t} & 0 & J_{1\times 2r}\\ 2J_{2r\times s} & 2J_{2r\times t} & 3J_{2r\times t} & J_{2r\times 1} & B_{2r}\end{pmatrix}.$$

这里 B_{2r} 是一个 r 阶的块矩阵,其对角线上的每一块都为 J_2-I_2,其余的块均为 $2J_2$.

通过观察可得,对每一个 $1\le m\le r$,$e_{s+2m+2t}-e_{s+2m+2t+1}$ 都是 $D(G)$ 关于特征值 -1 的特征向量;对每一个 $2\le k\le s$,e_1-e_k 都是 $D(G)$ 关于特征值 -2 的特征向量.这表明 -1 为 $D(G)$ 的重数至少为 r 的特征值,-2 为 $D(G)$ 的重数至少为 $s-1$ 的特征值.

因为 $D(G)$ 是非负对称不可约矩阵,根据 Perron 定理可以确定,$D(G)$ 的最大特征值 λ_1 一定是正的,其对应的特征向量 X 也是正的.设 λ_1 为 $D(G)$ 的最大特征值,因此 X 与 -1 和 -2 对应的上述特征向量均正交.再根据对称性,就能够设 $X=(xJ_{1\times s},yJ_{1\times t},zJ_{1\times t},p,qJ_{1\times 2r})^{\mathrm{T}}$.

根据特征方程 $DX=\lambda_1 X$ 可以得到$\begin{cases}2(s-1)x+2ty+3tz+p+4rq=\lambda_1 x,\\ 2sx+2(t-1)y+(3t-2)z+p+4rq=\lambda_1 y,\\ 3sx+(3t-2)y+4(t-1)z+2p+6rq=\lambda_1 z,\\ sx+ty+2tz+2rq=\lambda_1 p,\\ 2sx+2ty+3tz+p+(4r-3)q=\lambda_1 q.\end{cases}$

令 $M=\begin{pmatrix}2s-2 & 2t & 3t & 1 & 4r\\ 2s & 2t-2 & 3t-2 & 1 & 4r\\ 3s & 3t-2 & 4t-4 & 2 & 6r\\ s & t & 2t & 0 & 2r\\ 2s & 2t & 3t & 1 & 4r-3\end{pmatrix}$,那么,$M$ 的特征值也是 $D(G)$ 的特征值.

经过简单的计算,可以确定 M 的特征多项式:

$\psi(j)=j^5-(4r+2s+6t-11)j^4-(2rt+st+t^2+34r+19s+39t-40)j^3-(8rt+5st+5t^2+80r+53s+85t-56)j^2-(8rt+6st+6t^2+64r+46s+74t-24)j-16r-12s-24t$.

$\psi(-10r-10s-10t)<0$,$\psi(-3)=6rt+50r>0$,$\psi(-2)=-12s<0$,

$\psi(-1)=2rt+2st+2t^2-2r-2s-2t+2>0$,$\psi(0)=-16r-12s-24t<0$,

$\psi(4r+2s+4t-1)<0$,$\psi(8r+4s+8t-3)>0$.

从上述不等式可得,$2s+4r+4t-1<\lambda_1(G)<8r+4s+8t-3$ 且 $\lambda_2(G)>-1$.这表明 $S_2(G)>4r+2s+4t-2$.

根据引理 1~引理 4,就能得到定理 1.

定理 1 若 $r\ge 1$,$s\ge 1$,$t\ge 0$,则 $S_2(F_{r,s,t})>2n-6$.

2 距离拉普拉斯矩阵第一大与第二大特征值和的下界

引理 5 $S_2(L_D(F_{1,1,0}))=8r+4s=12$.

证明 令 $G\cong F_{1,1,0}$,

$$L_D(G)=\begin{pmatrix}5 & -1 & -2 & -2\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ -2 & -1 & 4 & -1\\ -2 & -1 & -1 & 4\end{pmatrix}.$$

$L_D(G)$ 的特征多项式 $\psi(j)=j^4-16j^3+85j^2-157j+35$.

容易得出 $L_D(G)$ 的特征值为 0,5,7,4.

所以 $\mu_1(G)=4r+2s+1=7$,$\mu_2(G)=4r+2s-1=5$.因此 $S_2(L_D(G))=8r+4s=12$.

引理 6 假定 $F_{r,s,t}\ncong F_{1,1,0}$ 如图 1 所示,令 x 是 $\mu_1(F_{r,s,t})$ 的特征向量.则对 $V(A_i)$ 中的任意两个点 u_i 和 v_i 对应的分量 $x(u_i)$ 和 $x(v_i)$ 满足 $x(u_i)=x(v_i)(i=1,2,3,4)$.

证明 先证明 $x(u_1)=x(v_1)$.为了书写简洁,令 $G=F_{r,s,t}$,$V_i=V(A_i)$.这样由特征方程 $\mu_1(G)x(u_i)=\sum_{u_j\in V(G)}d_{u_iu_j}(x(u_i)-x(u_j))$ 可以得到

$$\begin{cases}\mu_1(G)x(u_1)=(x(u_1)-x(v_1))+2\sum_{w\in V_1\backslash(u_1,v_1)}(x(u_1)-x(w))+(x(u_1)-x(O))+\\ \quad 2\sum_{w\in V_2}(x(u_1)-x(w))+2\sum_{w\in V_3}(x(u_1)-x(w))+3\sum_{w\in V_4}(x(u_1)-x(w)),\\ \mu_1(G)x(v_1)=(x(v_1)-x(u_1))+2\sum_{w\in V_1\backslash(u_1,v_1)}(x(v_1)-x(w))+(x(v_1)-x(O))+\\ \quad 2\sum_{w\in V_2}(x(v_1)-x(w))+2\sum_{w\in V_3}(x(v_1)-x(w))+3\sum_{w\in V_4}(x(v_1)-x(w)).\end{cases}$$

所以，$(\mu_1(G)-(4r+2s+5t-1))(x(u_1)-x(v_1))=0$.

但 $\mu_1(G)\geq\max\{Tr(v)\mid v\in G\}=6r+3s+7t-4$，所以 $\mu_1(G)-(4r+2s+5t-1)>0$，故 $x(u_1)=x(v_1)$.

同理可证，$x(u_i)=x(v_i)(i=1,2,3,4)$.

引理 7　假定 $F_{r,s,0}\ncong F_{1,1,0}$，则 $S_2(L_D(F_{r,s,0}))\geq 8r+4s$.

证明　令 $G\cong F_{r,s,0}$ ，通过简单的计算可得

$$L_D(G)=\begin{pmatrix}(2s+4r+1)I_s-2J_s & -J_{s\times1} & -2J_{s\times2r}\\ -J_{1\times s} & 2r+s & -J_{1\times2r}\\ -2J_{2r\times s} & -J_{2r\times1} & B_{2r}\end{pmatrix},$$

这里 B_{2r} 是一个 r 阶的块矩阵，其对角线上的每一块都为 $(4r+2s-1)I_2-J_2$，其余的块均为 $-2J_2$.

通过观察可得，对每一个 $1\leq m\leq r$，$e_{s+2m}-e_{s+2m+1}$ 都是 $L_D(G)$ 关于特征值 $4r+2s-1$ 的特征向量；对每一个 $2\leq k\leq s$，e_1-e_k 都是 $L_D(G)$ 关于特征值 $4r+2s+1$ 的特征向量.这表明 $4r+2s-1$ 为 $L_D(G)$ 的重数至少为 r 的特征值，$4r+2s+1$ 为 $L_D(G)$ 的重数至少为 $s-1$ 的特征值.

为了确定 $L_D(G)$ 其余的特征值，首先确定它们所对应的特征向量的形式.设 μ_1 为 $L_D(G)$ 的最大特征值，其对应的特征向量为 Y.由引理 6，能够设 $Y=(xJ_{1\times s},y,zJ_{1\times2r})^{\mathrm{T}}$.

再根据特征方程 $L_DY=\mu_1Y$ 可以得到 $\begin{cases}(4r+1)x-y-4rz=\mu_1x,\\ -sx+(2r+s)y-2rz=\mu_1y,\\ -2sx-y+(2s+1)z=\mu_1z.\end{cases}$

令 $M=\begin{pmatrix}4r+1 & -1 & -4r\\ -s & 2r+s & -2r\\ -2s & -1 & 2s+1\end{pmatrix}$，那么，$M$ 的特征值也是 $L_D(G)$ 的特征值.

经过简单的计算，可以确定 M 的特征多项式：$\psi(j)=j^3-(3s+6r+2)j^2-(-8r^2-8rs-2s^2-6r-3s-1)j$. 通过计算，$L_D(G)$ 的特征值为 $0,4r+2s+1,2r+s+1$.所以 $\mu_1(G)=4r+2s+1$，$\mu_2(G)\geq 4r+2s-1$.因此 $S_2(L_D(F_{\{}r,s,0\}))\geq 8r+4s$.

引理 8　假定 $F_{r,s,t}\ncong F_{1,1,0}$，$(t>0)$，则 $S_2(L_D(F_{r,s,t}))>10r+5s+10t+1$.

证明　令 $G\cong F_{r,s,t}$，$a=4r+2s+5t+1$，$b=4r+2s+5t-1$，$c=6r+3s+7t$.

通过简单的计算可以得到

$$L_D(G)=\begin{pmatrix}aI_s-2J_s & -2J_{s\times t} & -3J_{s\times t} & -J_{s\times1} & -2J_{s\times2r}\\ -2J_{t\times s} & bI_t-2J_t & 2I_t-3J_t & -J_{t\times1} & -2J_{t\times2r}\\ -3J_{t\times s} & 2I_t-3J_t & cI_t-4J_t & -2J_{t\times1} & -3J_{t\times2r}\\ -J_{1\times s} & -J_{1\times t} & -2J_{1\times t} & 2r+s+3t & -J_{1\times2r}\\ -2J_{2r\times s} & -2J_{2r\times t} & -3J_{2r\times t} & -J_{2r\times1} & B_{2r}\end{pmatrix}.$$

这里 B_{2r} 是一个 r 阶的块矩阵，其对角线上的每一块都为 $(4r+2s+5t-1)I_2-J_2$，其余的块均为 $-2J_2$.

通过观察可得，对每一个 $1\leq m\leq r$，$e_{s+2m+2t}-e_{s+2m+2t+1}$ 都是 $L_D(G)$ 关于特征值 $4r+2s+5t-1$ 的特征向量；对每一个 $2\leq k\leq s$，e_1-e_k 都是 $L_D(G)$ 关于特征值 $4r+2s+5t+1$ 的特征向量.这表明 $4r+2s+5t-1$ 为 $L_D(G)$ 的重数至少为 r 的特征值，$4r+2s+5t+1$ 为 $L_D(G)$ 的重数至少为 $s-1$ 的特征值.

为了确定 $L_D(G)$ 其余的特征值，首先确定它们所对应的特征向量的形式.设 μ_1 为 $L_D(G)$ 的最大的特征值，其对应的特征向量为 Y.由引理 6，就能够设 $Y=(xJ_{1\times s},yJ_{1\times t},zJ_{1\times t},p,qJ_{1\times2r})^{\mathrm{T}}$.再根据特征方程

$L_D Y=\mu_1 Y$ 可以得到

$$\begin{cases}(4r+5t+1)x-2ty-3tz-p-4rq=\mu_1 x,\\ -2sx+(4r+2s+3t-1)y+(-3t+2)z-p-4rq=\mu_1 y,\\ -3sx+(-3t+2)y+(6r+3s+3t)z-2p-6rq=\mu_1 z,\\ -sx-ty-2tz+(2r+s+3t)p-2rq=\mu_1 p,\\ -2sx-2ty-3tz-p+(2s+5t+1)q=\mu_1 q.\end{cases}$$

令 $M=\begin{pmatrix}4r+5t+1 & -2t & -3t & -1 & -4r\\ -2s & 4r+2s+3t-1 & -3t+2 & -1 & -4r\\ -3s & -3t+2 & 6r+3s+3t & -2 & -6r\\ -s & -t & -2t & 2r+s+3t & -2r\\ -2s & -2t & -3t & -1 & 2s+5t+1\end{pmatrix}$,

那么,M 的特征值也是 $L_D(G)$ 的特征值.

经过简单计算,可以确定 M 的特征多项式:

$\psi(j)=j^5-(16r+19t+1+8s)j^4-(-92r^2-92rs-222rt-23s^2-111st-133t^2-14r-7s-19t+5)j^3-(224r^3+336r^2s+824r^2t+168rs^2+824rst+1\,004rt^2+28s^3+206s^2t+502st^2+405t^3+64r^2+64rs+168rt+16s^2+84st+111t^2-32r-16s-39t-9)j^2-(-192r^4-384r^3s-960r^3t-288r^2s^2-1\,440r^2st-1\,788r^2t^2-96rs^3-720rs^2t-1\,788rst^2-1\,470rt^3-12s^4-120s^3t-447s^2t^2-735st^3-450t^4-96r^3-144r^2s-368r^2t-72rs^2-368rst-474rt^2-12s^3-92s^2t-237st^2-205t^3+44r^2+44rs+114rt+11s^2+57st+72t^2+30r+15s+39t+4)j$.

$\psi(0)=0$,$\psi(2r)>0$,$\psi(2r+2s+5t)<0$,$\psi(4r+2s+5t+1-\frac{1}{t})>0$,$\psi(4r+2s+5t+1)=0$,$\psi(6r+3s+5t)<0$,$\psi(8r+4s+7t)>0$.

从上述不等式可以看出,$\mu_1(G)>6r+3s+5t$ 且 $\mu_2(G)\geq 4r+2s+5t+1$.这表明 $S_2(L_D(G))>10r+5s+10t+1$. 根据引理 5~引理 8,就能得到定理 2.

定理 2 若 $r\geq 1,s\geq 1,t\geq 0$,则 $S_2(L_D(F_{r,s,t}))\geq 4n-4$.

3 距离无符号拉普拉斯矩阵第一大与第二大特征值和的下界

引理 9 设 $r\geq 1,s\geq 1$,则 $S_2(Q_D(F_{r,s,0}))>12r+6s-8$.

证明 令 $G\cong F_{r,s,0}$,通过简单计算可以得到

$$Q_D(G)=\begin{pmatrix}(2s+4r-3)I_s+2J_s & J_{s\times 1} & 2J_{s\times 2r}\\ J_{1\times s} & 2r+s & J_{1\times 2r}\\ 2J_{2r\times s} & J_{2r\times 1} & B_{2r}\end{pmatrix}.$$

这里 B_{2r} 是一个 r 阶的块矩阵,其对角线上的每一块都为 $(4r+2s-3)I_2+J_2$,其余的块均为 $2J_2$.

通过观察,看到对每一个 $1\leq m\leq r$,$e_{s+2m}-e_{s+2m+1}$ 都是 $Q_D(G)$ 关于特征值 $4r+2s-3$ 的特征向量;对每一个 $2\leq k\leq s$,e_1-e_k 都是 $Q_D(G)$ 关于特征值 $4r+2s-3$ 的特征向量.这表明 $4r+2s-3$ 为 $Q_D(G)$ 的重数至少为 $r+s-1$ 的特征值.

为了确定 $Q_D(G)$ 其余的特征值,首先确定它们所对应的特征向量的形式.设 q_1 为 $Q_D(G)$ 的最大的特征值,其对应的特征向量为 Z.根据对称性,就能够设 $Z=(xJ_{1\times s},y,zJ_{1\times 2r})^{\mathrm{T}}$.

再根据特征方程 $Q_D Z=q_1 Z$ 可以得到 $\begin{cases}(4r+4s-3)x+y+4rz=q_1 x,\\ sx+(2r+s)y+2rz=q_1 y,\\ 2sx+y+(8r+2s-5)z=q_1 z.\end{cases}$

令 $M=\begin{pmatrix}4r+4s-3 & 1 & 4r\\ s & 2r+s & 2r\\ 2s & 1 & 8r+2s-5\end{pmatrix}$,那么,$M$ 的特征值也是 $Q_D(G)$ 的特征值.

经过简单的计算,可以确定 M 的特征多项式:$\psi(j)=j^3-(14r+7s-8)j^2-(-56r^2-56rs-14s^2+62r+35s-15)j-64r^3-96r^2s-48rs^2-8s^3+96r^2+104rs+28s^2-36r-20s$.

$\psi(2r+s-2)=-20r^2-20rs-5s^2+22r+17s-6<0$,$\psi(2r+s-\frac{1}{2rs})>0$,

$\psi(4r+2s-3)=-8rs-4s^2+10s<0$,$\psi(8r+4s-5)=-8r^2-32rs-14s^2+4r+20s<0$,$\psi(8r+4s-2)=64r^2+40rs+4s^2-8r+2s-6>0$.

从上述不等式可以看出,$q_1(G)>8r+4s-5$,$q_2(G)\geq 4r+2s-3$.

这表明 $S_2(Q_D(F_{r,s,0}))>12r+6s-8$.

引理 10　设 $r\geq 1$,$s\geq 1$,$t>0$,则 $S_2(Q_D(F_{r,s,t}))>10r+5s+10t+1$.

证明　令 $G\cong F_{r,s,t}$,$a=4r+2s+5t-3$,$b=4r+2s+5t-5$,$c=6r+3s+7t-8$.通过简单的计算,可以得到

$$Q_D(G)=\begin{pmatrix} aI_s+2J_s & 2J_{s\times t} & 3J_{s\times t} & J_{s\times 1} & 2J_{s\times 2r} \\ 2J_{t\times s} & bI_t+2J_t & 3J_t-2I_t & J_{t\times 1} & 2J_{t\times 2r} \\ 3J_{t\times s} & 3J_t-2I_t & c\,I_t+4J_t & 2J_{t\times 1} & 3J_{t\times 2r} \\ J_{1\times s} & J_{1\times t} & 2J_{1\times t} & 2r+s+3t & J_{1\times 2r} \\ 2J_{2r\times s} & 2J_{2r\times t} & 3J_{2r\times t} & J_{2r\times 1} & B_{2r} \end{pmatrix}.$$

这里 B_{2r} 是一个 r 阶的块矩阵,其对角线上的每一块都为 $(4r+2s+5t-3)I_2+J_2$,其余的块均为 $2J_2$.

通过观察可得,对每一个 $1\leq m\leq r$,$e_{s+2m+2t}-e_{s+2m+2t+1}$ 都是 $Q_D(G)$ 关于特征值 $4r+2s+5t-3$ 的特征向量;对每一个 $2\leq k\leq s$,e_1-e_k 都是 $Q_D(G)$ 关于特征值 $4r+2s+5t-3$ 的特征向量.这表明 $4r+2s+5t-3$ 为 $Q_D(G)$ 的重数至少为 $r+s-1$ 的特征值.

为了确定 $Q_D(G)$ 其余的特征值,首先确定它们所对应的特征向量的形式.设 q_1 为 $Q_D(G)$ 的最大特征值,其对应的特征向量为 Z.根据对称性,能够设 $Z=(xJ_{1\times s},yJ_{1\times t},zJ_{1\times t},p,qJ_{1\times 2r})^{\mathrm{T}}$.再根据特征方程 $Q_DZ=q_1Z$ 可以得到

$$\begin{cases} (4r++4s+5t-3)x+2ty+3tz+p+4rq=q_1x, \\ 2sx+(4r+2s+7t-5)y+(3t-2)z+p+4rq=q_1y, \\ 3sx+(3t-2)y+(6r+3s+11t-8)z+2p+6rq=q_1z, \\ sx+ty+2tz+(2r+s+3t)p+2rq=q_1p, \\ 2sx+2ty+3tz+p+(8r+2s+5t-5)q=q_1q. \end{cases}$$

令 $d=4r+4s+5t-3$,$e=4r+2s+7t-5$,$f=6r+3s+11t-8$,$g=2r+s+3t$,$h=8r+2s+5t-5$.

$$M=\begin{pmatrix} d & 2t & 3t & 1 & 4r \\ 2s & e & 3t-2 & 1 & 4r \\ 3s & 3t-2 & f & 2 & 6r \\ s & t & 2t & g & 2r \\ 2s & 2t & 3t & 1 & h \end{pmatrix}$$,那么,M 的特征值也是 $Q_D(G)$ 的特征值.

经过简单计算,可以确定 M 的特征多项式:$\psi(j)=j^5-(24r+12s+31t-21)j^4-(-220r^2-220rs-558rt-55s^2-279st-357t^2+386r+197s+481t-155)j^3-(960r^3+1\,440r^2s+3\,624r^2t+720rs^2+3\,624rst+4\,588rt^2+120s^3+906s^2t+2\,294st^2+1\,949t^3-2\,504r^2-2\,552rs-6\,232rt-650s^2-3\,174st-3\,895t^2+1\,992r+1\,050s+2\,467t-483)j^2-(-1\,984r^4-3\,968r^3s-9\,984r^3t-2\,976r^2s^2-14\,976r^2st-18\,908r^2t^2-992rs^3-7\,488rs^2t-18\,908rst^2-15\,982rt^3-124s^4-1\,248s^3t-4\,727s^2t^2-7\,991st^3-5\,090t^4+6\,752r^3+10\,304r^2s+25\,360r^2t+5\,240rs^2+25\,796rst+31\,802rt^2+888s^3+6\,558s^2t+16\,169st^2+13\,327t^3-7\,828r^2-8\,200rs-19\,650rt-2\,143s^2-10\,295st-12\,322t^2+3\,630r+1\,985s+4\,609t-540)j-9\,728r^4t-24\,672r^3t^2-31\,344r^2t^3-19\,960rt^4+12\,736r^3s+9\,696r^2s^2+3\,280rs^3+4\,168s^3t-9\,532s^2t-23\,524st^2-14\,224r^2s-7\,384rs^2+31\,872r^3t+60\,648r^2t^2+51\,268rt^3+15\,628s^2t^2+26\,024st^3+9\,980t^2-35\,248r^2t-45\,168rt^2+1\,628s^2+6\,100sr+8\,168st+5\,688r^2+15\,172rt-19\,456r^3st-$

$14\ 592r^2s^2t - 37\ 008r^2st^2 - 4\ 864rs^3t - 18\ 504rs^2t^2 - 31\ 344rst^3 + 48\ 544r^2st + 24\ 640rs^2t + 61\ 580rst^2 - 36\ 688rst + 416s^4 + 6\ 272r^4 - 1\ 536r^5 - 48s^5 - 5\ 100t^5 - 19\ 220t^3 - 9\ 120r^3 - 1\ 276s^3 + 16\ 260t^4 - 1\ 296r - 720s - 1\ 920t - 3\ 840r^4s - 3\ 840r^3s^2 - 1\ 920r^2s^3 - 480rs^4 - 608s^4t - 3\ 084s^3t^2 - 7\ 836s^2t^3 - 9\ 980st^4$.

$\psi(-5) < 0$,$\psi(4r+2s+5t-5) = -64r^2 - 32rs - 64rt + 144r < 0$,$\psi(4r+2s+5t-3) > 0$,$\psi(8r+4s+7t-5) < 0$,$\psi(20r+20s+20t) > 0$,对于正整数 k,$\psi(20r+20s+20t+k) > 0$

从上述不等式可以看出,$q_1(G) > 8r+4s+7t-5$ 且 $q_2(G) > 4r+2s+5t-3$.这表明 $S_2(Q_D(G)) > 12r+6s+12t-8$. 根据引理 9、引理 10,就能得到定理 3.

定理 3 若 $r \geq 1, s \geq 1, t \geq 0$,则 $S_2(Q_D(F_{r,s,t})) > 6n-14$.

参 考 文 献

[1] Ebrahimi J,Mohar B,Nikiforov V ,et al.On the sum of two largest eigenvalues of a symmetric matrix[J].Linear Algebra Appl,2008,429(11):2871-2787.

[2] Haemers W H,Mohammadian A,Tayfeh-Rezaie B.On the sum of Laplacian eigenvalues of graphs[J].Linear Algebra Appl,2010,432(9):2214-2221.

[3] Ashraf F,Omidi G R,Tayfeh-Rezaie B.On the sum of signless Laplacian eigenvalues of a graph[J].Linear Algebra Appl,2013,438(11):4539-4546.

[4] Oliveira C S,Lima L D,Pama P,et al.Extremal graphs for the sum of the two largest signless Laplacian eigenvalues[J].Electronic Journal of Linear Algebra,2015,30:605-612.

[5] 秦正新,张文丽,王国平,等.沙漏图线图的(无符号)拉普拉斯谱的刻画[J].河南师范大学学报(自然科学版),2015,43(6):8-15.

[6] 靳宇飞,雷英杰,侯强,等.具有 k 个悬挂点的双圈图的 *Harary* 指数[J].河南师范大学学报(自然科学版),2016,44(6):29-35.

[7] Aouchiche M,Hansen P.Two Laplacians for the distance matrix of a graph[J].Linear Algebra Appl,2013,439(1):21-33.

[8] Aouchiche M,Hansen P.Distance spectra of graphs:A survey[J].Linear Algebra Appl,2014,458(2):301-386.

[9] Aouchiche M,Hansen P.Some properties of the distance Laplacian eigenvalues of a graph[J].Czechoslovak Mathematical Journal,2014,64(3):751-761.

[10] Tian F L,Wong D,Rou J L.Proof for four conjectures about the distance Laplacian and distance signless Laplacian eigenvalues of a graph[J].Linear Algebra Appl,2015,471:10-20.

[11] Xing R D,Zhou B.On the distance signless laplacian spectral radius of graphs[J].Linear and Multilinear Algebra,2014,62(10):1377-1387.

[12] Hong W X,You L H.On the eigenvalues of firefly graphs[J].Transactions on Combinatorics,2014,3(3):1-9.

The lower bound of sum of two largest eigenvalues of the distance matrix of firefly graph

Chen Hua, Wang Guoping

(School of Mathematical Science,Xinjiang Normal University,Urumai 830017,China)

Abstract: Let $n = 2r+2t+s+1 (r, s \geq 1, t \geq 0)$, and S_{n-t} be a star with $n-t$ vertices.The firefly graph is such a graph that is obtained by connecting r pairs distinct vertices of S_{n-t} with r edges, and joining t edges to the other t distinct pendant vertices of S_{n-t} respectively.Suppose that G is a firefly graph on n vertices, we determine the lower bounds of the sum of the largest eigenvalue and the second largest eigenvalue of $D(G)$, $L_D(G)$ and $Q_D(G)$ respectively.

Keywords: firefly graphs; characteristic polynomial; sum of the largest eigenvalues and the second largest eigenvalues; lower bounds

[责任编校 陈留院]