

# 复杂网络中时间尺度对耦合振子振幅死亡的影响

刘维清,吴徽

(江西理工大学 理学院,江西 赣州 341000)

**摘要:**研究耦合振子的时间尺度与振子相互作用的网络结构对整个耦合系统达到振幅死亡所需的临界耦合强度的影响.结果表明,当振子的时间尺度与所在节点的度正相关时,随着相关强度系数的增加,耦合振子系统达到振幅死亡的参数区间先增加后减小.当正相关强度较弱时,度大的节点先走向振幅死亡,反之,度小的节点先走向振幅死亡,度大的点后走向振幅死亡.当振子的时间尺度与所在节点的度负相关时,随着相关强度系数增加,耦合振子系统达到振幅死亡的参数区间先增加后不变.研究成果可以为理解网络结构对耦合系统动力学的影响分析提供理论支持.

**关键词:**振幅死亡;时间尺度;正相关;负相关

**中图分类号:**O415.5

**文献标志码:**A

耦合非线性系统的合作行为有多种多样的具体表现形式,同步<sup>[1-2]</sup>包括振幅死亡<sup>[3]</sup>是其中的常见现象.研究在相互作用下耦合非线性系统的振幅死亡<sup>[2]</sup>自组织动力学行为,对理解系统的许多合作行为具有重要意义.

耦合振子系统的振幅死亡是指相互作用的振子系统,由于个体间存在频率失配或耦合作用信号传递产生的时间延迟<sup>[4]</sup>或通道的特率响应特性等因素影响而停止振动的现象.振幅死亡现象与阿尔茨海默病和帕金森病这两种常见的神经退行性疾病的产生密切相关<sup>[4]</sup>.人们常采用压制某些不需要的振荡态来实现对这些疾病的控制治疗<sup>[5]</sup>.另一方面,振幅死亡在某种程度会有利于短期记忆<sup>[6]</sup>.对振荡猝灭动力学的研究也为工程中有效控制系统中的不规则振荡,提高控制效率提供理论指导意义.

振子振幅死亡最早由瑞利勋爵<sup>[7]</sup>在实验中被发现.他发现相邻管风琴的管子会因相互作用而出现消音现象.接着分别在耦合化学振子<sup>[8]</sup>,耦合激光系统<sup>[9]</sup>,非线性电路<sup>[10]</sup>实验中被观察到.频率失配<sup>[11-12]</sup>和时间延迟<sup>[13]</sup>是产生振幅死亡的主要机制.实际系统往往是由大量错综复杂的耦合振子构成的.这些系统的相互作用结构可以用复杂网络来描述<sup>[14-18]</sup>.复杂网络的结构特性对耦合振子系统走向振幅死亡的过程会有显著的影响.HOU等<sup>[19]</sup>指出某些随机网络比规则网络更有利于阻止振子的死亡.在无标度网络中,振子走向振幅死亡的过渡过程与振子所处节点的度密切相关<sup>[20]</sup>.随着耦合强度的增加,耦合振子的振幅与节点的度正相关,即度大的节点更容易趋于振幅死亡.

在实际耦合振子网络中,各个振子个体存在差异,每个个体的振荡行为可能具有不同的时间尺度,即有些振子振荡得比较快,而有些则振荡得比较慢.邹为等<sup>[21]</sup>发现在全局耦合全同振子网络中,当不同振子具有随机分布的时间尺度时,随机分布的涨落范围越大,耦合振子达到振幅死亡的参数区域越大.网络结构对耦合振子系统的动力学行为和系统的功能有着重要的影响.当某节点上振子的时间尺度与该节点的邻居数量相关时,耦合振子系统走向振幅死亡的动力学行为尚不清楚.本文将讨论节点上振子的时间尺度与该节点所具有相互作用邻居数量的相关强度对耦合振子系统振幅死亡的影响.结果表明,振子的时间尺度与所在点的度的相关性对耦合振子系统走向振幅死亡的行为有显著影响.

**收稿日期:**2021-03-09;**修回日期:**2021-06-20.

**基金项目:**国家自然科学基金(11765008);江西省科技厅重点项目(2020038).

**作者简介(通信作者):**刘维清(1977—),男,江西兴国人,江西理工大学教授,博士,研究方向为理论物理, E-mail:lwq\_jx@163.com.

## 1 模型

为更好地描述耦合振子网络中各节点上振子的时间尺度特性对耦合振子系统的振幅死亡动力学行为的影响,采用简单的耦合周期振子模型为研究对象<sup>[22]</sup>

$$\dot{Z}_j(t) = \tau_j(1 + i\omega_j - |Z_j(t)|^2)Z_j(t) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N a_{jk}(Z_k(t) - Z_j(t)), \quad (1)$$

其中,  $Z_j(t) = x_j(t) + iy_j(t)$  为振子  $j$  的复变量,  $\epsilon$  为振子之间的相互作用强度,  $\omega_j$  为振子  $j$  的振荡频率, 对于给定不为零的频率  $\omega_j$ , 单个子系统会以频率  $\omega_j$  作周期振荡.  $a_{jk}$  为复杂网络中相互作用的耦合矩阵中的元素. 当振子  $j, k$  之间有相互作用时  $a_{jk} = 1$ , 否则  $a_{jk} = 0$ .

在现实生活中的许多常见的网络通常可分为两大类: 均匀网络(如小世界网络<sup>[14]</sup>或规则网络<sup>[23]</sup>)和非均匀网络(如无标度网络<sup>[15]</sup>). 无标度网络中少量节点与大量的邻居(具有大的节点度  $k$ ), 而大量节点的  $k$  很小. 实际网络通常会同时具有无标度网络和小世界网络两种特性.  $\tau_i$  为振子系统的时间尺度参量, 其大小反映了单个振子系统振荡的快慢程度. 在耦合全同振子系统中, 若所有振子的时间尺度相同, 随着耦合强度的增加, 整个系统会趋于同步态. 而在实际振子系统中, 每个振子的时间尺度可能不一致, 考虑时间尺度  $\tau_j$  与网络中节点的度具有相关性形式

$$\tau_j = \frac{k_j^\alpha}{k}, \quad (2)$$

其中,  $\alpha > 0$  表示节点上的振子的时间尺度与节点的度参量正相关, 度较大的节点的时间尺度较大, 而  $\alpha < 0$  表示其与节点度负相关, 即度较大的节点的时间尺度较小,  $\alpha = 0$  表示固定时间尺度的情形. 其中  $K$  为复杂网络的总连边数. 为了考查复杂网络中各节点所在振子的时间尺度与度相关程度对耦合振子系统走向振幅死亡的影响, 随机生成一个节点数为  $N$ , 平均度为 2 的无标度网络.

## 2 理论分析

对于(1)式描述的耦合振子系统, 为了讨论不同时间尺度对耦合振子系统振幅死亡的影响, 需要确定耦合振子系统振幅死亡的稳定性. 当耦合强度为 0 时, 单个振子系统  $Z_j(t)$  是以频率为  $\omega_j$  的周期振荡, 且单个子系统存在不稳定不动点  $Z(t) = (0, 0)$ . 当所有振子的时间尺度均相等时, 耦合振子系统会随着耦合强度的增加而走向完全同步, 耦合系统为同步振荡态, 且存在不稳定不动点  $(0, 0)$ . 当网络中各个振子具有不同的时间尺度时, 随着耦合强度的增加, 原来不稳定的不动点会在合适的参数下变成稳定不动点, 从而出现振幅死亡. 因此, 可以基于线性稳定性分析方法, 确定不同时间尺度下, 耦合振子系统在不同参数区间的不动点稳定性, 从而确定振幅死亡所需的参数区间. 具体求解过程如下, 对耦合振子系统中每个振子的不动点  $(0, 0)$  上加小扰动  $\xi_j, j = 1, 2, \dots, N$ , 则耦合系统的线性化方程可以表示为

$$\dot{\xi}_j(t) = \tau_j(1 + i\omega_j)\xi_j(t) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{m=1}^N a_{jk}(\xi_m(t) - \xi_j(t)), j = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

令  $\xi(t) = [\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_N(t)]$  将公式(3)写成向量形式  $\dot{\xi}(t) = \mathbf{H}\xi(t)$ , 其中矩阵  $\mathbf{H}$  的元素为

$$h_{j,m} = \begin{cases} \tau_j(1 + i\omega) - \frac{\epsilon}{N}k_j, & j = m, \\ \frac{\epsilon}{N}a_{j,m}, & j \neq m. \end{cases}$$

则不动点  $(0, 0)$  的稳定区对应于所有使  $\mathbf{H}$  的所有特征值实部小于零的参数区间.

## 3 结果分析

### 3.1 相关系数对振幅死亡区域的影响分析

简单起见, 先以  $N = 30$  网络为例分析(后文结果表明对于大的  $N$ , 规律与小  $N$  一致). 当  $\alpha = 0$  时, 所有振

子的时间尺度相同,整个耦合振子系统会随着耦合强度的增加走向完全同步态.随着 $\alpha$ 从0开始增加,耦合振子的时间尺度与节点所在振子的度的正相关强度增强.当 $\alpha=0.5$ 时,耦合振子在参数空间 $\omega \sim \epsilon$ 中的振幅死亡区间为V形区域. $\omega > 6$ 时,当耦合强度增加到1时,耦合振子走向振幅死亡,继续增加到某一临界值后,耦合振子又返回到振荡态,如图1(a)中黑色区域所示.当 $\alpha=1.0$ 时,V形区域的右边界整体下移,使得耦合振子系统的振幅死亡的参数区间扩大如图1(b).值得注意的是,此时V形区域的左边界保持不变,即达到振幅死亡所需的最小临界耦合强度不变.继续增加 $\alpha=1.5$ 时,振幅死亡的V形区域的右边界继续下移,同时左边界右移,即达到振幅死亡所需的左边最小临界耦合强度变大如图1(c).当 $\alpha=2.0$ 时,振幅死亡V形区域右边界下移使振幅死亡区域接近于方形如图1(d).继续增加 $\alpha$ ,方形振幅死亡区域整体往右上移动,最后在给定的参数域 $\epsilon \in [0,10], \omega \in [0,15]$ 内没有振幅死亡区域.

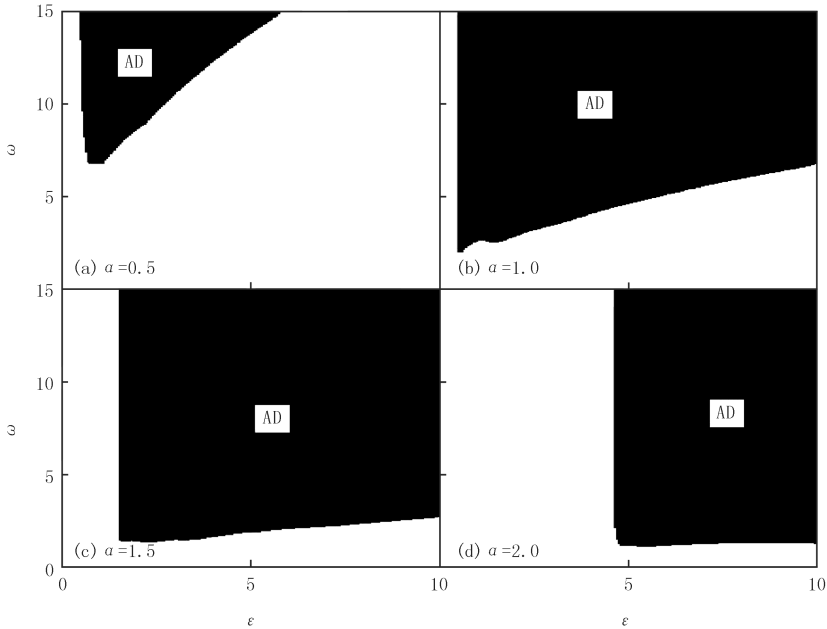


图1  $\alpha > 0$ 时, 参数空间 $\omega \sim \epsilon$ 中振幅死亡(AD)区域(黑色)

Fig.1 The amplitude death(AD) area(black) in the parameters space  $\omega \sim \epsilon$  for  $\alpha > 0$

为了全面了解耦合振子系统的振幅死亡参数区间随相关强度系数 $\alpha$ 变化的规律,定义振幅死亡区域占比率 $\eta = \frac{S_{AD}}{S_T}$ ,其中 $S_{AD}$ 表示振幅死亡参数区间的面积. $S_T$ 表示取定的有限参数区域 $\epsilon \in [0,15], \omega \in [0,15]$ 的总面积.由图2可知,随着时间尺度与度正相关系数增加,振幅死亡参数区间占比率由0先增加后减小到零,存在使振幅死亡区间达到最大值的正相关系数 $\alpha_0 = 1.5$ . $N$ 增加时,时间尺度与度正相关系数 $\alpha$ 与振幅死亡区域占比率的关系保持不变,随着 $N$ 增加,最大振幅死亡区占比率对应的 $\alpha_0$ 减小.

### 3.2 相关系数对具有不同度的节点走向振幅死亡的临界耦合强度的影响

下面分析复杂网络中,不同的时间尺度对耦合振子走向振幅死亡所需临界耦合强度的影响.文献[20]指出无标度网络中,没有时间尺度差异下,具有随机频率分布的耦合振子度大节点先走向小振幅振荡,即度大

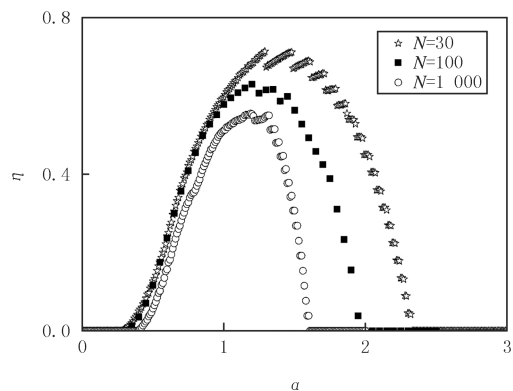


图2 不同 $N$ 振幅死亡区域占比率 $\eta$ 随 $\alpha$ 的变化关系图

Fig.2 The relationship between the ratio of the amplitude death area and  $\alpha$  for different  $N$

的节点达到振幅死亡所需临界耦合强度更小.在频率相同的耦合振子系统中,采用(2)式所确定的时间尺度分布时,在  $\alpha < 1.0$  时,度大的点会先迅速走向小振幅振荡,如图 3(a)所示,当  $\alpha = 0.5$  时,度大的点(1,2号振子)首先在耦合强度  $\epsilon = 0.2$  时变成小振幅振荡,接着度更小的点依次降为小振幅振荡,直至耦合强度  $\epsilon = 0.55$  时所有振子变为振幅死亡.当  $\alpha = 1.0$  时(图 3(b)),所有振子均在  $\epsilon = 0.55$  时达到振幅死亡.当  $\alpha = 1.5$  时如图 3(c),度为 1 的节点在  $\epsilon = 0.55$  时先达到振幅死亡,而后按度从小到大依次达到振幅死亡.其中度最大的节点(1 号节点)在耦合强度为  $\epsilon = 1.45$  时达到振幅死亡.当  $\alpha = 2.0$  时如图 3(d),度为 1 的节点依然在  $\epsilon = 0.55$  时先达到振幅死亡.度最大的节点在  $\epsilon = 3.45$  时达到振幅死亡.

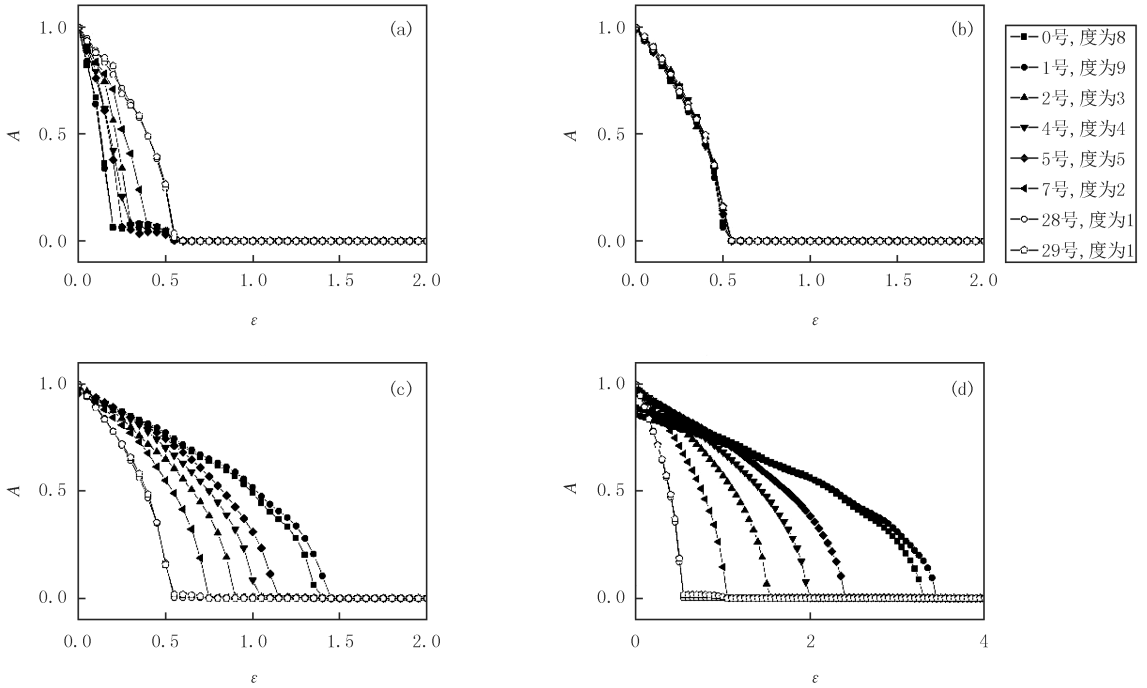


图3 振子振幅A随耦合强度变化  $\epsilon$  关系图

Fig.3 The relation between the amplitude  $A$  and the coupling strength  $\epsilon$

由图 4 可知度小的节点达到振幅死亡所需临界耦合强度不受  $\alpha$  的影响,而度大的节点达到振荡死亡所需的临界耦合强度随  $\alpha$  增加而增加.

### 3.3 负相关系数对耦合振子振幅死亡的影响

$\alpha < 0$  时,随着的绝对值增加,耦合振子的时间尺度与节点所在振子的度的负相关强度越强.由于  $\alpha$  为负时(2)式中的时间尺度分布差异非常大,需要对时间尺度做归一化处理以减小时间尺度分布差异

$$\tau_j = \tau_m \frac{k_j^\alpha}{K^\alpha},$$

其中,  $\tau_m$  为归一化后时间尺度的上限制(取 0.1),  $K$  为网络中节点的度的最大值.  $k_j$  为节点  $j$  的度. 同样地,利用稳定性分析可得不同负相关强度系数  $\alpha$  下耦合振子系统振幅死亡的参数区域.结果表明,随着负相关强度系数绝对值的增加,耦合振子系统在参数空间  $\omega \sim \epsilon$  的振幅死亡区域先逐渐增加,然后保持不变(图 5).

由振幅死亡区域占比  $\eta$  随  $\alpha$  的变化关系(如图 6 所示)可以直观地反映振幅死亡区域随负相关强度系数  $\alpha$  的变化.当  $\alpha = -2$  时,耦合振子系统振幅死亡参数区域面积达到最大值.值得注意的是,当耦合振子系统的时间尺度与网络节点度成负相关时,在所有  $\alpha$  值

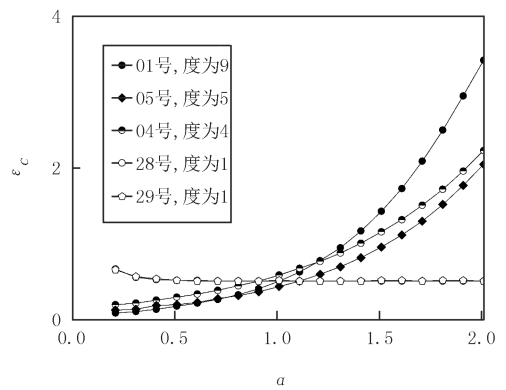


图4 不同度的节点进入振幅死亡的临界耦合强度随  $\alpha$  的变化关系图  
Fig.4 The critical coupling strength for amplitude death for nodes with different degree

下,节点度大的振子均先进入振幅死亡态,度小的振子后进入振荡死亡态。

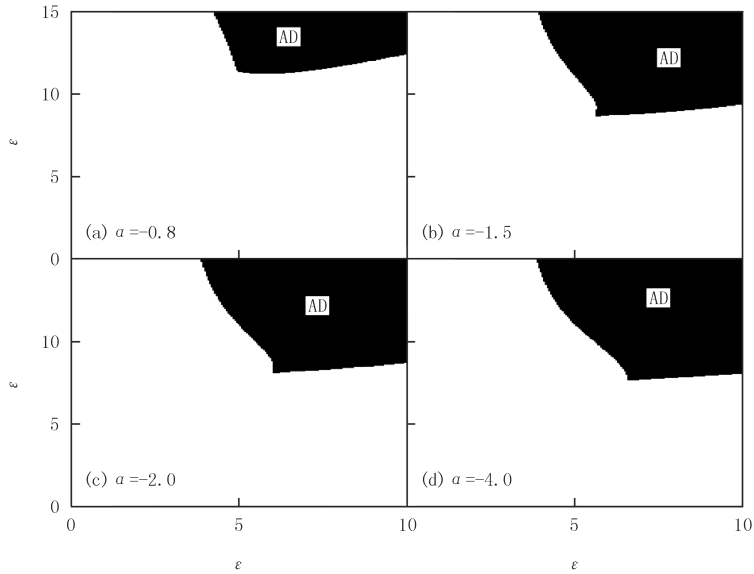


图5  $a < 0$ 时参数空间  $\omega \sim \varepsilon$  下振幅死亡(AD)区域(黑色)

Fig.5 The amplitude death (AD) area(black) of parameter space  $\omega \sim \varepsilon$  for  $a < 0$

## 4 结 论

通过无标度网络中引入与网络结构相关的不同时间尺度,可以使原本同步的耦合振子系统走向振幅死亡。随着时间尺度与网络度参数的正相关性增强,耦合振子系统在参数空间的振幅死亡区域会先增加后减少。而随着时间尺度与网络度参数的负相关性增强,耦合振子系统在参数空间的振幅死亡区域会增加直至某一恒定区域。显然,网络的结构参数影响下的时间尺度对耦合振子系统达到振荡死亡所需参数条件有显著的影响。本文研究的结论不受网络尺寸的影响,大尺寸网络中的结论与小尺寸网络中的结论相似。

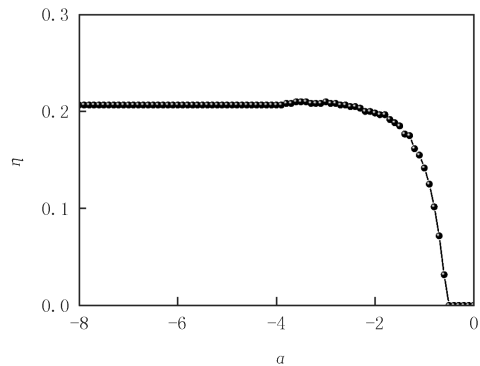


图6 振幅死亡区域占比率随  $a$  的变化关系图

Fig.6 The relationship between the ratio of the amplitude death area and  $a$

## 参 考 文 献

- [1] PIKOVSKY A, ROSENBLUM M, KURTHS J. Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [2] 张伟婧, 刘维清, 陈伟. 规则网络中流耦合作用对爆发式同步的影响[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2018, 46(1): 50-59.  
ZHANG W J, LIU W Q, CHEN W. Effects of gradient coupling on the explosive synchronization in regular network[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2018, 46(1): 50-59.
- [3] KOSESKA A, VOLKOV E, KURTHS J. Oscillation quenching mechanisms: Amplitude vs. oscillation death[J]. Phys Rep, 2013, 531: 173.
- [4] 李文林, 苗静, 刘振红. 含时滞的复杂动态网络模型的指数同步[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2009, 37(5): 1-4.  
LI W L, MIAO J, LIU Z H. Exponential synchronization of complex dynamical networks with time-delay[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2009, 37(5): 1-4.



- [5] TUKHLINA N, ROSENBLUM M, PIKOVSKY A, et al. Feedback suppression of neural synchrony by vanishing stimulation[J]. *Phys Rev E*, 2007, 75: 011918.
- [6] GROSSBERG S. Pattern formation by the global limits of a nonlinear competitive interaction in n dimensions[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 4(3): 237-256.
- [7] RAYLEIGH J W S. The theory of sound[M]. 2nd ed. New York: Dover Publications, 1945: 1877-1878.
- [8] CROWLEY M F, EPSTEIN I R. Experimental and theoretical studies of a coupled chemical oscillator: Phase death, multistability, and in-phase and out-of-phase entrainment[J]. *Journal of Physical Chemistry*, 1989, 93(6): 2496-2502.
- [9] LEE D S, RUE J W, PARK Y J, et al. Stabilization of a chaotic laser and quenching[J]. *Appl Phys Lett*, 2005, 86: 181104.
- [10] COPELAND J A. A new mode of operation for bulk negative resistance oscillators[J]. *Proc Lett IEEE*, 1966, 54(10): 1479.
- [11] ATAY F M. Total and partial amplitude death in networks of diffusively coupled oscillators[J]. *Physica D*, 2003, 183: 1-18.
- [12] YANG J Z. Transitions to amplitude death in a regular array of nonlinear oscillators[J]. *Phys Rev E*, 2007, 76: 16204.
- [13] REDDY D V R, SEN A, JOHNSTON G L. Time delay effects on coupled limit cycle oscillators at Hopf bifurcation[J]. *Physica D*, 1999, 129(1/2): 15-34.
- [14] WATTS D J. The "New" science of networks[J]. *Annual Review of Sociology*, 2004, 30: 243-270.
- [15] BARABASI A L. *Linked: The New Science of Networks*[M]. Massachusetts: Persus Publishing, 2002.
- [16] 方锦清, 汪小帆, 郑志刚, 等. 一门崭新的交叉科学: 网络科学(上)[J]. *物理学进展*, 2007, 27(3): 239-343.  
FANG J Q, WANG X F, ZHENG Z G, et al. New Interdisciplinary Science: Networkscience(I)[J]. *Progress in Physics*, 2007, 27(3): 239-343.
- [17] 方锦清, 汪小帆, 郑志刚, 等. 一门崭新的交叉科学: 网络科学(下)[J]. *物理学进展*, 2007, 27(4): 361-448.  
FANG J Q, WANG X F, ZHENG Z G, et al. New interdisciplinary science: network science(II)[J]. *Progress in Physics*, 2007, 27(4): 361-448.
- [18] ALBERT R, BARABASI A L. Statistical mechanics of complex networks[J]. *Phys Rev Mod*, 2002, 74: 47.
- [19] HOU Z H, XIN H. Oscillator death on small-world networks[J]. *Phys Rev E*, 2003, 68: R055103.
- [20] LIU W Q, WANG X G, GUAN S G, et al. Transition to amplitude death in scale-free networks[J]. *New J Phys*, 2009, 11: 093016.
- [21] ZOU W, ZHAN M, KURTHS J. Amplitude death in globally coupled oscillators with time-scale diversity[J]. *Phys Rev E*, 2018, 98: 062209.
- [22] MATTHEWS P C, STROGATZ S H. Phase diagram for the collective behavior of limit-cycle oscillators[J]. *Phys Rev Lett*, 1990, 65(65): 1701-1704.
- [23] 刘维清, 蓝晶, 钟建环, 等. 不同边界条件下频率空间排列对耦合振子振幅死亡的影响[J]. *江西理工大学学报*, 2014, 35(1): 75-82.  
LIU W Q, LAN J, ZHONG J H, et al. Effects of the spatial frequency distribution on the oscillation death of coupled oscillators with different boundary conditions[J]. *Journal of Jiangxi University of Science and Technology*, 2014, 35(1): 75-82.

## The effects of the time scale on the amplitude death in the coupled oscillators with complex network

Liu Weiqing, Wu Hui

(School of Science, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China)

**Abstract:** The effects of the time scale related to the network structural parameter on the critical coupling strength needed for amplitude death of coupled oscillators are explored. With the positive coherence between the time scale and the degree of the nodes becomes stronger, the parameter space of amplitude death firstly increases then decreases. As the coherence becomes weak, the nodes with the largest degree transit to amplitude death first. While the nodes with the smallest degree transit to amplitude death first as the coherence becomes strong. With the negative coherence between the time scale and the degree of the nodes, the increment of the coherence tends to enlarge the parameters space of amplitude death to a constant value. The results are beneficial to better understand the effects of the network structural parameters on the dynamics of the coupled system.

**Keywords:** amplitude death; time scale; positive coherence; negative coherence

[责任编辑 杨浦 刘洋]

## 本期专家介绍



周雄伟,中南大学教授,博士,博士生导师,服务科学与服务管理研究中心主任,运营与供应链研究中心专家,南加州大学马歇尔商学院访问学者,中国运筹学会随机服务与运作管理分会理事,中国系统工程学会可持续运营与管理系统分会理事,湖南系统工程与管理学会工业工程分会副会长.主要从事战略与决策管理、物流与供应链管理、运营管理与服务科学、电子商务与营销科学、金融科技等方面的研究工作.主持国家自然科学基金面上项目 2 项,参与国家自然科学基金重大项目、重大研究计划项目、国际合作重大项目、重点项目和国家社科基金重大项目等多项.已在 *Journal of Business Ethics*,《管理科学学报》《中国管理科学》《中国工业经济》等期刊发表原创论文多篇.担任湖南省自然科学基金会评审专家,国家自然科学基金委管理科学部通讯评审人,担任 *Annals of Operation Research*, *International Journal of Production Research*,《管理科学学报》和《中国工业经济》等杂志审稿人.

刘维清,江西理工大学教授(二级),江西理工大学理学院物理电子系主任,物理电子学博士,江西省百千万人才人选,江西省中青年学科带头人,江西省井冈之星青年科学家培养对象,北京市优秀博士毕业论文获得者,江西省物理学会理事,曾在新加坡国立大学和美国加州大学洛杉矶分校访学,中国科学院武汉物理与数学研究所博士后.主持国家自然科学基金项目 3 项,江西省科技项目 7 项,获江西省自然科学二等奖 1 项,江西省自然科学三等奖 1 项,获江西省高等学校科技成果一等奖、二等奖各 1 项.在 *Journal of Physics*, *Nonlinear Dynamics*, *Physical Review E*, *Chaos* 等期刊上发表 SCI 收录论文 39 篇.获得授权国家发明专利 2 件,在科学出版社出版学术专著 1 部.主要从事混沌动力学、时空混沌、混沌同步和反同步控制、统计物理基本问题等方面的研究.



本刊微信公众号已开通.您可搜索“河南师范大学学报自然科学版”或扫描二维码关注.感谢您的关注! 欢迎向我刊投稿.