文章编号:1000－2367(2019)06－0001－07 DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2019.06.001

具有乘性噪声的随机高阶准地转方程的大偏差

蒲学科[1,2],陆宇婷[1]

(1.重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331;2. 广州大学 数学与信息科学学院,广州 510006)

摘　要:近年来,随机准地转方程受到了许多学者的关注.一方面在于此方程与著名的随机 Navier-Stokes 方程有许多相似之处,另一方面在于准地转方程是地球物理动力学的重要模型.主要讨论带乘性噪声的随机准地转方程.首先,严格证明了在 $d=2,3$ 维上,强解的存在性和温和解的唯一性;其次,基于拉普拉斯原理和弱收敛方法,证明了方程满足大偏差原理.

关键词:大偏差;随机准地转方程;高斯白噪声

中图分类号:O175　　**文献标志码**:A

本文考虑在区域 $D=(0,L)^d$,$d=2,3$ 上带乘性高斯白噪声的随机高阶准地转方程(Stochastic quasi-geostrophic equation ,SQGE)的大偏差,方程形式如下[1]:

$$\Delta\psi_t + J(\psi,\Delta\psi) + \beta\psi_x = \nu\Delta^2\psi - A_b\Delta^3\psi - r\Delta\psi + \sigma(\psi)\frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{1}$$

方程满足如下的无渗透和无滑移的边界条件,在∂D 上,$\psi=\Delta\psi=0$,以及如下的初值条件,$\Delta\psi|_{t=0}=\psi_0$,这里 ψ 是一个流函数,$\beta\geq 0$ 表示 Coriolis 参数的经向梯度,$\nu>0$ 表示黏性耗散常数,$A_b>0$ 表示高阶黏性项,$r>0$ 表示 Ekman 耗散系数,$\mathrm{d}W(t)/\mathrm{d}t$ 定义一个高斯白噪声.$J(f,g)=g_x g_y - f_y g_x$ 代表 Jacobian 算子.由于系数不影响运算,本文中直接取 $\nu=1$,$A_b=1$.

目前已有大量文献对带加性噪声($\sigma(\psi)=1$)的随机准地转方程进行研究,并且严格证明了在一维情况下解的存在唯一性[2-5].2011 年,Yang 和 Duan[6]证明了 $A_b=0$ 条件下,方程 (1) 强解的存在性和温和解的唯一性,并且证明了方程满足大偏差.在本文中,主要考虑具有高阶黏性项(即 $A_b\neq 0$)时的情况,并证明它的大偏差原理.

大偏差原理是概率论与数理统计中一个重要的部分.Varadhan 在其专著中对大偏差的总体框架和一些重要的应用进行了详细阐述[7].大偏差理论起源于 Cramer 定理,随后 Freidlin 和 Wentzell 建立了有限维随机微分方程的大偏差[8-9].此后,许多学者开始研究无穷维的随机微分方程[3-5,10-17].Budhiraja 和 Dupuis[18] 运用随机控制和弱收敛方法来证明$\{\mathscr{G}^E(W(\cdot))\}_{\varepsilon>0}$的大偏差,其中 $\mathscr{G}^E$ 是从 Wiener 空间到 Polish 空间的一簇可测映射,即通过证明满足拉普拉斯原理,从而得到 Wentzell-Freidlin 大偏差[19].

文章主要目的是研究方程 (1) 在小噪声下的大偏差,给出本文的主要结论.

定理 1　设 $\{u^\varepsilon:\varepsilon<0\}$ 是方程(4) 唯一的温和解,概率测度集合$\{\mathscr{L}(u^\varepsilon:\varepsilon\geq 0)\}$ 关于速率函数 $I(g)$ 在空间 $X_T =: C([0,T];H)\cap L^2(0,T;V)$ 上满足拉普拉斯原理,其中速率函数:

$$I(g)=\frac{1}{2}\inf\{|\nu|^2_{L^2(0,T;H)}:g(\cdot)=g^\nu\},$$

规定 $\inf\varnothing=\infty$,且 g^ν 满足骨架方程,控制项为 $\nu\in L^2(0,T;H)$.因为 X_T 是 Polish 空间,所以$\{\mathscr{L}(u^\varepsilon):\varepsilon\geq$

收稿日期:2019-04-08;**修回日期**:2019-09-16.

基金项目:国家自然科学基金(11871172)

作者简介:蒲学科 (1981 —),男 ,四川南部县人,广州大学教授,博士生导师,研究方向为非线性偏微分方程,E-mail:puxueke@gmail.com.

通信作者:陆宇婷 (1994 —),女,江苏常州人,重庆大学硕士研究生,研究方向为随机偏微分方程,E-mail:13101296424@163.com.

$0\}$ 在速率函数 I 下满足大偏差原理.

本文剩余部分结构如下:第一节给出符号说明以及证明温和解的唯一性和强解的存在性;第二节证明带小噪声时方程(1)满足大偏差原理.

1 存在性与唯一性

首先对文章涉及的标记和定理做简单介绍.给定区域 $D=(0,L)^d$,$d=2,3$,$H^k(D)$ 为标准的Sobolev空间,记 $H:=L^2(D)$,$V:=H_0^1(D)$.$(\cdot,\cdot)$ 和 $|\cdot|$ 分别表示 H 上的内积和范数.另外,定义一个Hilbert-Schmidt 空间 $\mathscr{L}_2^0(B_1,B_2)$,对应的范数是 $|\cdot|_{\mathscr{L}_2^0(B_1;B_2)}$,其中 B_i,$i=1,2$ 是两个 Banach 空间.

A 为 Δ 算子在 H 中的表示,定义域记为 $D(A)$.不难发现 $A:H\to H$ 是一个自共轭算子且 A^{-1} 是一个紧算子.当 $s\geq 0$ 时,设 $A^{s/2}$ 的定义域为 V_s,对应的范数为 $|\cdot|_s=:|A^{s/2}|$.V_s 是 H^s 的闭子空间,且 $V_0=H$.并记 V_{-s} 为 V_s 的对偶空间,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 V_s 和 V_{-s} 的对偶积.由庞加莱不等式,$|\cdot|_s$ 和 Sobolev空间 H^s 中的范数等价.

设 $K(t)$ 是定义在空间 V_s,$\forall s\in\mathbf{R}$ 上的解析半群,$M=A-A^2$ 是其无穷小生成元.则 $K(t)$ 满足以下性质[20]:

$$K(t)M^a=M^aK(t),\ |M^aK(t)|\leq ct^{-a},t>0,\text{对任意的 } a\geq 0 \text{ 和 } u\in H.$$

设 $b(u,\nu,z)=J((u,\nu),z)$ 是定义在 $V_{m1+1}\times V_{m2+1}\times V_{m3}$ 空间上的三线性算子,且满足不等式[5]

$$|b(u,\nu,z)|\leq c\,|u|_{m_1}\,|\nu|_{m_2+1}\,|z|_{m_3},\tag{2}$$

其中 $m_i\geq 0$,$i=1,2,3$.如果有 $\forall i$,$m_i\neq d/2$,那么 $m_1+m_2+m_3\geq d/2$;否则,$m_1+m_2+m_3>d/2$.

设 $G:=A^{-1}$,令 $u=A\psi$,$F(u)=-\beta G(u_s)-ru$.且定义一个双线性算子 $B:V\times V\to H$,满足$(B(u,\nu)z)=b(G(u),\nu,z)=J((G(u),\nu),z)$.对任意的 $u,\nu\in V$,有$(G(u_s),u)=0$ 以及$(B(u,\nu),w)=-(B(u,w),\nu)$[5].于是得到方程(1)的抽象形式:

$$\begin{gathered}\mathrm{d}u=(Au-A^2u-B(u)+F(u))\mathrm{d}t+\sigma(G(u))\mathrm{d}W(t),\\ u(0)=\psi_0,\end{gathered}\tag{3}$$

其中 $B(u):=B(u,u)$.

性质 1 定义 $\sigma(\cdot):V_2\to\mathscr{L}_0^2(H;H)$ 是一个有界的李普希兹算子.那么对任意的 $\psi_0\in H$,$d=2,3$,方程(3)存在温和解.

证明与文献[2,12-13]相似,这里省略具体的过程.下面给出温和解的唯一性和强解的存在性.

定理 2 定义 $\sigma(\cdot):V_2\to\mathscr{L}_0^2(H;V_2)$ 是一个有界的李普希斯算子,对任意的 $\psi_0\in V$,方程(3)存在强解且有唯一的温和解.

证明 假设$\{u_n\}$是 u 的 Galerkin 近似,u 是方程(3)的 温和解,运用 Itô 公式得

$$|u_n(t)|_2^2+2\int_0^t|A^{3/2}u_n(s)|^2\mathrm{d}s+2\int_0^t|A^2u_n(s)|^2\mathrm{d}s=|u_n(0)|_2^2-2\int_0^t(B_n(u_n(s))-$$

$$F_n(u_n(s)),A^2u_n(s))\mathrm{d}s+2\int_0^t(\sigma_n(G(u_n(s)))\mathrm{d}W(s),A^2u_n(s))+\int_0^t|A\sigma_n(G(u_n(s)))|_{\mathscr{L}_2^0(H;H)}^2\mathrm{d}s,$$

首先,由不等式(2),令 $m_1=3$,$m_2=1$ 且 $m_3=0$,有

$$2|(B_n(u_n),Au_n)|=2|b(G(u_n),u_n,Au_n)|\leq c\,|u_n|_2^2\,|A^2u_n|\leq\frac{1}{2}|A^2u_n|^2+c\,|u_n|_2^4,$$

然后利用 σ 的有界性和李普希兹性质得到

$$2|A\sigma_n(G(u_n))|_{\mathscr{L}_2^0(H;V_2)}^2\leq c(1+|u_n|^2).$$

最后,

$$2|(F_n(u_n),A^2u_n)|=2|\beta(G(u_n)_x+ru,A^2u_n)|\leq\frac{1}{2}|A^2u_n|^2+c\,|u_n|^2.$$

综合上式得,

$$|u_n(t)|_2^2+\int_0^t|A^2u_n(s)|^2\mathrm{d}s\le|u_n(0)|_2^2+c\int_0^t|u_n(s)|_2^4\mathrm{d}s+$$
$$c_1t+2\int_0^t(A^2u_n(s),\sigma_n(G(u_n(s)))\mathrm{d}W(s)).$$

引入辅助随机过程：$\xi(t)=\exp\{-c\int_0^t|u_n(s)|_2^2\mathrm{d}s\}$. 有

$$\xi(t)|u_n(t)|_2^2+\int_0^t\xi(s)|A^2u_n(s)|^2\mathrm{d}s\le|u_n(0)|_2^2+M(t)+c_1,$$

其中 $M(t)=\int_0^t\xi(s)(A^2u_n(s),\sigma_n(G(u_n(s)))\mathrm{d}W(s))$，在不等式两边取期望并对 $E\sup_{0\le t\le T}|M(t)|$ 运用 Burkhölder-Davis-Gundy 不等式有

$$E\sup_{0\le t\le T}\xi(t)|u_n(t)|_2^2+\xi(T)E\int_0^t|A^2u_n(s)|^2\mathrm{d}s\le 2E|u_n(0)|_2^2+c_T(1+E|u_n|_{C([0,T];H)}^2,$$

于是有 $u_n\in L^2(\Omega;L^2(0,T;V_4)\cap C([0,T];V_2))$.因此，此温和解（$\{u_n:n\in N\}$ 子序列的极限）是一个强解.

接下来证明温和解的唯一性，设 $u_1(t),u_2(t)$ 是方程 (3) 的两个温和解，且有 $u_1(0)=u_2(0)$.令 $\nu(t)=u_1(t)-u_2(t)$，运用 Itô 公式有

$$|\nu(t)|^2+2\int_0^t|\nu(s)|_1^2\mathrm{d}s+2\int_0^t|\nu(s)|_2^2\mathrm{d}s=-2\int_0^t(B(u_1(s))-B(u_2(s)),\nu(s))\mathrm{d}s+$$
$$2\int_0^t(F(u_1(s))-F(u_2(s)),\nu(s))\mathrm{d}s+\int_0^t|\sigma(G(u_1(s)))-\sigma(G(u_2(s)))|_{\mathscr{L}_2^0(H;H)}^2\mathrm{d}s+$$
$$2\int_0^t(\nu(s),\sigma(G(u_1(s)))-\sigma(G(u_2(s)))\mathrm{d}W(s)).$$

由 $(B(u,\nu),\nu)=0$，可以推出$(B(u_1)-B(u_2),\nu)=-(B(\nu),u_1)$. 并再次运用不等式 (2) 有

$$-2(B(u_1)-B(u_2),\nu)=2(B(\nu),u_1)\le c|\nu||\nu|_2|u_1|\le|\nu|_2^2+c|\nu|^2|u_1|^2,$$

其次，

$$2|(F(u_1)-F(u_2),\nu(s))|=2r|\nu|^2,$$

另外，由 σ 算子的李普希兹性和有界性得

$$|\sigma(G(u_1))-\sigma(G(u_2))|_{\mathscr{L}_2^0(H;H)}^2\le c|\nu|^2,$$

最后结合上述不等式得到

$$|\nu(t)|^2\le c\int_0^t|\nu(s)|^2(1+|u_1(s)|^2)\mathrm{d}s+2\int_0^t(\nu(s),\sigma(G(u_1(s)))-\sigma(G(u_2(s)))\mathrm{d}W(s)).$$

两边取期望

$$E|\nu(t)|^2\le cE\int_0^t|\nu(s)|^2(1+|u_1(s)|^2)\mathrm{d}s,$$

由 Gronwall 不等式得，对 $\forall t\in[0,T]$,$E|\nu(t)|^2=0$，即有 $u_1(t)=u_2(t)$　P-a.s.证毕.

2　大偏差

本节仍然在概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\mathscr{F}_{t;t\in[0,T]},P)$ 中讨论，考虑带小噪声的随机准地转方程的大偏差.方程定义如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u^\varepsilon&=(-A^2u^\varepsilon+Au^\varepsilon-B(u^\varepsilon)+F(u^\varepsilon))\mathrm{d}t+\sqrt{\varepsilon}\sigma(G(u^\varepsilon))\mathrm{d}W(t),\\ u^\varepsilon(0)&=\psi_0.\end{aligned}\tag{4}$$

其中 $W(t)$ 是一个柱状维纳过程，具体形式为 $W(t)=\sum_{i=1}^\infty\beta_i(t)e_i(t)$，其中$\{e_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 是 H 中的一组规范正交基，$\{\beta_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 中一列相互独立的标准布朗运动.虽然此级数在 H 中不收敛，但是由 Hilbert-Schmidt 嵌入定理可知，$W(t)$ 在 H_0 中收敛.因此，假设对任意的 $T>0$，有 $W\in C([0,T],H_0)$.

由定理 2 知，存在可测函数 $\mathscr{G}^\varepsilon:C([0,T];H_0)\to X_T=:C([0,T];H)\cap L^2(0,T;V)$ 使得 $u^\varepsilon(\cdot)=$

$\mathscr{G}^{\varepsilon}(W(\cdot))$ P-a.s..由 X_T 是Polish空间,只需证得$\{\mathscr{G}^{\varepsilon}(W(\cdot))\}$满足拉普拉斯原理.假设 $\mathscr{A}$是关于过程 ϕ 的类,其中 ϕ 是 $\mathscr{H}$- 值的、$\mathscr{F}_t$ 可预测的且有 $|\phi|_{L^2(0,T;H)}<\infty$,$P$-a.s..

定义两个空间:

$$S_M=:\{\nu\in L^2(0,T;H):\int_0^T|\nu(t)|_H^2\mathrm{d}t\leq M\},\mathscr{A}_M=:\{\nu\in\mathscr{A}::\nu(\omega)\in S_M\ P\text{-a.s.}\},$$

其中,$M>0$,且 S_M 在弱拓扑下是一个 Polish 空间.

为了得到结论,只需验证以下性质[6].

假设 1 存在一个可测函数 $\mathscr{G}^0:C([0,T];H)\to X_T$,使得对任意的 $M>0$ 有

(1) 如果 $\varepsilon\to 0$ 时,集合$\{\nu^{\varepsilon}\in\mathscr{A}_M:\varepsilon>0\}$依概率收敛到 $\nu\in S_M$,$\mathscr{G}(W(\cdot)+1/\sqrt{\varepsilon}\int_0^{\cdot}\nu^{\varepsilon}(s)\mathrm{d}s)$依概率收敛到 $\mathscr{G}^0\{\int_0^{\cdot}\nu(s)\mathrm{d}s\}$;

(2) 集合 $\mathscr{K}_M=:\{\mathscr{G}^0(\int_0^{\cdot}\nu(s)\mathrm{d}s):\nu\in S_M\}$ 在空间 X_T 上是紧的.

性质 2 若假设 1 成立,那么解集簇 $\{u^{\varepsilon}:\varepsilon>0\}$ 关于速率函数 I 在空间 X_T 上满足拉普拉斯原理,速率函数定义同定理 1.

回顾假设 1 (2),要证 $\mathscr{K}_M$ 的紧性,只需证得水平集 $K_M=\{u^{\nu}\in X_T:\nu\in S_M\}$ 是紧的,其中集合 K_M 中元素由下列骨架方程的解集$\{u^{\nu}:\nu\in S_M\}$ 构成:

$$\frac{\mathrm{d}u^{\nu}}{\mathrm{d}t}=Au^{\nu}-A^2u^{\nu}-B(u^{\nu})+F(u^{\nu})+\sigma(G(u^{\nu}))\nu,\quad u^{\nu}(0)=\psi_0. \tag{5}$$

引理 1 令 $\nu\in S_M$,则 $u_{\varepsilon}^{\nu}(\cdot)=\mathscr{G}^{\varepsilon}(W(\cdot)+(1/\sqrt{\varepsilon})\int_0^{\cdot}\nu(s)\mathrm{d}s)$ 是下述方程在$[0,T]$上唯一的温和解:

$$\mathrm{d}u_{\varepsilon}^{\nu}=(Au_{\varepsilon}^{\nu}-A^2u_{\varepsilon}^{\nu}-B(u_{\varepsilon}^{\nu})+F(u_{\varepsilon}^{\nu})+\sigma(G(u_{\varepsilon}^{\nu}))\nu)\mathrm{d}t+\sqrt{\varepsilon}\sigma(G(u_{\varepsilon}^{\nu}))\mathrm{d}W,\quad u_{\varepsilon}^{\nu}(0)=\psi_0. \tag{6}$$

证明 设 $\nu\in\mathscr{A}_M$,由 $\mathscr{A}_M$ 的定义易知$E(\exp(\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^T|\nu(t)|^2\mathrm{d}t))<\infty$.于是由 Girsanov 定理可知,存在一个在概率测度 P^{ε} 下的柱状维纳过程$W(t)$,P^{ε} 与P 等价.因此,若用$W(t)$代替方程(4)中的$W(t)$,那么u_{ε}^{ν}是方程(4)在测度 P 下的解 ,也是方程(6)在 P 下的解.此外,由 P 和P 的等价性,直接得到方程 (5) 解的唯一性.

证毕.

接下来利用压缩映射原理证明方程 (5) 存在唯一的温和解.

引理 2 设 $\nu\in L^2(0,T;H)$ 为下列骨架方程的控制项,

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=Aw-A^2w-B(w)+F(w)+\sigma(G(w))\nu,\quad w(0)=w_0\in H. \tag{7}$$

则此方程存在唯一的温和解 $w\in X_T$.

证明 令 $w_0\in H$,对任意的 $t\in[0.T_0]$,$T_0\in[0,T]$,有

$$J_{T_0}(w)(t)=K(t)w_0+\int_0^t K(t-s)(-B(w(s))+F(w(s))+\sigma(G(w(s)))\nu(s))\mathrm{d}s=\sum_{i=1}^4 L_i(w)(t).$$

由 $w_0\in H$,$L_1\in C([0,T_0];H)$,又 $L_i(i=2,3,4)$ 属于$C([0,T_0];H)$(方法与唯一性类似),因此 J_{T_0} 将 $C([0,T_0];H)$ 映射到自身.

其次证明 J_{T_0} 是压缩的,首先假设 $w_1,w_2\in C([0,T_0];H)$ 是方程(6) 的两个解.运用半群 $K(t)$ 的性质、等式 $b(u,\nu,\nu)=0$ 以及(2) 式,有

$$|K(t)B(u,\nu),z|=|b(G(u),K(t)z,\nu)|\leq ct^{-5/8-\rho/2}|u||\nu||z|,$$

于是有

$$|L_2(w_1)(t)-L_2(w_2)(t)|\leq\int_0^t|K(t-s)(B(w_1(s))-B(w_2(s)))|\mathrm{d}s\leq$$

$$cT_0^{3/8-\rho/2}(|w_1|_{C([0,T];H)}+|w_2|_{C([0,T];H)})\sup_{t\in[0,T_0]}|w_1(t)-w_2(t)|.$$

对于 L_3,L_4

$$|L_3(w_1)(t)-L_3(w_2)(t)|\leq cT_0\sup_{t\in[0,T_0]}|w_1(t)-w_2(t)|.$$

$$|L_4(w_1)(t)-L_4(w_2)(t)|\leq cT_0^{1/2}|\nu|_{L^2(0,T_0;H)}\sup_{t\in[0,T_0]}|w_1(s)-w_2(s)|.$$

结合上述不等式，得到

$$|J_{T_0}(w_1(t))-J_{T_0}(w_2(t))|\leq c(T_0+T_0^{1/2}+T_0^{3/8-\rho/2})\sup_{0\leq t\leq T_0}|w_1(t)-w_2(t)|.$$

对任意的 $\rho\in(0,\frac{1}{4})$ 以及足够小的 T_0，J_{T_0} 是空间 $C([0,T_0];H)$ 上的压缩映射.由压缩映像原理，J_{T_0} 在 $C([0,T_0];H)$ 中有唯一的不动点，即方程（7）有唯一的局部解.下面运用能量估计证明此局部解实际上是时间上的全局温和解.

方程（7）两边同乘 w 并取积分得

$$\frac{\mathrm{d}|w|^2}{\mathrm{d}t}+2|w|_1^2+2|w|_2^2=-2r|w|^2+2(\sigma(G(w))\nu,w),$$

且由 Gronwall 不等式有，

$$|w(t)|^2+\int_0^t|w(s)|_1^2\mathrm{d}s+\int_0^t|w(t)|_2^2\mathrm{d}s\leq c_T(\exp\{\int_0^t(|\nu(t)|^2+1)\mathrm{d}t\}),$$

式中 C_T 与 ν 无关，所以 $w\in X_T$. 证毕.

下面证明 K_M 的紧性.

定理 3（紧性）　给定一个正数 M，设 $K_M=\{u^\nu\in X_T:\nu\in S_M\}$，其中 u^ν 是方程（5）的温和解且 $u^\nu(0)=\psi_0\in H$，那么 K_M 是 X_T 中的紧集.

证明　假设 $u_n^{\nu_n}$ 是控制项，是 $\nu_n\in S_M$ 时方程（5）的唯一解.由空间 S_M 的弱紧性可知，$L^2(0,T;H)$ 中存在弱收敛于 $\nu\in S_M$ 的弱收敛子列，记为$\{\nu_n\in S_M:n\in\mathbf{N}\}$.设 u^ν 为方程（5）的唯一解，目标是证明 $u_n^{\nu_n}$ 在 X_T 中收敛到 u^ν.

假设 $w_n^{\nu_n}=u_n^{\nu_n}-u^\nu$，有

$$\frac{\mathrm{d}w_n^{\nu_n}}{\mathrm{d}t}=Aw_n^{\nu_n}-A^2w_n^{\nu_n}-B(u_n^{\nu_n})+B(u^\nu)+F(w_n^{\nu_n})+\sigma(G(u_n^{\nu_n}))\nu_n-\sigma(G(u^\nu))\nu.$$

两边同乘 $w_n^{\nu_n}$ 有

$$\frac{\mathrm{d}|w_n^{\nu_n}|^2}{\mathrm{d}t}+2|w_n^{\nu_n}|_1^2+2|w_n^{\nu_n}|_2^2=-2(B(u_n^{\nu_n})-B(u^\nu),w_n^{\nu_n})-2\beta(G(w_n^{\nu_n})_x,w_n^{\nu_n})-$$

$$2r|w_n^{\nu_n}|^2+2(\sigma(G(u_n^{\nu_n}))\nu_n-\sigma(G(u^\nu))\nu,w_n^{\nu_n}).$$

运用与定理 2 相似的估计方法可以得到

$$|(\sigma(G(u_n^{\nu_n}))\nu_n-\sigma(G(u^\nu))\nu,w_n^{\nu_n})|\leq c(1+|\nu_n|^2+|u^\nu|^2)|w_n^{\nu_n}|^2+|\nu_n-\nu|^2.$$

再由 Gronwall 不等式，有

$$|w_n^{\nu_n}|^2+\int_0^t|w_n^{\nu_n}(s)|_1^2\mathrm{d}s+2\int_0^t|w_n^{\nu_n}(s)|_2^2\mathrm{d}s\leq\int_0^t\exp\{c\int_0^t(1+|u^\nu(\tau)|^2\mathrm{d}\tau)\}|\nu_n(s)-\nu(s)|^2\mathrm{d}s,$$

由上式可知，当 ν_n 在 S_M 中弱收敛到 ν 时，$w_n^{\nu_n}$ 在 X_T 中收敛到 0. 证毕.

下面证明 $\mathscr{G}^\varepsilon(W(\cdot)+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^\cdot\nu^\varepsilon(s)\mathrm{d}s)$ 的收敛性.

定理 4（弱收敛）　若 $\{\nu^\varepsilon:\varepsilon>0\}\subset\mathscr{A}_M$ 在 $L^2(0,T;H_0)$ 中弱收敛于 ν，那么 $\mathscr{G}(W(\cdot)+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})\int_0^\cdot\nu^\varepsilon(s)\mathrm{d}s)$

在空间 X_T 中依测度收敛于 $\mathcal{G}(\int_0^{\cdot}\nu(s)\mathrm{d}s)$.

证明 已知 S_M 是 Polish 空间,通过 Skorohod 表示定理可以构造一组随机过程 $(\nu^{\varepsilon},\nu,W^{\varepsilon},W)$,使得 $(\nu^{\varepsilon},W^{\varepsilon})$ 和 (ν,W) 分别与 (ν^{ε},W) 和 (ν,W) 有相同的分布,且 ν^{ε} 在 S_M 中几乎处处收敛到 ν.设 $u_{\varepsilon}^{\nu_{\varepsilon}}$ 是方程 (6) 关于 W^{ε} 和 ν^{ε} 的解,而 u^{ν} 是方程 (5) 关于 ν 的解.由温和解的存在唯一性可知,$(\nu^{\varepsilon},u_{\varepsilon}^{\nu_{\varepsilon}})$,$(\nu,u^{\nu})$ 分别与 $(\nu^{\varepsilon},u_{\varepsilon}^{\nu_{\varepsilon}})$,$(\nu,u^{\nu})$ 有相同的概率分布.假设 $w^{\varepsilon}(s)=u_{\varepsilon}^{\nu_{\varepsilon}}(s)-u^{\nu}(s)$,由公式 Itô 得

$$|w^{\varepsilon}(t)|^2+2\int_0^t|w^{\varepsilon}(s)|_1^2\mathrm{d}s+2\int_0^t|w^{\varepsilon}(s)|_2^2\mathrm{d}s=2\int_0^t(-B(u_{\varepsilon}^{\nu_{\varepsilon}}(s))+B(u^{\nu}(s)),w^{\varepsilon}(s))\mathrm{d}s+$$
$$2\int_0^t(F(w^{\varepsilon}(s)),w^{\varepsilon}(s))\mathrm{d}s+\varepsilon\int_0^t|\sigma(G(u_{\varepsilon}^{\nu_{\varepsilon}}(s)))|_{\mathscr{L}_0^2(H;H)}^2\mathrm{d}s+$$
$$2\sqrt{\varepsilon}\int_0^t(w^{\varepsilon},\sigma(G(u_{\varepsilon}^{\nu_{\varepsilon}}(s)))\mathrm{d}W(s))+2\int_0^t(\sigma(G(u_{\varepsilon}^{\nu_{\varepsilon}}(s)))\nu^{\varepsilon}-$$
$$\sigma(G(u^{\nu}(s)))\nu,w^{\varepsilon}(s))\mathrm{d}s.$$

运用与定理 3 相似的证明方法得到

$$|w^{\varepsilon}(t)|^2+\int_0^t|w^{\varepsilon}(s)|_1^2\mathrm{d}s+2\int_0^t|w^{\varepsilon}(s)|_2^2\mathrm{d}s\le c\int_0^t(1+|u^{\nu}(s)|_1^2+|\nu^{\varepsilon}(s)|^2)|w^{\varepsilon}(s)|^2\mathrm{d}s+$$
$$c_1\varepsilon\int_0^t(1+|u_{\varepsilon}^{\nu_{\varepsilon}}(s)|^2)\mathrm{d}s+\int_0^t|\nu^{\varepsilon}(s)-\nu(s)|^2\mathrm{d}s+M(t),$$

其中 $M(t)=2\sqrt{\varepsilon}\int_0^t(w^{\varepsilon}(s),\sigma(G(u_{\varepsilon}^{\nu_{\varepsilon}}(s)))\mathrm{d}W(s))$.

两边取期望并运用 Gronwall 不等式得

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}|w^{\varepsilon}(t)|^2+\int_0^T|w^{\varepsilon}(s)|_1^2\mathrm{d}s+2\int_0^T|w^{\varepsilon}(s)|_2^2\mathrm{d}s\right)\le\int_0^T\exp\{c\int_0^T(1+|u^{\nu}(s)|_1^2+$$
$$|\nu^{\varepsilon}(s)|^2)\mathrm{d}s\}(|\nu^{\varepsilon}(t)-\nu(t)|^2+c_1\varepsilon(1+|u_{\varepsilon}^{\nu_{\varepsilon}}(t)|^2))\mathrm{d}t.$$

证毕.

最后,证明定理 1.

证明 令 $\mathscr{H}=\{h^f(\cdot)=\int_0^{\cdot}f(s)\mathrm{d}s:f\in L^2(0,T;H)\}$,$g^f$ 是骨架方程的温和解,f 是方程的控制项.定义 $\mathscr{G}^0:C([0,T];H)\to X_T$ 如下:

$$\mathscr{G}^0(h)=\begin{cases}g^f,h\in H,\\0,h\in C(0,T;H)/H.\end{cases}$$

由定理 3 和定理 4 可知,假设 1 成立.再由性质 2 得到定理 1.

证毕.

参 考 文 献

[1] Abramov R V,Majda A J.Low-Frequency Climate Response of Quasigeostrophic Wind-Driven Ocean Circulation[J].J Phys Oceanogr,2012,42(2):243-260 .

[2] Brannan A J,Duan J,Wanner T.Dissipative quasigeostrophic dynamics under random Forcing[J].J Math Anal Appl,1998,228(1):221-233.

[3] Duan J.Aremark in three-dimensional baroclinic quasigeostrophic dynamics[J].Appl Math Comput,1999,106(2):285-288.

[4] Duan J,Kloeden P E,Schmalfuss B.Exponential stability of the quasi-geostrophic equation under random perturbations[J].Progress in Probability,2001,49:241-256.

[5] Duan J,Schmalfuss B.The 3D quasigeostrophic fluid dynamics under random forcing on boundary[J].Commun Math Sci,2003,1:133-154.

[6] Yang D,Duan J.Large deviations for the stochastic quasigeostrophic equation with multiplicative noise[J].J Math Phys,2010,51(5):053301-053301-13.

[7] Varadhan S R S.Large Deviations and Applications[M].Philadelphia:SIAM,1984:101-120.

[8] 李用声,闫威.白噪声驱动的高阶 KdV 型方程的 Cauchy 问题[J].河南师范大学学报(自然科学版),2017,45(4):1-9.

[9] Cardon-Weber C.Large deviations for Burger's type SPDE[J].Stochastic Proc Appl,1999,84(1):53-70.

[10] 黄建华，陈涌，闫威.分数布朗运动驱动的分数阶 Benjamin-Ono 方程的适定性[J].河南师范大学学报(自然科学版)，2017，45(4)：10-14.

[11] Chow P-L.Large deviation problem for some parabolic Itô equations[J].Commun Pure Appl Math，1992，45(1)：97-120.

[12] Da Prato G，Zabczyk J.Stochastic Equations in Infinite Dimensions[M].Cambridge：Cambridge University Press，2014：339-363.

[13] Da Prato G，Zabczyk J.Ergodicity for Infinite Dimensional Systems[M].Cambridge：Cambridge University Press，1996：120-143.

[14] Dembo A，Zeitouni O.Large Deviations Techniques and Applications[M].New York：Springer，2000：115-173.

[15] Dupuis P，Ellis R S.A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations[M].New York：Wiley，1997：230-259.

[16] Peszat S.Large deviation estimates for stochastic evolution equations[J].Probab Theory Relat Fields，1994，98：113-145.

[17] Sowers R.Large deviations for a reaction-diffusion equation with non-Gaussian perturbation[J].Ann Probab，1992， 20(1)：504-537.

[18] Budhiraja A，Dupuis P.A variational respensatation for positive functionals of infinite dimensional Brownian motion[J].Probab Math Stat，2000，20(1)：39-61.

[19] Pazy A.Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations[M].Berlin：Springer，1983：206-225.

[20] 闫威，王宗敏.周期 Ostrovsky 方程的 Gibbs 测度不变性和几乎整体适定性[J].河南师范大学学报(自然科学版)，2017，45(4)：15-28.

Large deviation principle for the prototype model of the wind-driven ocean circulation

Pu Xueke[1,2]，Lu Yuting[1]

(1.School of Mathematics and Statistics，Chongqing University， Chongqing 401331，China；

2.School of Mathematics and Information Science，Guangzhou University，Guangzhou 510006，China)

Abstract：Recently， the Stochastic Quasi-Geostrophic equation has attracted many scholars′ attentions and it has been intensively studied.One reason is due to that it is similar with another more well-known model—Stochastic Navier-Stokes equation， the other is that Quasi-Geostrophic equation is important in the Geostrophic Fluid Dynamics. In this research， we discuss the prototype model of the wind-driven ocean circulation with multiplicative noise. First， we verify the existence of strong solutions and the uniqueness of mild solutions in the dimension two and three. And then we prove a large deviation principle， based on the Laplace principle and the weak convergence methods.

Keywords：large deviations；stochastic quasi-geostrophic equation；Gaussian white noise

[责任编校 陈留院 赵晓华]

本 期 专 家 介 绍

蒲学科,曾任重庆大学教授,博士生导师,现任广州大学数学与信息科学学院教授,博士生导师,美国《数学评论》评论员.于 2009 年在中国工程物理研究院研究生部获得理学博士学位.主要从事非线性偏微分方程的理论研究.曾于 2011 至 2012 年到美国布朗大学做访问学者,于 2013 年入选第二批重庆市高等学校青年骨干教师资助计划.目前已在 *Comm Math Phys*,*Arch Ration Mech Anal*,*SIAM J Math Anal*,*Calc Var Partial Differential Equations*,*J Differential Equations*,*Sci China Math* 等国内外重要的数学刊物上发表论文 40 余篇,和郭柏灵院士合著出版学术专著《随机无穷维动力系统》,*Fractional Partial Differential Equations and their Numerical Solutions* 等,先后主持多项国家自然科学基金项目.

王文晟,河南师范大学特聘教授,博士,博士生导师,2000 年毕业于日本东京大学药学院,获药学博士学位.毕业后在日本科学技术振兴会的资助下,作为特别研究员在日本国立食品药品卫生研究所(NIHS)从事与复制、修复和同源重组相关的遗传病的研究,后转到美国加州大学、罗切斯特大学继续从事相关的研究.2012 年回国,先后被河南师范大学和新乡医学院聘为特聘教授.从研究生阶段开始长期从事人类罕见病发病机制的研究.研究工作涉及 Bloom 综合征、A 型血友病和红斑狼疮等病症.近年来在国家自然科学基金和美国健康卫生研究所的资助下从事与骨相关疾病的研究,如骨消失症和骨关节炎.

我刊微信公众号已开通您可搜索“河南师范大学学报自然科学版”或扫描二维码关注.感谢您的关注!欢迎向我刊投稿.