具有最大 A_α-特征值的符号完全图

张林,李丹

(新疆大学 数学与系统科学学院,乌鲁木齐 830017)

摘　要:符号图 $\Sigma=(G,\sigma)$ 由它的底图 $G=(V,E)$ 与符号函数 $\sigma:E\to\{-1,1\}$ 组成.设 $\alpha\in[0,1]$,Belardo 定义符号图 $\boldsymbol{A}_\alpha$- 矩阵为:$\boldsymbol{A}_\alpha(\Sigma)=\alpha\boldsymbol{D}(G)+(1-\alpha)\boldsymbol{A}(\Sigma)$,其中 $\boldsymbol{A}(\Sigma)$ 是符号图 Σ 的邻接矩阵,$\boldsymbol{D}(G)$ 是 G 的度对角矩阵.设 K_n 表示 n 阶完全图,T 表示树.设 (K_n,H^-) 表示负边导出子图是 H 的符号完全图.当 $0.5<\alpha<1$ 时,确定了符号图 (K_n,T^-) 的最大 A_α- 特征值达到最大时 T 的结构.

关键词:符号图;完全图;最大特征值

中图分类号:O175　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1000-2367(2024)04-0080-07

1　预备知识

设 $G=(V(G),E(G))$ 是一个简单连通图,其中 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 和 $E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 分别称为图 G 的顶点集和边集.若 $v_iv_j\in E(G)$,则 v_i,v_j 在图 G 中相邻,记作 $v_i\sim v_j$;否则 v_i,v_j 在图 G 中不相邻,记作 v_i-v_j.图 G 的邻接矩阵 $A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$.当 v_i,v_j 相邻时,$a_{ij}=1$;否则 $a_{ij}=0$.符号图源于社会网络,最早由 HARARY[1] 提出并开始研究,他将图的每条边加权 $+1$(两人有正面合作关系)或 -1(两人有负面合作关系).符号图 $\Sigma=(G,\sigma)$ 是由图 $G=(V,E)$ 与符号函数 $\sigma:E\to\{-1,1\}$ 组成,其中图 G 是其底图,σ 是符号图 Σ 的符号,用 ±1 来表示边的符号.设 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}(\Sigma)$ 为符号图 $\Sigma=(G,\sigma)$ 的实矩阵,且 $P_\lambda(\boldsymbol{M})=\det(\lambda I-\boldsymbol{M})$ 是 $\boldsymbol{M}$- 多项式,称 $\boldsymbol{M}$ 的谱为符号图 Σ 的 $\boldsymbol{M}$- 谱.一般地,将 $\boldsymbol{M}$ 的谱表示为 $\lambda_1(\boldsymbol{M})\geq\lambda_2(\boldsymbol{M})\geq\cdots\geq\lambda_n(\boldsymbol{M})$.定义符号图 $\Sigma=(G,\sigma)$ 的邻接矩阵为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\Sigma)=(\sigma_{ij})$.若顶点 v_i 和 v_j 之间连正边,则 $\sigma_{ij}=1$;若顶点 v_i 和 v_j 之间连负边,则 $\sigma_{ij}=-1$;否则为 0. 如果符号圈包含偶(奇)数条负边,则称其是正(负)圈.若符号图的所有圈均为正圈,则称其平衡; 否则称其非平衡.一般图可以看作是所有边均为正的(平衡)符号图.

2017 年,NIKIFOROV[2] 提出一般图的 $\boldsymbol{A}_\alpha$- 矩阵:$\boldsymbol{A}_\alpha(G)=\alpha\boldsymbol{D}(G)+(1-\alpha)\boldsymbol{A}(G)$,其中 $\alpha\in[0,1]$,$\boldsymbol{A}(G)$ 是图 G 的邻接矩阵,$\boldsymbol{D}(G)=\mathrm{diag}(d_{v_1},d_{v_2},\cdots,d_{v_n})$ 是 G 的度对角矩阵,d_{v_i} 表示顶点 v_i 的度,即与顶点 v_i 相连的边数.显然,$\boldsymbol{A}_\alpha$- 矩阵是 $\boldsymbol{A}(G)$ 和 $\boldsymbol{D}(G)$ 的凸组合,且 $\boldsymbol{A}_0(G)=\boldsymbol{A}(G)$,$\boldsymbol{A}_1(G)=\boldsymbol{D}(G)$.$\boldsymbol{A}_\alpha$- 矩阵特征值模的最大值称为 $\boldsymbol{A}_\alpha$- 谱半径.关于 $\boldsymbol{A}_\alpha$- 谱半径的相关研究成果详见文献[2-7].类似地,当 $\alpha\in[0,1]$ 时,BELARDO 等[8] 定义了符号图的 $\boldsymbol{A}_\alpha(\Sigma)$- 矩阵:$\boldsymbol{A}_\alpha(\Sigma)=\alpha\boldsymbol{D}(G)+(1-\alpha)\boldsymbol{A}(\Sigma)$,其中 $\boldsymbol{A}(\Sigma)$ 是符号图 Σ 的邻接矩阵.设 K_n 表示 n 阶完全图.P_r,C_r 和 $K_{1,r-1}$ 分别表示 r 阶的路,圈和星图.设 $\boldsymbol{D}_{s,t}$ 是在 P_2 的两个端点分别悬挂 s 和 t 个悬挂点得到的图.设 (K_n,H^-) 表示负边导出子图是 H 的符号完全图.设 $\lambda_1(\Sigma)$ 表示符号图 Σ 的 $\boldsymbol{A}_\alpha$- 矩阵的最大特征值.当 $\alpha=0$ 时,已有一些关于 $\lambda_1(\Sigma)$ 的研究. KOLEDIN 等[9] 在固定阶数、边数和负

收稿日期:2023-02-27;**修回日期:**2023-05-06.

基金项目:国家自然科学基金(12361071;11901498);新疆维吾尔自治区高校科研计划自然科学重点项目(XJEDU2021I001).

作者简介:张林(1996—),女,山西长治人,新疆大学硕士研究生,研究方向为图论及其应用,E-mail:1173153404@qq.com.

通信作者:李丹(1988—),女,新疆大学副教授,博士,研究方向为图论及其应用,E-mail:ldxjedu@163.com.

引用本文:张林,李丹.具有最大 A_α-特征值的符号完全图[J].河南师范大学学报(自然科学版),2024,52(4):80-86.(Zhang Lin,Li Dan.On the largest-eigenvalue of signed complete graphs[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2024,52(4):80-86.DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.02.27.0001.)

边数的连通符号图中刻画了 $\lambda_1(\Sigma)$ 最大的极图，并猜想：负边数为 $k(k<n-1)$ 的 n 阶符号完全图中 $\lambda_1(\Sigma)$ 最大的极图为 $(K_n,K_{1,k}^-)$.AKBARI 等[10] 证明了此猜想.KAFAI 等[11] 在所有符号图 (K_n,U^-) 中刻画了 $\lambda_1(\Sigma)$ 最大的极图，其中 U 是 K_n 的单圈子图.LI 等[12] 在负边导出子图为生成树的所有非平衡符号图中刻画了 $\lambda_1(\Sigma)$ 最大的极图.更多结果见参考文献[13－15].受到以上文献启发，本文将考虑当 $0.5<\alpha<1$ 时，符号图 (K_n,T^-) 的 $\lambda_1(\Sigma)$ 达到最大时 T 的结构，其中 T 为树.

2　主要结论

设 λ 为 $\boldsymbol{A}_\alpha(\Sigma)$- 矩阵的特征值，则由 $\boldsymbol{A}_\alpha(\Sigma)X=\lambda X$ 可得顶点 v 对应的特征等式如下：$\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(\Sigma))x_v=\alpha d_v x_v+(1-\alpha)\sum\limits_{u\sim v}\sigma_{uv}x_u$.

引理 1　令 r,s 和 t 是符号图 Σ 的不同顶点且 $X=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$ 是 $\lambda_1(\Sigma)$ 对应的单位特征向量.设 Σ' 是转换 Σ 的正边 rs 和负边 rt 的符号得到的图.若 $x_r\geq 0,x_s\leq x_t$ 或者 $x_r\leq 0,x_s\geq x_t$，则 $\lambda_1(\Sigma')\geq\lambda_1(\Sigma)$.如果 $x_r\neq 0$ 或者 $x_s\neq x_t$，那么 $\lambda_1(\Sigma')>\lambda_1(\Sigma)$.

证明　因为 $x_r(x_t-x_s)\geq 0$，所以

$$\lambda_1(\Sigma')-\lambda_1(\Sigma)\geq X^{\mathrm T}(\alpha\boldsymbol{D}(G)+(1-\alpha)\boldsymbol{A}(\Sigma')-\alpha\boldsymbol{D}(G)-(1-\alpha)\boldsymbol{A}(\Sigma))X=$$
$$4x_r(1-\alpha)(x_t-x_s)\geq 0.$$

如果 $\lambda_1(\boldsymbol{A}_\alpha(\Sigma'))=\lambda_1(\boldsymbol{A}_\alpha(\Sigma))$，那么 X 也是 $\boldsymbol{A}_\alpha(\Sigma')$ 的一个单位特征向量.当 $x_r\neq 0$(或者 $x_s\neq x_t$) 时，顶点 s(或者 r) 所对应的特征等式不成立，因此 $\lambda_1(\Sigma')-\lambda_1(\Sigma)>0$.

引理 2　假设 n,k 是任意正整数且 $n\geq k+1$，则 $\lambda_1(K_n,K_{1,n-1}^-)\geq\lambda_1(K_n,K_{1,k}^-)$，等号成立当且仅当 $k=n-1$.

证明　$P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,K_{1,k}^-))=\det(\lambda I-\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,K_{1,k}^-))=$

$$\begin{vmatrix}
\lambda-\alpha(n-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha\\
\alpha-1 & \lambda-\alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
\alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \lambda-\alpha(n-1) & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha\\
\alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda-\alpha(n-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1\\
\alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \lambda-\alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
\alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \lambda-\alpha(n-1) & \alpha-1\\
1-\alpha & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda-\alpha(n-1)
\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}
\lambda-\alpha(n-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha\\
-\lambda+\alpha n-1 & \lambda-\alpha n+1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
-\lambda+\alpha n-1 & 0 & \cdots & \lambda-\alpha n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda-\alpha(n-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1\\
0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda+\alpha n-1 & \lambda-\alpha n+1 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda+\alpha n-1 & 0 & \cdots & \lambda-\alpha n+1 & 0\\
1-\alpha & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda-\alpha(n-1)
\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}
\eta & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & (n-k-1)(\alpha-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha\\
0 & \lambda-\alpha n+1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & \lambda-\alpha n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
k(\alpha-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \mu & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda-\alpha n+1 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\alpha n+1 & 0\\
k(1-\alpha) & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & (n-k-1)(\alpha-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda-\alpha(n-1)
\end{vmatrix}=$$

$$(\lambda-\alpha n+1)^{n-3}f_{1,k}(\lambda),$$

其中 $\eta=\lambda-\alpha(n-1)+(k-1)(\alpha-1)$,$\mu=\lambda-\alpha(n-1)+(n-k-2)(\alpha-1)$,以及

$$f_{1,k}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-\alpha(n-1)+(k-1)(\alpha-1) & (n-k-1)(\alpha-1) & 1-\alpha\\ k(\alpha-1) & \lambda-\alpha(n-1)+(n-k-2)(\alpha-1) & \alpha-1\\ k(1-\alpha) & (n-k-1)(\alpha-1) & \lambda-\alpha(n-1)\end{vmatrix}=$$

$$\lambda^3-(2n\alpha+n-3)\lambda^2-(-n^2\alpha^2-2n^2\alpha+4n\alpha+2n-3)\lambda+(4k^2-4kn+4k)\alpha^3+(-n^3-12k^2+12kn+n^2-12k)\alpha^2+(12k^2-12kn+2n^2+12k-2n)\alpha-4k^2+4kn-4k-n+1.$$

计算可得 $P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,K^-_{1,k}))-P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,K^-_{1,n-1}))=-4(\lambda-\alpha n+1)^{n-3}(\alpha-1)^3(n-k-1)$.由于 $n\geq k+1$,那么 $P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,K^-_{1,k}))-P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,K^-_{1,n-1}))\geq 0$.因此 $\lambda_1(K_n,K^-_{1,n-1})\geq\lambda_1(K_n,K^-_{1,k})$,等号成立当且仅当 $k=n-1$.

注意到 $P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,t}))=\det(\lambda I-\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,t}))=$

$$\begin{vmatrix}
\lambda-\alpha(n-1) & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & 1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1\\
1-\alpha & \lambda-\alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \lambda-\alpha(n-1) & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1\\
1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda-\alpha(n-1) & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1\\
\alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha & \lambda-\alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \lambda-\alpha(n-1) & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1\\
\alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda-\alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \lambda-\alpha(n-1)
\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}
\lambda-\alpha(n-1) & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & 1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1\\
1-\alpha & \lambda-\alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & -\lambda+\alpha n-1 & \cdots & \lambda-\alpha n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda-\alpha(n-1) & 1-\alpha & \cdots & 1-\alpha & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1\\
\alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha & \lambda-\alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\lambda+\alpha n-1 & \cdots & \lambda-\alpha n+1 & 0 & \cdots & 0\\
\alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & \alpha-1 & \cdots & \alpha-1 & \lambda-\alpha(n-1) & \cdots & \alpha-1\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda+\alpha n-1 & \cdots & \lambda-\alpha n+1
\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}
\lambda-\alpha(n-1) & s(1-\alpha) & \cdots & 1-\alpha & 1-\alpha & t(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 & (n-s-t-2)(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1\\
1-\alpha & \theta & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & t(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 & (n-s-t-2)(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & \lambda-\alpha n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
1-\alpha & s(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 & \lambda-\alpha(n-1) & t(1-\alpha) & \cdots & 1-\alpha & (n-s-t-2)(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1\\
\alpha-1 & s(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 & 1-\alpha & \omega & \cdots & \alpha-1 & (n-s-t-2)(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\alpha n+1 & 0 & \cdots & 0\\
\alpha-1 & s(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 & \alpha-1 & t(\alpha-1) & \cdots & \alpha-1 & \psi & \cdots & \alpha-1\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda-\alpha n+1
\end{vmatrix}=$$

$$(\lambda-\alpha n+1)^{n-5}f_{s,t}(\lambda),$$

其中 $\theta=\lambda-\alpha(n-1)+(s-1)(\alpha-1)$,$\omega=\lambda-\alpha(n-1)+(t-1)(\alpha-1)$,以及 $\psi=\lambda-\alpha(n-1)+(n-s-t-3)(\alpha-1)$,

$$f_{s,t}(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-\alpha(n-1) & s(1-\alpha) & 1-\alpha & t(\alpha-1) & (n-s-t-2)(\alpha-1)\\ 1-\alpha & \theta & \alpha-1 & t(\alpha-1) & (n-s-t-2)(\alpha-1)\\ 1-\alpha & s(\alpha-1) & \lambda-\alpha(n-1) & t(1-\alpha) & (n-s-t-2)(\alpha-1)\\ \alpha-1 & s(\alpha-1) & 1-\alpha & \omega & (n-s-t-2)(\alpha-1)\\ \alpha-1 & s(\alpha-1) & \alpha-1 & t(\alpha-1) & \psi\end{vmatrix}=$$

$$\lambda^5+(-4n\alpha-n+5)\lambda^4+g_1(\lambda)\lambda^3+g_2(\lambda)\lambda^2+g_3(\lambda)\lambda+g_4(\lambda)\text{，且}$$

$$g_1(\lambda)=2(n\alpha-1)(3n\alpha+2n-5),$$

$$g_2(\lambda)=(-4n^3-4ns-4nt+4s^2+4t^2-4n+12s+12t+8)\alpha^3+(-6n^3+18n^2+12ns+12nt-12s^2-12t^2+12n+36s+36t-24)\alpha^2+(12n^2-12ns-12nt+12s^2+12t^2-36n+36s+36t+24)\alpha+4ns+4nt-4s^2-4t^2-2n-12s-12t+2,$$

$$g_3(\lambda)=(n\alpha-1)((n^3+8ns+8nt-8s^2-8t^2+8n-24s-24t-16)\alpha^3+(4n^3-7n^2-24ns-24nt+24s^2+24t^2-24n+72s+72t+48)\alpha^2+(-8n^2+24ns+24nt-24s^2-24t^2+35n-72s-72t-48)\alpha-8ns-8nt+8s^2+8t^2-4n+24s+24t+11),$$

$$g_4(\lambda)=(-4n^3(s+t+1)+4n^2(s^2+t^2+3s+3t+2)+16st(n-s-t-2))\alpha^5+(-n^5+n^4+12n^3(s^2+t^2+1)-4n^2(3s^2+3t^2-7s-7t-4)-4n(2s^2+20st+2t^2+6s+6t+4)+80st(s+t+2))\alpha^4+(4n^4-4n^3(3s+3t+4)+12n^2(s^2+t^2+s+t)+4n(6s^2+6t^2+40st+17s+17t+11)-160s^2t-160st^2+4s^2-320st+4t^2+12s+12t+8)\alpha^3+(n^3(4s+4t-2)+n^2(-4s^2-4t^2+12s+12t+22)-n(24s^2+24t^2+160st+60s+60t+36)n-12t^2+320st)+(160st^2+160s^2t-12s^2+320st-12t^2-36s-36t-24))\alpha^2+(-n^2(8s+8t+4)+n(8s^2+80st+8t^2+12s+12t)-80s^2t-80st^2+12s^2-160st+12t^2+36s+36t+24)\alpha+(-16st+4s+4t+3)n+16s^2t+16st^2-4s^2+32st-4t^2-12s-12t-7.$$

则以下结论成立.

引理 3　假设 n,s,t 是任意正整数且 $n\geq s+t+2$，$t\geq s$，则 $\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,n-3})\geq\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,t})$，等号成立当且仅当 $s=1$，$t=n-3$.

证明　若 $t>s+1$ 且 $s>1$，则

$$P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s-1,t+1}))-P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,t}))=-8(\lambda-\alpha n+1)^{n-5}(\alpha-1)^3(s-t-1)h(\lambda),$$

其中，$h(\lambda)=(n^2-2n+2s+2t+4)\alpha^2+((-2\lambda+2)n-4s-4t-8)\alpha+\lambda^2-2n+2s+2t+2\lambda+5$.令 $\lambda_1=\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,t})>n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8}$.计算可得：

$$f_{s,t}(n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8})=4(\alpha-1)^5((n^2-8n)\sqrt{2n-8}+h_1(n)),$$

其中，$h_1(n)=n^3-2n^2s-2n^2t+2s^2n+4nst+2t^2n-4s^2t-4st^2-10n^2+14ns+14nt-8s^2-8st-8t^2+28n-24s-24t-16$，且 $h_1'(n)=3n^2+2(-2s-2t-10)n+2s^2+4st+2t^2+14s+14t+28$.由于 $h_1'(n)$ 关于 n 的对称轴为 $2s/3+2t/3+10/3<s+t+2\leq n$ 且 $h'_1(n)>0$，所以 $h_1(n)$ 随 n 严格单调递增且 $h_1(s+t+2)=(-t+2+s)(t-2+s)(-t-2+s)\geq 0$.因此，$f_{s,t}(n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8})<0$.进而计算可得 $h(n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n+2(s+t+2)})=0$ 且当 $\lambda>n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n+2(s+t+2)}$ 时单调递增.因为 $\lambda_1>n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8}>n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n+2(s+t+2)}$，所以 $h(\lambda_1)>h(n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8})>0$.因此，$P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s-1,t+1}))-P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,t}))=P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s-1,t+1}))<0$.当 $t=s+1$ 时，计算可得 $P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s-1,s+2}))-P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,s+1}))=16(\lambda-\alpha n+1)^{n-5}(\alpha-1)^3g(\lambda)$，其中 $g(\lambda)=n^2\alpha^2-2\lambda n\alpha-2n\alpha^2+4\alpha^2s+\lambda^2+2n\alpha+6\alpha^2-8\alpha s+2\lambda-2n-12\alpha+4s+7$.令 $\lambda_1=\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,t})=\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,s+1})>n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8}$.当 $t=s+1$ 时，计算可得：

$$f_{s,s+1}(n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8})=(\alpha-1)^5((2n-8)^{5/2}+4n^3-16n^2s+32s^2n-32s^3-48n^2+144ns-144s^2+176n-304s-192)<(\alpha-1)^5((2n-8)^2+4n^3-16n^2s+32s^2n-32s^3-48n^2+144ns-144s^2+176n-304s-192)=(\alpha-1)^5h_2(n),$$

其中，$h_2(n)=(2n-8)^2+4n^3-16n^2s+32s^2n-32s^3-48n^2+144ns-144s^2+176n-304s-192$，且 $h_2'(n)=12n^2-32ns+32s^2-88n+144s+144$，$h_2''(n)=24n-32s-88>0$，即 $h_2'(n)$ 随 n 严格单调递增.当 $n\geq s+t+2=2s+3$ 时，$h_2'(2s+3)=4(2s+3)(2s-1)>0$，即 $h_2(n)$ 随 n 严格单调递增.计算可得 $h_2(2s+3)=8(2s-1)(s-2)\geq 0$.因此，当 $t=s+1$ 时，$f_{s,s+1}(n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8})\leq 0$.同理可得 $g(\lambda_1)>g(n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8})=4\alpha^2s-2\alpha^2-8\alpha s+4\alpha+4s-2=2(\alpha-1)^2(2s-1)>0$.因此，当 $t=s+1$ 且 $s>1$ 时，有

$$P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s-1,s+2}))-P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,s+1}))=P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s-1,s+2}))<0.$$

当 $t=s$ 时，计算可得：

$$P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s-1,s+1}))-P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,s}))=8(\lambda-\alpha n+1)^{n-5}(\alpha-1)^3t(\lambda),$$

其中，$t(\lambda)=n^2\alpha^2-2\lambda n\alpha-2n\alpha^2+4\alpha^2s+\lambda^2+2n\alpha+4\alpha^2-8\alpha s+2\lambda-2n-8\alpha+4s+5$.令 $\lambda_1=\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,t})=\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,s})>n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8}$.当 $t=s$ 时，计算可得：

$$f_{s,s}(n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8})=2(\alpha-1)^5h_3(n)(n-2s+\sqrt{2n-8}-4),$$

其中，$h_3(n)=(4s-4)\sqrt{2n-8}+8s^2+(-4n+8)s+2n^2-12n+16$.令 $q_1(n)=(-4n+8)s+8s^2+2n^2-12n+16=2n^2+(-4s-12)n+8s^2+8s+16$，计算可知 $q_1(n)$ 关于 n 的对称轴为 $s+3<n$ 且 $n>2s+2$，则 $q_1(n)$ 随 n 严格单调递增且 $q_1(2s+2)=8s(s-1)>0$.因此 $f_{s,s}(n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8})=2(\alpha-1)^5h_3(n)(n-2s+\sqrt{2n-8}-4)<0$.同理可得 $t(\lambda_1)>t(n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8})=4(\alpha-1)^2(s-1)>0$.因此，当 $t=s$ 时，

$$P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s-1,s+1}))-P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,s}))=P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s-1,s+1}))<0.$$

综上所述，当 $t\geq s$ 时，有 $\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s-1,t+1})\geq\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,t})$.归纳可得 $\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,s+t-1})\geq\cdots\geq\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,t})$.通过计算可得 $P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,t}))-P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,n-3}))=-4(\lambda-\alpha n+1)^{n-5}t(\alpha-1)^3h_4(\lambda)$，其中 $h_4(\lambda)=(-n\alpha+\lambda+2\alpha-1)(-n\alpha+\lambda-2\alpha+3)$.令 $\lambda_1=\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,n-3})\geq n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8}$.当 $n\geq 6$ 时，$h_4(n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8})=2(\alpha-1)^2(n-6)\geq 0$.因此 $P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,t}))-P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,n-3}))=P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,t}))\geq 0$.当 $n=4,5$ 时，双星图唯一，$(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,t})=(K_4,\boldsymbol{D}^-_{1,1})$，$(K_5,\boldsymbol{D}^-_{s,t})=(K_5,\boldsymbol{D}^-_{1,2})$.因此，$\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,t})\leq\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,n-3})$，等号成立当且仅当 $T\cong\boldsymbol{D}_{1,n-3}$.当 $s=1$ 时，结论显然成立.因此，当 $n\geq s+t+2$ 且 $t\geq s\geq 1$ 时，有 $\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,n-3})\geq\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{s,t})$ 等号成立当且仅当 $T\cong\boldsymbol{D}_{1,n-3}$.

注 1 $f_{1,k}(n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8})=(\alpha-1)^3p(n)$，其中 $p(n)=(2n-8)^{3/2}+4k^2-4kn+2n^2+4k-8n$.计算可得 $p'(n)=4n-4k-8+3\sqrt{2n-8}$，$p''(n)=4+3/\sqrt{2n-8}>0$，因此 $p'(n)$ 随 n 严格单调递增.当 $n\geq k+1$ 且 $n\geq 6$ 时，$p'(n)\geq p'(6)=4n-4k-8+3\sqrt{2n-8}=22-4k>0$，因此 $p(n)$ 随 n 严格单调递增.计算可得 $p(n)\geq p(6)=4(k^2-5k+8)>0$，则当 $0.5<\alpha<1$ 时，$f_{1,k}(n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8})=(\alpha-1)^3p(n)<0$.因此，若 $n\geq 6$，$n\geq k+1$ 且 $0.5<\alpha<1$，则 $\lambda_1=\lambda_1(K_n,K^-_{1,n-1})>n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8}$.

引理 4 假设 $0.5<\alpha<1$ 且 $n\geq 4$，则 $\lambda_1(K_n,K^-_{1,n-1})>\lambda_1(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,n-3})$.

证明 当 $n\geq 6$ 时，

$$P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,n-3}))-P_\lambda(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,K^-_{1,n-1}))=-4(\alpha-1)^3[2(2n-8)^{3/2}h_5(n)+2(n-4)h_6(n)],$$

其中，$h_5(n)=2n^2\alpha^2-n^2\alpha-3n\alpha+n+1=(n\alpha-1)(-1+2\alpha n-n)$，$h_6(n)=n^3\alpha^2+(2\alpha^2-4\alpha)n^2+(-6\alpha^2+2\alpha+5)n-6\alpha^2+20\alpha-14$.令 $\lambda_1=\lambda_1(K_n,K^-_{1,n-1})>n\alpha-1+(\alpha-1)\sqrt{2n-8}$.当 $0.5<\alpha<1$ 时，$h_5(n)>0$.因此 $(2n-8)^{3/2}h_5(n)>0$.设 $h_6'(n)=3n^2\alpha^2+2(2\alpha^2-4\alpha)n-6\alpha^2+2\alpha+5$，$h_6''(n)=6\alpha^2n+4\alpha^2-8\alpha$.由 $6\alpha^2>0$ 可知 $h_6''(n)$ 随 n 严格单调递增且 $h_6''(4)=28\alpha^2-8\alpha>0$，则 $h'_6(n)$ 随 n 严格单调递增且 $h_6'(4)=58\alpha^2-30\alpha+5>0$.因此，$h_6(n)$ 随 n 严格单调递增且 $h_6(4)=66\alpha^2-36\alpha+6>0$.则 $2h_5(n)(2n-8)^{3/2}+2(n-4)h_6(n)>0$. 因此，

$$P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,n-3}))-P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,K^-_{1,n-1}))=P_{\lambda_1}(\boldsymbol{A}_\alpha(K_n,\boldsymbol{D}^-_{1,n-3}))>0.$$

通过计算可知 $\lambda_1(K_4, K_{1,3}^-) > \lambda_1(K_4, \boldsymbol{D}_{1,1}^-)$ 和 $\lambda_1(K_5, K_{1,4}^-) > \lambda_1(K_5, \boldsymbol{D}_{1,2}^-)$.综上所述，当 $n \geq 4$ 且 $0.5 < \alpha < 1$ 时，有 $\lambda_1(K_n, K_{1,n-1}^-) > \lambda_1(K_n, \boldsymbol{D}_{1,n-3}^-)$.

定理 1　设 $0.5 < \alpha < 1$ 且 $n \geq 4$.令符号图 $\Sigma = (K_n, T^-)$ 是最大 $\boldsymbol{A}_\alpha$- 特征值达到最大的图，则 $T \cong K_{1,n-1}$.

证明　假设 $T \ncong K_{1,n-1}$，则在 T 中存在 $P_4 = uvwz$.设 $X = (x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 是 $\lambda_1(\Sigma)$ 对应的单位特征向量.注意到若 X 是 $\lambda_1(\Sigma)$ 对应的特征向量，则 $-X$ 也是它的特征向量. 因此，考虑以下 8 种情况.

情形 1　$x_v = x_w = 0$.首先，断言 $x_z = 0$.否则，令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 zv 和负边 zw 的符号得到的图，则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾. 如果存在 $z' \in V(T)$ 使得 $zz' \in E(T)$ 和 $x_{z'} \neq 0$，那么同样产生矛盾.因此对于任意 $a \in V(T)$，有 $x_a = 0$.其次，由于 X 不可能是零向量，因此 T 不是 K_n 的支撑子图，即存在 $t \in V(K_n) \backslash V(T)$ 使得 $x_t \neq 0$.同时，存在一个悬挂点 $s' \in V(T)$ 使得 $ss' \in E(T)$.令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 $s't$ 和负边 $s's$ 的符号得到的图，则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.

情形 2　$x_w = 0$ 且 $x_v \neq 0$.如果 $x_u \neq x_v$，令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 wu 和负边 wv 的符号得到的图，那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.如果 $x_u = x_v$，令符号图 Σ' 是通过转换的正边 uw 和负边 uv 的符号得到的图，那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.

情形 3　$x_v = 0$ 且 $x_w \neq 0$.如果 $x_z \neq x_w$，令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 zv 和负边 vw 的符号得到的图，那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.如果 $x_z = x_w$，令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 zv 和负边 zw 的符号得到的图，那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.

情形 4　$x_u = 0$ 且 $x_v, x_w \neq 0$.如果 $x_v \neq x_w$，令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 uw 和负边 uv 的符号得到的图，那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.如果 $x_v = x_w$，令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 wu 和负边 wv 的符号得到的图，那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.

情形 5　$x_u, x_v, x_w < 0$.如果 $x_w \geq x_v$，令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 uw 和负边 uv 的符号得到的图，那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.假设 $x_w < x_v$.如果 $x_z \geq x_w$，令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 vz 和负边 vw 的符号得到的图，那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.如果 $x_z < x_w$，令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 zv 和负边 zw 的符号得到的图，那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.

情形 6　$x_v, x_w < 0$ 且 $x_u > 0$.令符号图是通过转换 Σ 的正边 wu 和负边 wv 的符号得到的图，则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.

情形 7　$x_u, x_v < 0$ 且 $x_w > 0$.令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 uw 和负边 uv 的符号得到的图，则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.

情形 8　$x_u, x_w < 0$ 且 $x_v > 0$.如果 $x_z \leq 0$.令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 zv 和负边 zw 的符号得到的图，则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.如果 $x_z > 0$.若 $x_w \geq x_u$，令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 zu 和负边 zw 的符号得到的图，则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.因此 $x_w < x_u$.若 $x_z \geq x_v$，令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 uz 和负边 uv 的符号得到的图，则由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.因此，可以得到 $x_w < x_u < 0 < x_z < x_v$.假设存在 $z' \in V(T)$ 使得 $zz' \in E(T)$.如果 $x_{z'} \geq 0$，令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 $z'w$ 和负边 $z'z$ 的符号得到的图，那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.如果 $x_{z'} < 0$，令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 $z'v$ 和负边 $z'z$ 的符号得到的图，那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$，产生矛盾.因此可知 z 是 T 的一个悬挂点.同理可得，u 也是 T 的一个悬挂点.显然，如果存在 $v' \in V(T)$ 使得 $vv' \in E(T)$

且 $x_{v'} \geq 0$,令符号图 Σ' 是通过转换 Σ 的正边 $v'u$ 和负边 $v'v$ 的符号得到的图,那么由引理 1 可知其负边的导出子图仍是 Σ' 的生成树且 $\lambda_1(\Sigma') > \lambda_1(\Sigma)$,产生矛盾.因此 $x_{v'} < 0$.综上所述,T 是双星图.

由引理 2-4 及注 1 可知,当 $n \geq 4$,$\lambda_1(K_n, K_{1,n-1}^-) > \lambda_1(K_n, \boldsymbol{D}_{1,n-3}^-)$.因此,若 $\Sigma = (K_n, T^-)$ 是符号完全图且使得 $\lambda_1(\boldsymbol{A}_\alpha(\Sigma))$ 最大,则 $T \cong K_{1,n-1}$.

参 考 文 献

[1] HARARY F.On the notion of balance of a signed graph[J].Michigan Mathematical Journal,1953,2(2):143-146.

[2] NIKIFOROV V.Merging the A-and Q-spectral theories[J].Applicable Analysis and Discrete Mathematics,2017,11(1):81-107.

[3] NIKIFOROV V,ROJO O.On the α-index of graphs with pendent paths[J].Linear Algebra and Its Applications,2018,550:87-104.

[4] CHANG A,TIAN F.On the spectral radius of unicyclic graphs with perfect matchings[J].Linear Algebra and Its Applications,2003,370:237-250.

[5] NING W J,LU M,WANG K.Maximizing the spectral radius of graphs with fixed minimum degree and edge connectivity[J].Linear Algebra and Its Applications,2018,540:138-148.

[6] LIN H Q,HUANG X,XUE J.A note on the A_α-spectral radius of graphs[J].Linear Algebra and Its Applications,2018,557:430-437.

[7] XUE J,LIN H Q,LIU S T,et al.On the A_α-spectral radius of a graph[J].Linear Algebra and Its Applications,2018,550:105-120.

[8] BELARDO F,BRUNETTI M,CIAMPELLA A.On the multiplicity of α as an $A_\alpha(\Gamma)$-eigenvalue of signed graphs with pendant vertices[J].Discrete Mathematics,2019,342(8):2223-2233.

[9] KOLEDIN T,STANIĆ Z.Connected signed graphs of fixed order,size,and number of negative edges with maximal index[J].Linear and Multilinear Algebra,2017,65(11):2187-2198.

[10] AKBARI S,DALVANDI S,HEYDARI F,et al.Signed complete graphs with maximum index[J].Discussiones Mathematicae Graph Theory,2020,40(2):393.

[11] KAFAI N,HEYDARI F,RAD N J,et al.On the signed complete graphs with maximum index[J].Iranian Journal of Science and Technology,Transactions A:Science,2021,45(6):2085-2090.

[12] LI D,LIN H Q,MENG J X.Extremal spectral results related to spanning trees of signed complete graphs[J].Discrete Mathematics,2023,346(2):113250.

[13] 王狄建.符号图谱的若干问题研究[D].长沙:湖南师范大学,2020.

[14] 张雪蕊.关于符号图的最大特征值和图的小特征值的研究[D].徐州:中国矿业大学,2023.

[15] 吴奇,卢勇.不存在秩为 $r(G)+2c(G)-1$ 或 $r(G)-2c(G)+1$ 的符号图[J].数学进展,2023,52(5):804-818.
WU Q,LU Y.Non-existence of signed graphs with rank $r(G)+2c(G)-1$ or $r(G)-2c(G)+1$[J].Advances in Mathematics(China),2023,52(5):804-818.

On the largest A_α-eigenvalue of signed complete graphs

Zhang Lin, Li Dan

(College of Mathematics and Systems Science, Xinjiang University, Urumqi 830017, China)

Abstract: A signed graph $\Sigma=(G,\sigma)$ consists of an underlying graph $G=(V,E)$ and a sign function $\sigma: E \rightarrow \{-1,1\}$. Let Σ be a signed graph, the matrix $\boldsymbol{A}_\alpha(\Sigma)$ is defined by Belardo as follows: $\boldsymbol{A}_\alpha(\Sigma)=\alpha\boldsymbol{D}(G)+(1-\alpha)\boldsymbol{A}(\Sigma)$, where $\alpha \in [0,1]$, $\boldsymbol{D}(G)$ is the diagonal matrix of the vertex degrees of G and $\boldsymbol{A}(\Sigma)$ is the adjacency matrix of Σ. Let K_n denote the complete graph of order n and T be a tree. Let (K_n, T^-) be a signed complete graph whose negative edges induce a subgraph H. In this paper, we characterize the extremal signed graph with maximum $\lambda_1(\boldsymbol{A}_\alpha(\Sigma))$ among graphs of type (K_n, T^-).

Keywords: signed graph; complete graph; largest eigenvalue

[责任编校 陈留院 赵晓华]