文章编号:1000－2367(2019)02－0008－05 **DOI**:10.16366/j.cnki.1000－2367.2019.02.002

本原有向图 $D\{n-t-1,n-t\}$ 的广义 μ-scrambling 指数

刘卫华[1],黄海松[2]

(1.河南农业大学 信息与管理科学学院,郑州 450002;2.郑州工商学院 公共基础教学部,郑州 450026)

摘 要:用 $D\{n-t-1,n-t\}$ 表示具有两个 $n-t-1$ 长圈、一个 $n-t$ 长圈的本原有向图.运用数学归纳方法,结合图论及其构造,来研究此类本原图,得到该本原有向图的 λ 重下 μ-scrambling 指数及 λ 重上 μ-scrambling 指数.

关键词:本原有向图;λ 重下 μ-scrambling 指数;λ 重上 μ-scrambling 指数

中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A

对于一个本原的随机矩阵 $\boldsymbol{S}$ 来讲,$\boldsymbol{S}$ 的第二大特征值的模的上界是非常重要的,它们决定了相应的矩阵幂序列的渐近收敛速度.2009 年 Akelbek 和 Kirkland 引入了本原有向图的 scrambling 指数的概念,并讨论了一类含有哈密顿圈且最小圈长为 s 的 n 阶本原有向图的 scrambling 指数的上界[1-2].2000 年 Cho、Kim 和 Nam 将竞赛图推广到 *m-step* 竞赛图中[3].2010 年 Huang 和 Liu 介绍了在一个无记忆的通信系统的背景下,引入了本原有向图的广义 scrambling 指数的定义,同时还提供了几类本原有向图的广义 scrambling 指数的精确上界和下界[4].1990 年 Brualdi 和 Liu 考虑了一个无记忆通信系统,用图形来表示,即以一个具有 n 个顶点的本原有向图 D 表示,令 λ,μ 是整数并且 $1\leq\lambda,\mu\leq n$[5].如果有向图 D 是本原的,就可以保证存在一个最短的时间内,有 μ 个顶点知道所有 λ 个顶点的信息.那么目前值得研究的一个问题就是这个最短的时间具体是多少? 为了刻画这一问题,提出了广义 scrambling 的定义.2012 年 Zhang 和 Huang 给出了一些本原有向图的广义 μ-scrambling 指数的上下界[6].本文运用数学归纳方法,结合图论及其构造,来刻画一类特殊本原图 $D\{n-t-1,n-t\}$ 的广义 μ-scrambling 指数,得到本原有向图 $D\{n-t-1,n-t\}$ 的 λ 重下 μ-scrambling 指数和 λ 重上 μ-scrambling 指数.

1 预备知识

定义 1[7] 设 D 是 n 阶本原有向图,如果存在正整数 k,对 D 中任意顶点 ν_i 和 ν_j,总有 $w\in V(D)$ 使得从 w 到 ν_i 和 ν_j 都有 k 长途径,满足这样条件的最小正整数 k 称为 n 阶本原有向图 D 的 scrambling 指数,记作 $k(D)$.

定义 2[8] 令 $D\in P_n$,$1\leq\lambda,\mu\leq n(\lambda,\mu\in\mathbf{Z}^+)$,$X\subseteq V(D)$,若在 D 中存在 μ 个顶点 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_\mu$,对任意 $x\in X$,都有从 x 到 $\omega_i(i=1,2,\cdots,\mu)$ 的 m 长路径:

(1)满足以上条件的最小正整数 m 称为 n 阶本原有向图 D 的 λ 重下 μ-scrambling 指数,记作

$$h(D,\lambda,\mu):=\min\{k_X^{(\mu)}\mid X\subseteq V(D)\text{ 且 }|X|=\lambda\};$$

(2)满足以上条件的最大正整数 m 称为 n 阶本原有向图 D 的 λ 重上 μ-scrambling 指数,记作

$$k(D,\lambda,\mu):=\max\{k_X^{(\mu)}\mid X\subseteq V(D)\text{ 且 }|X|=\lambda\}.$$

本原有向图 D 的 λ 重下 μ-scrambling 指数和 λ 重上 μ-scrambling 指数统称为广义 μ-scrambling 指数,当 $\mu=1$ 时,称为广义 scrambling 指数.

收稿日期:2017-12-25;**修回日期**:2018-09-13.

基金项目:河南省高等学校重点科研项目(16A630016;18A110031)

作者简介(通信作者):刘卫华(1985－),女,河南开封人,河南农业大学讲师,博士,研究方向为组合数学,图论方向,E-mail:lwh20081506@163.com.

2　主要结论及证明

引理 1　D 为 n 阶本原有向图，其中 D 的基础图含有两个长为 $n-t-1$ 的圈，一个长为 $n-t$ 的圈，$L(D)=\{n-t-1,n-t\}$，$\gcd(n-t-1,n-t)=1$，则

$$h(D,\lambda,\mu)=4+(\lambda+\mu)(n-t-1)-3(n-t),\lambda+\mu\le n+1,(\lambda\ge 2,\mu\ge 1).$$

证明　令 $t=4+(\lambda+\mu)(n-t-1)-3(n-t)$，不失一般性设 $d_D^+(\nu_{n-t-1})\ge 2$，ν_{n-t-1} 是一个环点，存在一个 $\lambda-1$ 个点的集合 X'，易见 X' 中的点到 ν_{n-t-1} 的距离最长为 $\lambda-1$，并且存在至少 $\mu-1$ 个不同的点 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{\mu-1}$ 且 $\omega_i\ne\nu_{n-t-1}(i=1,2,\cdots,\mu-1)$ 使得 $\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{\mu-1}\}\subseteq R_{\mu-1}^{D^{n-t-1}}(\{\nu_{n-t-1}\})$.

令 $X'=\{\nu_{q_i}\mid\nu_{q_i}\xrightarrow{k_i}\nu_{n-t-1},1\le k_i\le\lambda-1$ 且 $w\in V(D)\ne\nu_{q_i},d(w,\nu_{n-t-1})\ge\max\limits_{1\le i\le m}k_i,i=1,2,\cdots,m(m<n)\}$，$X''=\{\nu_{q_i}\mid i=1,2,\cdots,\lambda-1\}\subseteq X'$ 是一个具有 $\lambda-1$ 个点的集合，$X=X''\cup\{\nu_{n-t-1}\}$，则 $|X|=\lambda$.

在 $D^{(n-t-1)}$ 中，对任意 $\nu_{q_i}\in X''$，$d(\nu_{q_i},\nu_{n-t-1})\le\lambda-2(i=1,2,\cdots,\lambda-1)$，则 $\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_{\mu-1},\nu_{n-t-1}\}\subseteq\bigcap\limits_{x\in X}R_{\mu-1}^D(\{x\})$，即 $|\bigcap\limits_{x\in X}R_{\mu-1}^D(\{x\})|\ge\mu$，得

$$h(D,\lambda,\mu)\le(\lambda+\mu-3)(n-t-1)<4+(\lambda+\mu)(n-t-1)-3(n-t).$$

令 $k'=\lfloor n/n-t-1\rfloor$，首先考查点 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_{n-t-1}$，易知对于 $\nu_{n-t-i-1}$，有 $R^D_{(\lambda+\mu-3)(n-t-1)}(\{\nu_{n-t-i-1}\})=R_{\lambda+\mu-3}^{D^{(n-t-1)}}(\{\nu_{n-t-i-1}\})=\{\nu_{j(n-t-1)-i(\bmod n)}\mid j=1,2,\cdots,\lambda+\mu-2\}(i=0,1,\cdots,n-t-2)$，令 $k_i=\lfloor(n-i)/n-t-1\rfloor$，$(n-t\le i\le n)$，则 $0\le k_i\le k'-1$. 对于 $i=n-t,n-t+1,\cdots,n$，易得，$R^D_{(\lambda+\mu-3)}(\{\nu_i\})=R_{\lambda+\mu-3}^{D^{(n-t-1)}}(\{\nu_i\})=\{\nu_{i+j(n-t-1)(\bmod n)}\mid j=0,1,\cdots,\lambda+\mu-3\}$.

设 X 是任意 λ 个点的集合，$X_i=\{\nu_{i-j(n-t-1)}\mid j=0,1,\cdots,\lambda-1\}$，$(i=1,2,\cdots,n-t-1)$ 为一个点集，则 $|X_i|=\lambda$.

如果 $X=X_i$，那么

$$|\bigcap_{x\in X}R^D_{(\lambda+\mu-3)(n-t-1)}(\{x\})|=|\{i+j(n-t-1)(\bmod n)\mid j=0,1,\cdots,\mu-2\}|=\mu-1.$$

如果 $X\ne X_i$，那么 $|\bigcap\limits_{x\in X}R^D_{(\lambda+\mu-3)(n-t-1)}(\{x\})|<\mu-1,(i=1,2,\cdots,n-t-1)$，得 $h(D,\lambda,\mu)\ge 4+(\lambda+\mu)(n-t-1)-3(n-t)$.

综上 $h(D,\lambda,\mu)=4+(\lambda+\mu)(n-t-1)-3(n-t),\lambda+\mu\le n+1,(\lambda\ge 2,\mu\ge 1)$.

引理 2　D 为 n 阶本原有向图，其中 D 的基础图含有两个长为 $n-t-1$ 的圈，一个长为 $n-t$ 的圈，$L(D)=\{n-t-1,n-t\}$，$\gcd(n-t-1,n-t)=1$，则

$$h(D,\lambda,\mu)=2+\lambda+\mu-2n+(n-2)(n-t),\lambda+\mu>n+1,(\lambda\ge 2,\mu\ge 1).$$

证明　设 $\lambda+\mu=n+k(2\le k\le n)$，因为 $d^+(\nu_{n-t-1})\ge 2$，显然存在两个孤立点 (ν_{n-t-1},x)，(ν_{n-t-1},y)，$x\in V(C_{n-t-1})$. 故 $D^{(n-t-1)}$ 中 x 是一个环点且存在一条弧 (x,y)，所以 $|R^D_{1+(n-2)(n-t-1)}(\{\nu_{n-t-1}\})|\ge|R^D_{(n-2)(n-t-1)}(\{x,y\})|\ge n$.

由于 D 是本原有向图，所以 $|R^D_{l'+(n-2)(n-t-1)}(\{\nu_{n-t-1}\})|=n(2\le l'\le n)$.

因此，$|R^D_{l+(n-2)(n-t-1)}(\{\nu_{n-t-1}\})|=n(1\le l\le n)$，即 $R^D_{l+(n-2)(n-t-1)}(\{\nu_{n-t-1}\})=V(D)$.

接下来分两种情况进行证明.

(1)当 $\lambda\le n-t-1$ 时，存在 $\lambda-1$ 个点 $\nu_{p_1},\nu_{p_2},\cdots,\nu_{p_{\lambda-1}}\in V(C_{n-t-1})$，使得圈 C_{n-t-1} 上有一 $\lambda-1$ 长路径 $W=\nu_{p_{\lambda-1}}\to\nu_{p_{\lambda-2}}\to\cdots\to\nu_{p_2}\to\nu_{p_1}\to\nu_{n-t-1}$.

设 $X=\{\nu_{p_1},\nu_{p_2},\cdots,\nu_{p_{\lambda-1}},\nu_{n-t-1}\}$，则 $|X|=\lambda$，为证明方便，记 $\nu_{n-t-1}=\nu_{p_0}$. 因为圈 C_{n-t-1} 上有一条长为 $\lambda-1$ 的路径 $W=\nu_{p_{\lambda-1}}\to\nu_{p_{\lambda-2}}\to\cdots\to\nu_{p_2}\to\nu_{p_1}\to\nu_{n-t-1}$，故

$$(\bigcap_{i=1}^{k}R^D_{k-i+(n-2)(n-t-1)}(\{\nu_{n-t-1}\})\bigcap_{i=k+1}^{\lambda-1}R^D_{(n-2)(n-t-1)}(\{\nu_{p_{i-k}}\}))\subseteq(\bigcap_{x\in X}R^D_{k+(n-2)(n-t-1)}(\{x\})).$$

对于 $i=0,1,\cdots,k-1$，有 $R^D_{k-i+(n-2)(n-t-1)}(\{\nu_{n-t-1}\})=V(D)$.

当 $k=\lambda$ 时,得 $|\bigcap_{x\in X} R^{D}_{k+(n-2)(n-t-1)}(\{x\})|=n=\mu$;当 $k<\lambda$ 时,因为 $\nu_{p_i}\in D^{(n-t-1)}$ 是个环点,则有 $|R^{D^{(n-t-1)}}_{n-2}(\{\nu_{p_i}\})|\geq n-1,(i=0,1,2,\cdots,\lambda-k-1)$,所以 $|\bigcap_{x\in X} R^{D}_{k+(n-2)(n-t-1)}(\{x\})|\geq|\bigcap_{i=0}^{\lambda-k-1} R^{D^{(n-t-1)}}_{n-2}(\{\nu_{p_i}\})|\geq(n-1)(\lambda-k)-n(\lambda-k-1)=\mu$.

(2)当 $\lambda=n-t-1+m(m>0)$ 时,令 $X=Y\cup V(C_{n-t-1})$,则 $|X|=\lambda$.

当 $\lambda=n-t-1+m,(m-k>0)$,首先考虑 $V(C_{n-t-1})$ 中的点,因为 $\nu_i\in V(C_{n-t-1})$,存在一点 $\nu_i^n\in V(C_{n-t-1})$,使得 $\nu_i\xrightarrow{k}\nu_i^n,(i=1,2,\cdots,n-t-1)$,所以,

$$(\bigcap_{i=1}^{n-t-1} R^{D}_{k+(n-2)(n-t-1)}(\{\nu_i\}))\supseteq(\bigcap_{i=1}^{n-t-1} R^{D}_{(n-2)(n-t-1)}(\{\nu_i^n\}))\supseteq(\bigcap_{i=1}^{n-t-1} R^{D}_{(n-2)(n-t-1)}(\{\nu_i\}))=(\bigcap_{i=1}^{n-t-1} R^{D^{(n-t-1)}}_{n-2}(\{\nu_i\})).$$

考虑 Y 中的点,对于 $\nu_{\kappa_i}\in Y$,当 $1\leq d(\nu_{\kappa_i},\nu'_{\kappa_i})\leq k$ 时,有 $\nu''_{\kappa_i}\in V(C_{n-t-1})(i=1,2,\cdots,m)$,则

$$|\bigcap_{x\in X} R^{D}_{k+(n-2)(n-t-1)}(\{x\})|\geq|\bigcap_{i=1}^{n-t-1} R^{D^{(n-t-1)}}_{n-2}(\{\nu_i\})|\geq(n-1)(n-t-1)-n(n-t-2)\geq\mu.$$

当 $d(\nu_{\kappa_m},\nu'_{\kappa_m})\geq k+1$,若存在 k^* 个点 $\nu_{\kappa_{m-k^*+1}},\nu_{\kappa_{m-k^*+2}},\cdots,\nu_{\kappa_m}$(这些点可以相同),使得 $d(\nu_{\kappa_i},V(C_{n-t-1}))\geq k+1,\nu''_{\kappa_i}\in Y(i=m-k^*+1,m-k^*+2,\cdots,m),\nu''_{\kappa_i}\in V(C_{n-t-1})(i=1,2,\cdots,m-k^*)$.点 $\nu''_{\kappa_{m-k^*+1}},\nu''_{\kappa_{m-k^*+2}},\cdots,\nu''_{\kappa_m}$(这些点可以相同)组成的集合用 X_1 表示,则 $|X_1|=k'\leq k^*\leq m-k$.令 $X_1=\{u_1,u_2,\cdots,u_{k'}\}$,则 $|\bigcap_{x\in X} R^{D}_{k+(n-2)(n-t-1)}(\{x\})|\geq|\bigcap_{i=1}^{n-t-1} R^{D^{(n-t-1)}}_{n-2}(\{\nu_i\})\bigcap_{x\in X_1} R^{D^{(n-t-1)}}_{n-2}(\{x\})|$.

对于 $D^{(n-t-1)},u_i\in X_1$,令 $d(\nu'_{\kappa_t},\nu''_{\kappa_t})=k_1(n-t-1)+k_2(k_1\geq0,0\leq k_2\leq n-t-2)$.设 $D^{(n-t-1)}$ 中,有 $k_0(\geq1)$ 个顶点 $u_1,u_2,\cdots,u_{k_0}\in X_1$,使得

$$l_i=k_1+1,(i=1,2,\cdots,k_0),l_i\leq k_1,(i=k_0+1,k_0+2,\cdots,k'),$$

因此,$|R^{D^{(n-t-1)}}_{n-2}(\{u_i\})\cap R^{D^{(n-t-1)}}_{n-2}(\{w_i\})|\geq n-k_1-2,(i=1,2,\cdots,k_0)$,$|R^{D^{(n-t-1)}}_{n-2}(\{u_i\})\cap R^{D^{(n-t-1)}}_{n-2}(\{w_i\})|\geq n-k_1-1,(i=k_0+1,k_0+2,\cdots,k')$.所以,

$$|\bigcap_{x\in X} R^{D}_{k+(n-2)(n-t-1)}(\{x\})|\geq|\bigcap_{i=1}^{n-t-1} R^{D^{(n-t-1)}}_{n-2}(\{\nu_i\})\bigcap_{x\in X_1} R^{D^{(n-t-1)}}_{n-2}(\{x\})|\geq(n-k_1-2)k_0+$$
$$(n-k_1-1)(n-t-k_0-1)-n(n-t-2)=\mu+m-k-k_1(n-t-1)-k_0.$$

因为 $m-k-k_1(n-t-1)-k_0\geq0$,所以 $|\bigcap_{x\in X} R^{D}_{k+(n-2)(n-t-1)}(\{x\})|\geq\mu$.综上 $h(D,\lambda,\mu)\leq2+\lambda+\mu-2n+(n-2)(n-t)$.令 $\lambda+\mu=n+k,(2\leq k\leq n)$,易证

$R^{D}_{(n-2)(n-t-1)}(\{\nu_i\})=R^{D^{(n-t-1)}}_{n-2}(\{\nu_i\})=\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n\}\backslash\{\nu_{i+r_i(n-t-1)(\mathrm{mod}\ n)}\mid r_i=0,1,\cdots,k_i\}\cup\{\nu_{t+i(\mathrm{mod}\ n)}\}$,其中 $i=n-t,n-t+1,\cdots,n$.对于 $i=n-t-k(\mathrm{mod}\ n),n-t-k-1(\mathrm{mod}\ n),\cdots,1-t(\mathrm{mod}\ n)$,则 $R^{D}_{k-1+(n-t-1)(n-2)}(\{\nu_i\})=\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_{n-1},\nu_n\}$ 且 $R^{D}_{k-1+(n-t-1)(n-2)}(\{\nu_i\})=R^{D}_{(n-t-1)(n-2)}(\{\nu_{i+k-1(\mathrm{mod}\ n)}\})$.

令 $X^*=\{\nu_i\mid i=n-t-k(\mathrm{mod}\ n),n-t-k-1(\mathrm{mod}\ n),\cdots,-t(\mathrm{mod}\ n)\}$.

如果 $k=1$,则 $X'=\varnothing,X^*=V(D)$.令 $X^{**}=\{\nu_{i+k-1(\mathrm{mod}\ n)}\mid\nu_i\in X^*\}$,则 $|X^{**}|=n-k+1$.令 $Y=Y'\cup X''$ 是 λ 个点的集合,$X=X'\cup X''$,$(|Y'|=k-1)$,$|X''|=\lambda-k+1$,且 $Y'\neq X'$.

因为 $\bigcap_{x\in X'}R^{D_s}_{k-1+(n-t-1)(n-2)}(\{x\})=\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n\}$,故 $|\bigcap_{y\in Y}R^{D}_{k-1+(n-t-1)(n-2)}(\{y\})|\leq|\bigcap_{x\in X}R^{D}_{k-1+(n-t-1)(n-2)}(\{x\})|$.

现只需考虑 $X=X'\cup X''$,这里 $X''\subseteq X^*$ 是 $\lambda-k+1$ 个点的集合.

如果 $X^{**}\not\subset\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_{n-t-1}\}$,$X^{**}=X_1^{**}\cup\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_{n-t-1}\}$,其中 $|X_1^{**}|=t-k+2$.若存在 n_0 个顶点 $k_1,k_2,\cdots,k_{n_0}\in\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_{n-t-1}\}$,对每一个 k_i,存在 m_i 个顶点 $k_{i-(n-t-1)(\mathrm{mod}\ n)},k_{i-2(n-t-1)(\mathrm{mod}\ n)},\cdots,k_{i-m_i(n-t-1)(\mathrm{mod}\ n)}\in X_1^{**}$,使得在 $D^{(n-t-1)}$ 中有长为 $m_i(m_i\geq1)$ 的路径为:$W_i=k_{i-m_i(n-t-1)(\mathrm{mod}\ n)}\rightarrow k_{i-(m_i-1)(n-t-1)(\mathrm{mod}\ n)}\rightarrow\cdots\rightarrow k_{i-(n-t-1)(\mathrm{mod}\ n)}\rightarrow k_i$,$\sum_{i=1}^{n_0}m_i=t-k+2,i=1,2,\cdots,n_0$.

令 $Y_i=\{k_i\},(i=n_0+1,n_0+2,\cdots,n-t-1),Y_i=\{k_i-j(n-t-1)(\mathrm{mod}\ n)\mid j=0,1,\cdots,m_i\}$,$(i=1,2,\cdots,n_0)$.

令 $\bigcap_{x\in Z_{p_i}}R^{D}_{(n-t-1)(n-2)}(\{x\})=V(D)\backslash X_{p_i}$,$|Z_{p_i}|=m'_{p_i}$,则 $\sum_{i=1}^{m_0}m'_{p_i}=\lambda-k+1$.

因为 $X_{p_i} \subseteq \{k_{p_i-(n-t-1)(\bmod n)}, k_{p-2(n-t-1)(\bmod n)}, \cdots, k_{p_i-(m_{p_i}+1)(n-t-1)(\bmod n)}\}$ 且 $\bigcap_{i=1}^{m_0} X_{p_i} = \varnothing$，所以，$\bigcap_{x\in X'''} R^D_{(n-t-1)(n-2)}(\{x\}) = V(D)\setminus \bigcup_{i=1}^{m_0} X_{p_i}$，$(i=1,2,\cdots,m_0)$.

因为 $|X_{p_i}| \geq m'_{p_i}$，所以 $|\bigcap_{x\in X'''} R^D_{(n-t-1))(n-2)}(\{x\})| \leq n - \sum_{i=1}^{m_0} m'_{p_i} = n-(\lambda-k+1) = \mu-1$，$(i=1,2,\cdots,m_0)$.

如果 $Z_{p_i} = \{k_{p_i} - j(n-t-1) \mid j=0,1,\cdots,m'_{p_i}-1\}$，那么 $|\bigcap_{x\in X'''} R^D_{(n-t-1)(n-2)}(\{x\})| = n+k-\lambda-1 = \mu-1$，否则，$|\bigcap_{x\in X'''} R^D_{(n-t-1)(n-2)}(\{x\})| < n+k-\lambda-1. = \mu-1$，$(i=1,2,\cdots,m_0)$.因此，$h(D,\lambda,\mu) \geq 2+\lambda+\mu-2n+(n-2)(n-t)$.

$$h(D,\lambda,\mu) = 2+\lambda+\mu-2n+(n-2)(n-t), \lambda+\mu > n+1, (\lambda \geq 2, \mu \geq 1).$$

定理 1　D 为 n 阶本原有向图，其中 D 的基础图含有两个长为 $n-t-1$ 的圈，一个长为 $n-t$ 的圈，$L(D)=\{n-t-1,n-t\}$，$\gcd\{n-t-1,n-t\}=1$，则

$$h(D,\lambda,\mu) = \begin{cases} 4+(\lambda+\mu)(n-t-1)-3(n-t), \lambda+\mu \leq n+1, \\ 2+\lambda+\mu-2n+(n-2)(n-t), \lambda+\mu > n+1. \end{cases} (\lambda \geq 2, \mu \geq 1).$$

证明　由引理 1 和引理 2 得，

$$h(D,\lambda,\mu) = \begin{cases} 4+(\lambda+\mu)(n-t-1)-3(n-t), \lambda+\mu \leq n+1, \\ 2+\lambda+\mu-2n+(n-2)(n-t), \lambda+\mu > n+1. \end{cases}$$

定理 2　D 为 n 阶本原有向图，其中 D 的基础图含有两个长为 $n-t-1$ 的圈，一个长为 $n-t$ 的圈，$L(D)=\{n-t-1,n-t\}$，则

$$k(D,\lambda,\mu) \leq \begin{cases} t+1+(n-t-1)\left\lfloor \dfrac{n(\lambda-1)+\mu-1}{\lambda} \right\rfloor, n-t-\lambda \geq 1, \\ t+1+(n-t-1)\left\lfloor \dfrac{n(n-t-2)+\mu-1}{n-t-1} \right\rfloor, n-t-\lambda < 1. \end{cases}$$

证明　在圈 C_{n-t-1} 中，选择 r 个顶点 $u_1,u_2,\cdots,u_{r-1},u_r$. 因为 $u_i \in D^{(n-t-1)}$ 是环点，所以，$|R_l^{D(n-t-1)}(\{u_i\})| \geq l+1$，$(l=\lfloor (n(r-1)+\mu-1)/r \rfloor, i=1,2,\cdots,r)$.

令 $\dfrac{n(r-1)+\mu-1}{r} = k+a$，$(0 \leq a < 1)$，则 $\lfloor (n(r-1)+\mu-1)/r \rfloor = k$，由于 $r(1-a) \geq 1$，则

$$|\bigcap_{i=1}^{r} R_k^{D^{(n-t-1)}}(\{u_i\})| \geq (\lfloor (\frac{n(\lambda-1)+\mu-1}{r}) \rfloor + 1)r - (r-1)n \geq \mu,$$

所以，$|\bigcap_{i=1}^{r} R^D_{k(n-t-1)}(\{u_i\})| \geq \mu$.

设 X 是任意 λ 个点的集合，$X=\{\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_\lambda\}$.对任意 $\nu_i \in X$，存在一条从 ν_i 到 ν'_i 长为 $t+1$ 的路径 $(\nu'_i \in C_{n-t-1}, i=1,2,\cdots,\lambda)$.如果 $\lambda \leq n-t-1$，则 $|\{\nu'_1,\nu'_2,\cdots,\nu'_\lambda\}| \leq \lambda$；如果 $\lambda > n-t-1$，则 $|\{\nu'_1,\nu'_2,\cdots,\nu'_\lambda\}| \leq n-t-1$. 因此，

$$k(D,\lambda,\mu) \leq \begin{cases} t+1+(n-t-1)\left\lfloor \dfrac{n(\lambda-1)+\mu-1}{\lambda} \right\rfloor, n-t-\lambda \geq 1, \\ t+1+(n-t-1)\left\lfloor \dfrac{n(n-t-2)+\mu-1}{n-t-1} \right\rfloor, n-t-\lambda < 1. \end{cases}$$

3　结束语

本文得到了两类本原有向图的 λ 重下 μ-scrambling 指数及 λ 重上 μ-scrambling 指数.最近这方面的超图做得还很少，接下来可以刻画一些超图的 λ 重下 μ-scrambling 指数及 λ 重上 μ-scrambling 指数.

参　考　文　献

[1]　Akelbek M，Kirkland S.Coefficients of ergodicity and the scrambling index[J].Linear Algebra & Its Applications，2009，430：1111-1130.

[2] Akelbek M, Kirkland S. Primitive digraphs with the largest scrambling index[J]. Linear Algebra & Its Applications, 2009, 430: 1099-1110.

[3] Cho H H, Kim S R, Nam Y. The m-step competition graph of a digraph[J]. Discrete Applied Mathematics, 2000, 105(1/2/3): 151-127.

[4] Huang Y, Liu B. Generalized scrambling indices of a primitive digraph[J]. Linear Algebra & Its Applications, 2010, 433(11): 1798-1808.

[5] Bruald R A, Liu B. Generalized exponents of primitive directed digraphs[J]. Journal of Graph Theory, 1990, 14: 483-499.

[6] Zhang L, Huang T Z. Bounds on the generalized μ-scrambling indices of primitive digraphs[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2012, 89(1): 17-29.

[7] Kim H K. Scrambling index set of primitive digraphs[J]. Linear Algebra & Its Applications, 2013, 439: 1886-1893.

[8] Shao Y, Shen J, Gao Y. The kth upper and lower bases of primitive nonpowerful minimally strong signed digraphs[J]. Linear Multilinear Algebra, 2012, 60(9): 1093-1113.

[9] Shao Y, Gao Y. The scrambling index set of primitive minimally strong digraphs[J]. Linear Algebra & Its Applications, 2016, 500: 1-14.

[10] Song Z, Gao Y. Scrambling index of primitive digraph with one n-cycle and two s-cycles[J]. Journal of Tianjin Normal University, 2016, 30(1): 6-11.

The generalized μ-scrambling scrambling index of a primitive digraph $D\{n-t-1, n-t\}$

Liu Weihua[1], Huang Haisong[2]

(1. College of Information and Management Science, Henan Agricultural University, Zhengzhou 450002, China;
2. Faculty of General Education, Zhengzhou Technology and Business University, Zhengzhou 450026, China)

Abstract: Denote the primitive digraph with two $n-t-1$-cycles and one $n-t$-cycle by $D\{n-t-1, n-t\}$. By using the graph theory and Combining the Mathematical construction method with inductive method, we show that the generalized μ-scrambling scrambling index of a primitive digraph $D\{n-t-1, n-t\}$.

Keywords: primitive digraph; λ th lower μ-scrambling indices; λ th upper μ-scrambling

[责任编校 陈留院]