

具有违约顾客和部分故障的流排队均衡策略研究

叶晴晴, 李紫晔

(南京信息工程大学 数学与统计学院, 南京 210044)

摘要: 为了研究顾客违约对系统的影响, 考虑了具有违约顾客和部分故障的流体排队模型, 首先根据“报酬-成本”函数, 分析了流体的均衡阈值策略; 接着应用更新报酬定理得到了系统的稳态分布, 进而推导出均衡吞吐量 and 均衡社会收益; 最后通过数值例子分析了一些参数对系统指标的影响. 研究发现, 顾客违约对于均衡社会收益有一定的影响. 特别地, 当系统高负荷运转时, 即流体到达率大于正常工作期的服务速率时, 允许违约情形下的社会收益要优于不允许违约情形下的社会收益.

关键词: 流排队; 均衡策略; 违约; 社会收益

中图分类号: O226

文献标志码: A

文章编号: 1000-2367(2024)06-0055-08

随着时代的发展和高新科技的出现, 顾客的到达间隔和服务台的服务时间都相对越来越小, 离散系统的各种特征越来越接近于相应的连续系统, 即所谓的“流极限”, 流排队模型则对于传输速度和缓冲器大小的变化并不敏感. 文献[1]研究了一类 M/M/1 驱动流排队模型, 他们在有限环境中延伸了谱方法. 文献[2]假设一个边界条件, 用连分式求出缓冲器库存量分布的精确解. 文献[3]在假设流体净输入率由驱动系统外部环境控制的条件下, 研究了二次可选服务的 M/M/1 排队系统驱动流模型. 文献[4]研究了具有工作假期和指数报酬-成本结构的流体模型并推导出此模型的均衡策略. 文献[5]考虑了 M/M/1/N 队列驱动的流体模型, 利用矩阵分析方法对服务器利用率和平均缓冲器内容进行了分析.

对排队系统中顾客策略行为的研究是排队理论的一个新兴领域. 文献[6]研究了具有一般分布的服务和假期时间的马尔可夫模型, 根据顾客在到达时是否被告知系统中的顾客数量和服务器状态, 描述了4个信息水平的顾客均衡策略. 文献[7]研究了具有服务器故障的 M/M/1 队列中完全可见情形和几乎可见情形下顾客的策略行为. 文献[8]研究了具有 N 策略的 M/M/1 队列中顾客的策略加入或止步行为, 文献[9]针对两类平行顾客进入排队系统服务的问题, 给出在完全故障且可中断启动时间排队模型中两类顾客的均衡策略分析. 虽然已有大量的文献对于顾客的策略行为进行研究, 但这些文章有一个共同的假设: 顾客一旦选择加入队列后不被允许违约. 在允许违约的情形下, 标记顾客到达的瞬间, 系统内的顾客可能在任何时候做出违约的决定, 从而改变标记顾客的状态. 在现实的排队中, 违约是经常遇到的现象, 特别是在服务器发生故障, 顾客接受服务时间发生延迟等情况下, 顾客选择违约似乎不可避免. 文献[10]研究了在允许违约的情形下, 有休假/故障的 M/M/1 模型的均衡策略, 得出在系统不稳定的情况下, 顾客违约的影响尤其显著.

完全可靠的服务系统并不存在, 文献[11]假设服务系统的服务时间和维修时间服从任意分布, 得到了5种不同故障特性排队模型下的队列长度和对应的相关系统指标. 随后, 文献[12]分别研究了具有普通故障、部分故障和完全故障队列的特征. 文献[13]引入了工作故障的概念, 假设当服务器出现故障时, 不会完全

收稿日期: 2023-03-31; 修回日期: 2023-04-28.

基金项目: 国家自然科学基金(11901307).

作者简介(通信作者): 叶晴晴(1989-), 男, 江苏徐州人, 南京信息工程大学副教授, 博士, 研究方向为排队博弈论, E-mail: yeqingzero@gmail.com.

引用本文: 叶晴晴, 李紫晔. 具有违约顾客和部分故障的流排队均衡策略研究[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2024, 52(6): 55-62. (Ye Qingqing, Li Ziye. Equilibrium strategies of fluid queue with customer renegeing and partial-breakdown[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2024, 52(6): 55-62. DOI: 10.16366/j.cnki.1000-2367.2023.03.31.0002.)

停止服务,而是以较慢的速度继续进行服务.文献[14]研究了带有工作故障的 M/M/1 重试排队系统,基于广义特征值法,获得任意顾客的平均逗留时间.

本文的部分故障有许多实际应用背景,文献[13]提出计算机中存在病毒可能会降低系统的性能,但计算机仍能以较低的速率处理各种任务.与文献[15]中已有的研究工作相比,本文允许顾客随时违约,这更符合现实顾客的排队.基于以上分析,本文研究了一个带有违约顾客和部分故障的流排队系统并给出了模型的均衡策略.计算了流体遵循均衡策略时允许违约情形下系统的稳态分布,探讨了一些参数对系统阈值的影响,在相同参数下比较了两种情形的均衡吞吐量和均衡社会效益.

1 模型描述

考虑一个具有部分故障的流排队,流体的流入速率为 λ ,假设缓冲器不可靠,其故障发生的时间服从参数为 q_1 的指数分布.一旦缓冲器发生故障立即将其送去维修,维修时间服从参数为 q_0 的指数分布.维修后缓冲器立即投入正常工作.假设正常工作期内缓冲器的服务速率为 μ_1 ,缓冲器发生故障后服务速率降为 μ_0 ,其中 $\mu_0 < \mu_1$.称以速率 μ_0 服务的状态为部分故障期.此模型可以用二维马氏过程 $\{X(t), Z(t), t \geq 0\}$ 描述,其中, $X(t)$ 表示 t 时刻缓冲器的流体水平, $Z(t)$ 表示 t 时刻缓冲器状态, $Z(t) = 0$ 表示缓冲器处于部分故障期, $Z(t) = 1$ 表示缓冲器处于正常工作期.假设缓冲器是无限的且遵循先到先服务原则,则流模型的净流入速率为:

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda - \mu_i, X(t) > 0, Z(t) = i, \\ (\lambda - \mu_i)^+, X(t) = 0, Z(t) = i, \end{cases} \quad (1)$$

其中, $(x)^+ = \max(x, 0)$.

流体服务完成后获得的报酬是 R ,每单位时间的等待成本是 C .流体是否流入缓冲器并排队直到完成服务取决于获得的期望收益的正负.假设流体在缓冲器内随时可以违约,即离开队列.根据模型的假设,当缓冲器状态没有发生改变时,在新流体到达的瞬间缓冲器中标记流体的期望收益不变,因此,标记流体没有理由在新流体到达时违约.当缓冲器状态发生改变时,若缓冲器从部分故障期转向正常工作期,服务速率变大,标记流体的等待时间变短,所以标记流体没有理由选择违约,若缓冲器从正常工作期转向部分故障期,服务速率变小,标记流体的等待时间变长,标记流体有可能选择违约.另外,标记流体没有理由在服务完成时选择违约.综上分析,标记流体只可能在缓冲器从正常工作期转向部分故障期选择违约.

2 完全可见情形下的均衡策略分析

本节分析完全可见情形下流体的均衡策略.假设所有的流体都遵循阈值策略 $X_e = (x_0^R, x_1^R)$,其中 $x_0^R < x_1^R$,即当流体到达时发现缓冲器状态为 $(X(t), Z(t))$,若 $X(t) < X_e$,新到达的流体加入缓冲器,缓冲器中的流体继续排队等待接受服务.若 $X(t) > X_e$,新到达的流体止步,缓冲器位置大于 x_0^R 的流体选择违约,其余流体继续排队等待接受服务,若 $X(t) = X_e$,新到达的流体可以选择止步或加入,其余流体继续排队等待接受服务.定义 $U^R(x, i)$ 表示当流体到达时观察到缓冲器的服务状态为 i ,流体水平为 x 并选择加入缓冲器的期望收益.以下定理给出了期望收益 $U^R(x, i)$ 的具体表达式.

定理 1 在完全可见情形下,当所有的流体都遵循阈值策略 (x_0^R, x_1^R) ,其中 $x_0^R < x_1^R$,到达的流体观察到系统状态为 (x, i) 并选择加入缓冲器的期望收益 $U^R(x, i)$ 为:

$$U^R(x, i) = R - C \left[\frac{q_0 + q_1}{q_0\mu_1 + q_1\mu_0} x + \frac{q_i\mu_{i'}(\mu_{i'} - \mu_i)}{(q_0\mu_1 + q_1\mu_0)^2} (1 - e^{-\frac{q_0}{\mu_0} + \frac{q_1}{\mu_1} x}) \right], i = 0, 1, x \leq x_0^R. \quad (2)$$

$$U^R(x, 1) = R e^{-\frac{x-x_0^R}{\mu_1}} - C(a_1 + a_2), x > x_0^R. \quad (3)$$

其中,

$$i' = 1 - i, i = 0, 1, \quad (4)$$

$$a_1 = \frac{1}{q_1} (1 - e^{-\frac{x}{\mu_1}}) + \frac{q_0 + q_1}{q_0\mu_1 + q_1\mu_0} x_0^R e^{-\frac{x-x_0^R}{\mu_1}} - \frac{\mu_1}{q_1} \frac{q_0 + q_1}{q_0\mu_1 + q_1\mu_0} (e^{-\frac{x-x_0^R}{\mu_1}} - e^{-\frac{x}{\mu_1}}), \quad (5)$$

$$a_2 = \frac{q_0\mu_1(\mu_1 - \mu_0)}{(q_0\mu_1 + q_1\mu_0)^2} (e^{-q_1\frac{x-x_0^R}{\mu_1}} - e^{-q_1\frac{x}{\mu_1}}) - \frac{q_1\mu_0(\mu_1 - \mu_0)}{(q_0\mu_1 + q_1\mu_0)^2} (e^{-\frac{q_1}{\mu_1}x} - e^{-\frac{q_1}{\mu_1}x - \frac{q_0}{\mu_0}x_0^R}). \quad (6)$$

证明 在阈值策略 (x_0^R, x_1^R) 下,流体的期望收益为:

$$U^R(x, i) = RP^R(x, i) - CE[S^R(x, i)], \quad (7)$$

其中, $P^R(x, i)$ 是流体被服务的概率, $E[S^R(x, i)]$ 是流体在缓冲器中的平均逗留时间.

情形 1 当 $x \leq x_0^R$ 时,因为标记流体不会选择违约,所以 $P^R(x, i) = 1$. 由文献[15]中引理 3.1,有:

$$E[S^R(x, i)] = \frac{q_0 + q_1}{q_0\mu_1 + q_1\mu_0}x + \frac{q_i\mu_i(\mu_i - \mu_i)}{(q_0\mu_1 + q_1\mu_0)^2}(1 - e^{-(\frac{q_0}{\mu_0} + \frac{q_1}{\mu_1})x}), x \leq x_0^R, \quad (8)$$

由此得到式(2).

情形 2 当 $x > x_0^R$ 时,此时缓冲器一定处于正常工作期.如果在缓冲器由正常工作期变为部分故障期时,标记流体位置小于 x_0^R ,那么标记流体在被服务之前不会选择违约,也就是在正常工作期结束时,缓冲器至少要服务完 $x - x_0^R$ 个流体.定义 U_1 表示正常工作期的剩余时间,其服从参数为 q_1 的指数分布, $F_{U_1}(t)$ 是 U_1 的分布函数,由于指数分布的无记忆性,得到:

$$P^R(x, 1) = P(U_1 \geq \frac{x - x_0^R}{\mu_1}) = e^{-q_1\frac{x-x_0^R}{\mu_1}}, x > x_0^R. \quad (9)$$

标记流体的平均逗留时间如下:

$$E[S^R(x, 1)] = \int_0^\infty E[S^R(x, 1) | U_1 = t] dF_{U_1}(t), \quad (10)$$

其中,

$$E[S^R(x, 1) | U_1 = t] = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{x - x_0^R}{\mu_1}, \\ t + E[S^R(x - \mu_1 t, 0)], & \frac{x - x_0^R}{\mu_1} \leq t < \frac{x}{\mu_1}, \\ \frac{x}{\mu_1}, & t \geq \frac{x}{\mu_1}. \end{cases} \quad (11)$$

这里上分支表示正常工作期结束时,标记流体的位置仍高于 x_0^R ,因此标记流体在正常工作期结束的瞬间选择违约,标记流体的平均逗留时间为正常工作期的剩余时间 t .中间分支表示正常工作期结束时,标记流体的位置低于 x_0^R ,此时,缓冲器状态变为部分故障期且标记流体前的流体水平为 $x - \mu_1 t$.下分支表示标记流体服务完成时,正常工作期才结束,流体的平均逗留时间为缓冲器服务完成 x 个流体的时间 x/μ_1 .因此,

$$E[S^R(x, 1)] = \int_0^{\frac{x-x_0^R}{\mu_1}} tq_1 e^{-q_1 t} dt + \int_{\frac{x-x_0^R}{\mu_1}}^{\frac{x}{\mu_1}} \{t + E[S^R(x - \mu_1 t, 0)]\} q_1 e^{-q_1 t} dt + \int_{\frac{x}{\mu_1}}^\infty \frac{x}{\mu_1} q_1 e^{-q_1 t} dt, \quad (12)$$

经过代数运算得到:

$$E[S^R(x, 1)] = a_1 + a_2, x > x_0^R. \quad (13)$$

其中 a_1 和 a_2 由式(5)和(6)给出.由式(9)和(13)得到式(3).可以证明 $U^R(x, i) (i=0, 1)$ 是关于 x 的单调递减函数.

接下来给出了允许违约情形下的均衡阈值策略.

定理 2 在完全可见情形下,均衡策略由一对阈值 (x_0^R, x_1^R) 给出,其中 x_0^R 是方程(14)唯一的解, x_1^R 是方程(15)唯一的解.

$$\frac{R}{C} = \frac{q_0 + q_1}{q_0\mu_1 + q_1\mu_0}x + \frac{q_0\mu_1(\mu_1 - \mu_0)}{(q_0\mu_1 + q_1\mu_0)^2}(1 - e^{-(\frac{q_0}{\mu_0} + \frac{q_1}{\mu_1})x}), \quad (14)$$

$$R e^{-q_1\frac{x-x_0^R}{\mu_1}} = C(a_1 + a_2). \quad (15)$$

证明 如果阈值策略 (x_0^R, x_1^R) 是针对自身的最佳对策,那么它就是均衡阈值策略. $U^R(x, i)$ 是关于 x

的单调递减函数,有:

$$U^R(x, 0) > 0, 0 \leq x < x_0^R, \quad (16)$$

$$U^R(x_0^R, 0) = 0, \quad (17)$$

$$U^R(x, 1) > 0, 0 \leq x < x_1^R, \quad (18)$$

$$U^R(x_1^R, 1) = 0. \quad (19)$$

由方程(17)和(19)可以得到方程(14)和(15).

接着计算当流体遵循均衡阈值策略 (x_0^R, x_1^R) 时,过程 $\{X(t), Z(t)\}$ 的稳态分布.过程 $\{X(t), Z(t)\}$ 的稳态分布定义为:

$$F_i(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Pr\{X(t) \leq x, Z(t) = i\}, x \geq 0, i \in \{0, 1\}. \quad (20)$$

定理 3 在完全可见情形下,当流体遵循均衡阈值策略 (x_0^R, x_1^R) 时,稳态分布 $F_i(x) (i = 0, 1)$ 为:

情形 1 当 $\lambda > \mu_1$ 时,流体水平在 $[x_0^R, x_1^R]$ 范围内震荡.稳态分布如下:

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_0^R, \\ \frac{q_1}{q_1 + q_0}, & x \geq x_0^R. \end{cases} \quad (21)$$

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_0^R, \\ \frac{q_0}{q_1 + q_0} (1 - e^{-\frac{q_1(x-x_0^R)}{\lambda-\mu_1}}), & x_0^R \leq x < x_1^R, \\ \frac{q_0}{q_1 + q_0}, & x \geq x_1^R. \end{cases} \quad (22)$$

平均流体水平为:

$$E[X] = x_0^R + \frac{q_0(\lambda - \mu_1)}{q_1(q_1 + q_0)} \cdot (1 - e^{-\frac{q_1(x_1^R - x_0^R)}{\lambda - \mu_1}}). \quad (23)$$

情形 2 当 $\lambda = \mu_1$ 时,流体水平最终稳定在 x_0^R .

情形 3 当 $\mu_0 < \lambda < \mu_1$ 时,流体水平在 $[0, x_0^R]$ 范围内震荡.稳态分布如下:

$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{q_1}{q_1 + q_0} \cdot \frac{q_0(\lambda - \mu_1)(1 - e^{-x(\frac{q_1(x_1^R - x_0^R)}{\lambda - \mu_1})})}{q_0(\lambda - \mu_1) + q_1(\lambda - \mu_0)e^{-x_0^R(\frac{q_1}{\lambda - \mu_1} + \frac{q_0}{\lambda - \mu_0})}}, & 0 \leq x < x_0^R, \\ \frac{q_1}{q_1 + q_0}, & x \geq x_0^R. \end{cases} \quad (24)$$

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{q_0}{q_1 + q_0} \cdot \frac{q_0(\lambda - \mu_1) + q_1(\lambda - \mu_0)e^{-x(\frac{q_1}{\lambda - \mu_1} + \frac{q_0}{\lambda - \mu_0})}}{q_0(\lambda - \mu_1) + q_1(\lambda - \mu_0)e^{-x_0^R(\frac{q_1}{\lambda - \mu_1} + \frac{q_0}{\lambda - \mu_0})}}, & 0 \leq x < x_0^R, \\ \frac{q_0}{q_1 + q_0}, & x \geq x_0^R. \end{cases} \quad (25)$$

平均流体水平为:

$$E[X] = \frac{q_1(q_0 + q_1)(\lambda - \mu_0)x_0^R e^{-x_0^R(\frac{q_1}{\lambda - \mu_1} + \frac{q_0}{\lambda - \mu_0})}}{(q_0 + q_1)[q_0(\lambda - \mu_1) + q_1(\lambda - \mu_0)e^{-x_0^R(\frac{q_1}{\lambda - \mu_1} + \frac{q_0}{\lambda - \mu_0})}] + \frac{q_0 q_1(\mu_1 - \mu_0)(1 - e^{-x_0^R(\frac{q_1}{\lambda - \mu_1} + \frac{q_0}{\lambda - \mu_0})})}{(q_0 + q_1)(\frac{q_1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{q_0}{\mu_0 - \lambda})[q_0(\lambda - \mu_1) + q_1(\lambda - \mu_0)e^{-x_0^R(\frac{q_1}{\lambda - \mu_1} + \frac{q_0}{\lambda - \mu_0})}]}. \quad (26)$$

情形 4 当 $\lambda \leq \mu_0$ 时,流体水平稳定在 0.

证明 分不同的情形考虑定理 3.

情形 1 当 $\lambda > \mu_1$ 时,如果初始流体水平 $x < x_0^R$,则流体水平将会以速率 $\lambda - \mu_1$ (缓冲器处于正常工作期) 或速率 $\lambda - \mu_0$ (缓冲器处于部分故障期) 增长直到 x_0^R ,此时,流体水平会保持在 x_0^R (缓冲器处于部分故障期) 或继续以速率 $\lambda - \mu_1$ (缓冲器处于正常工作期) 增长直到 x_1^R ,下一次发生故障时位置多于 x_0^R 的流体选择违约,流体水平降为 x_0^R .

如果初始流体水平 $x \geq x_0^R$,下一次故障发生时位置多于 x_0^R 的流体选择违约,流体水平降为 x_0^R ,如此循环往复,所以流体水平在 $[x_0^R, x_1^R]$ 范围内震荡.图 1 描述了流体水平在这种情形下的震荡情况.

接下来计算 $F_0(x), x \geq x_0^R$,即缓冲器处于部分故障期且流体水平不超过 x 的概率,也就是部分故障期所占时间比,由此得到式(21).类似地,由于在每个正常工作期的开始,流体水平都为 x_0^R ,在正常工作期,流体以速率 $\lambda - \mu_1$ 增长,因此,只要正常工作期时间不超过 $(x - x_0^R)/(\lambda - \mu_1)$,流体水平就小于 $x, x \in [x_0^R, x_1^R]$. 根据更新报酬定理,有

$$F_1(x) = \frac{E[\min(\frac{x - x_0^R}{\lambda - \mu_1}, U)]}{\frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_1}}, x \in [x_0^R, x_1^R],$$

其中, U 表示缓冲器处于正常工作期的时间,由此得到式(22).用 $E[X] = \int_0^\infty (1 - F_0(x) - F_1(x))dx$ 推导出式(23).

情形 2 当 $\lambda = \mu_1$ 时,如果初始流体水平 $x < x_0^R$,流体水平将会保持在 x (缓冲器处于正常工作期) 或以速率增长 $\lambda - \mu_0$ (缓冲器处于部分故障期) 直到 x_0^R .如果初始流体水平 $x \geq x_0^R$,流体水平会保持在 x (当 $x < x_1^R$ 时) 或以速率 μ_1 (当 $x \geq x_1^R$ 时) 下降直到故障发生,此时,位置多于 x_0^R 的流体选择违约,流体水平降为 x_0^R 并保持在 x_0^R . 图 2 描述了流体水平在这种情形下的变化情况.

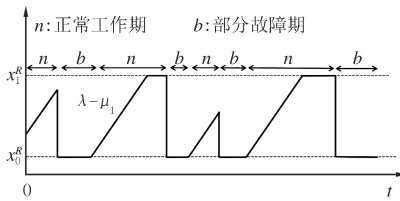


图1 $\lambda > \mu_1$ 时 $X(t)$ 随时间 t 的变化

Fig.1 $X(t)$ versus t when $\lambda > \mu_1$

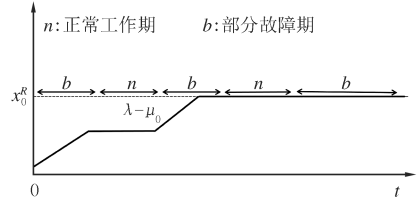


图2 $\lambda = \mu_1$ 时 $X(t)$ 随时间 t 的变化

Fig.2 $X(t)$ versus t when $\lambda = \mu_1$

情形 3 当 $\mu_0 < \lambda < \mu_1$ 时,如果初始流体水平 $x < x_0^R$,则流体水平将会以速率 $|\lambda - \mu_1|$ (缓冲器处于正常工作期) 下降直到 0 或速率 $\lambda - \mu_0$ (缓冲器处于部分故障期) 增长直到 x_0^R ,所以,流体水平在 $[0, x_0^R]$ 范围内震荡.

如果初始流体水平 $x \geq x_0^R$,则流体水平将会以速率 $|\lambda - \mu_1|$ (当 $x < x_1^R$ 时) 或速率 μ_1 (当 $x \geq x_1^R$ 时) 下降直到故障发生,此时,位置多于 x_0^R 的流体选择违约,流体水平下降到 x_0^R ,如此循环往复,所以流体水平在 $[0, x_0^R]$ 范围内震荡. 图 3 描述了流体水平在这种情形下的震荡情况.

得到稳态分布 $F_0(x)$ 和 $F_1(x)$ 在 $(0, x_0^R)$ 是可微的且满足微分方程:

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu_0) \frac{dF_0(x)}{dx} &= -q_0 F_0(x) + q_1 F_1(x), \\ (\lambda - \mu_1) \frac{dF_1(x)}{dx} &= q_0 F_0(x) - q_1 F_1(x). \end{aligned}$$

有边界条件 $F_0(0) = 0, F_1(x_0^R) = \frac{q_0}{q_1 + q_0}$. 解这个微分方程组得到式(24) 和(25).用 $E[X] = \int_0^\infty (1 - F_0(x) -$

$F_1(x))dx$ 推导出式(26).

情形4 当 $\lambda \leq \mu_0$ 时,如果初始流体水平 $x \leq x_0^R$,若缓冲器处于部分故障期,流体水平将会以速率 $|\lambda - \mu_0|$ ($\lambda < \mu_0$ 时)下降或保持不变($\lambda = \mu_0$ 时)直到0;若缓冲器处于正常工作期,流体水平将会以速率 $|\lambda - \mu_1|$ 下降直到0并保持.如果初始流体水平 $x > x_0^R$,则流体水平将会以速率 $|\lambda - \mu_1|$ (当 $x < x_1^R$ 时)或速率 μ_1 (当 $x \geq x_1^R$ 时)下降直到故障发生,此时,位置多于 x_0^R 的流体选择违约,流体水平下降到 x_0^R .如此循环往复,所以,流体水平保持在0.图4描述了流体水平在这种情形下的变化情况.

由上述结果,现在可以计算均衡吞吐量和均衡社会收益,分别用 TH_e^R 和 SW_e^R 表示.其中,均衡吞吐量即单位时间内完成服务流体的数量.

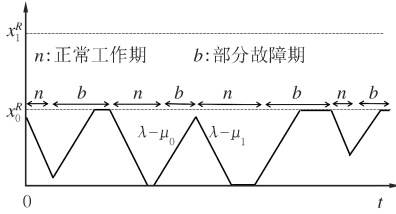


图3 $\mu_0 < \lambda < \mu_1$ 时 $X(t)$ 随时间 t 的变化

Fig. 3 $X(t)$ versus t when $\mu_0 < \lambda < \mu_1$

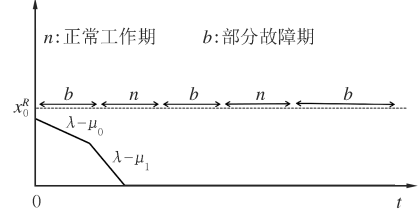


图4 $\lambda \leq \mu_0$ 时 $X(t)$ 随时间 t 的变化

Fig. 4 $X(t)$ versus t when $\lambda \leq \mu_0$

推论 1 在完全可见情形下,当流体遵循均衡策略 (x_0^R, x_1^R) 时,均衡吞吐量和均衡社会收益为:

情形 1 $\lambda > \mu_1$,

$$TH_e^R = \frac{\mu_1 q_0 + \mu_0 q_1}{q_1 + q_0}, \quad (27)$$

$$SW_e^R = R \cdot \frac{\mu_1 q_0 + \mu_0 q_1}{q_1 + q_0} - C \left[x_0^R + \frac{q_0 (\lambda - \mu_1)}{q_1 (q_1 + q_0)} \cdot (1 - e^{-\frac{q_1 (x_1^R - x_0^R)}{\lambda - \mu_1}}) \right]. \quad (28)$$

情形 2 $\lambda = \mu_1$,

$$TH_e^R = \frac{\mu_1 q_0 + \mu_0 q_1}{q_1 + q_0}, \quad (29)$$

$$SW_e^R = R \cdot \frac{\mu_1 q_0 + \mu_0 q_1}{q_1 + q_0} - C x_0^R. \quad (30)$$

情形 3 $\mu_0 < \lambda < \mu_1$,

$$TH_e^R = (1 - F_1(0))\mu_1 + F_1(0)\lambda + \frac{\mu_0 q_1}{q_1 + q_0}, \quad (31)$$

$$SW_e^R = R \cdot TH_e^R - CE[X]. \quad (32)$$

其中, TH_e^R 和 $E[X]$ 分别由式(31)和(26)给出.

情形 4 $\lambda \leq \mu_0$,

$$TH_e^R = \lambda, \quad (33)$$

$$SW_e^R = R\lambda. \quad (34)$$

证明 有如下公式:

$$SW_e^R = R \cdot TH_e^R - CE[X]. \quad (35)$$

分不同的情形考虑推论 1.

情形 1 当 $\lambda > \mu_1$ 时,只要处于正常工作期,缓冲器就以速率 μ_1 为流体服务.处于部分故障期,缓冲器就以速率 μ_0 为流体服务.因此,吞吐量是两个服务速率与它们各自状态开启时间占比的乘积之和,得到式(27).将式(23)和式(27)代入式(35)得到式(28).

情形 2 当 $\lambda = \mu_1$ 时,与情形 1 相同,得到式(29)和式(30).

情形 3 当 $\mu_0 < \lambda < \mu_1$ 时,只要处于正常工作期且流体水平大于0,缓冲器就以速率 μ_1 为流体服务,处于正常工作期且流体水平为0,缓冲器就以速率 λ 为流体服务;只要处于部分故障期,缓冲器就以速率 μ_0 为

流体服务.所以得到式(31).其中, $F_1(0) = \frac{q_0}{q_1 + q_0} \cdot \frac{q_0(\lambda - \mu_1) + q_1(\lambda - \mu_0)}{q_0(\lambda - \mu_1) + q_1(\lambda - \mu_0)e^{-x_0^R(\frac{q_1}{\lambda - \mu_1} + \frac{q_0}{\lambda - \mu_0})}}$.

情形 4 当 $\lambda \leq \mu_0$ 时,缓冲器总是以 λ 的服务速率为流体服务,因此,吞吐量为 λ ,得到式(33),将式(33)代入式(35)得到式(34).

不允许违约情形下的均衡进队阈值 $(x_e(0), x_e(1))$ 、均衡吞吐量 TH_e^N (即文献[15]中有效到达率 λ_{eff}) 和均衡社会收益 SW_e^N (即文献[15]中 $\beta^{fo}(x_*(0), x_*(1))$) 可由文献[15]中定理 3.1 和定理 3.2 给出.

3 数值实验

本节首先分析了允许违约情形和不允许违约情形下一些参数对流体均衡策略的影响.当流体均采用均衡策略时,进一步比较两种情形下的均衡社会收益,分析允许流体违约是否可以带来更大收益.

当 $\lambda \leq \mu_1$ 时,对比文献[15],允许违约和不允许违约两种情形的系统演化是相同的.这是因为流体水平从未超过均衡阈值 $x_e(0) = x_0^R$,因此,即使在允许违约的情况下,流体也从未选择违约,此时这两种情形下的均衡吞吐量和均衡社会收益相等.所以在此只讨论 $\lambda > \mu_1$ 时两种情形下的均衡吞吐量和均衡社会收益.

缓冲器从正常工作期转换到部分故障期越频繁,即 q_1 越大,平均服务速率就越低,流体加入缓冲器并等待完成服务的意愿就越小;缓冲器正常工作期时间越长,即 q_0 越大,流体加入缓冲器并等待完成服务的意愿就越大.因此,在实际应用中,需要充分考虑缓冲器的性能与故障处理能力,并及时调整和优化系统结构,保证流体的顺畅通行.

图 5 描绘了允许违约和不允许违约两种情形下阈值随 R 的变化曲线,给出参数 $(\lambda, \mu_0, \mu_1, q_0, q_1, C) = (6, 2, 5, 1, 3, 1)$.由上文分析阈值不依赖于到达率 λ ,阈值随着报酬 R 的增加而增加.由图 5 可知, $x_e(0) = x_0^R < x_e(1) < x_1^R$,这是因为当允许流体违约时,系统中的排队人数变少,所以流体更愿意进入排队系统并继续留在排队系统直到完成服务.

图 6 描绘了两种情形下均衡社会收益随到达率 λ 的变化曲线,给出参数 $(\mu_0, \mu_1, q_0, q_1, R, C) = (2, 5, 1, 3, 8, 1)$.随着 λ 的增大,两种情形下的均衡社会收益都减小,但总有 $SW_e^R \geq SW_e^N$.由上文分析,如果服务器持续工作,那么两种情形下的均衡吞吐量都等于平均服务速率.也就是说,虽然两种情形下的均衡吞吐量相同,都是定值 $\frac{\mu_1 q_0 + \mu_0 q_1}{q_1 + q_0}$,但当允许流体违约时,总是能够获得更高的收益.因此,从社会收益的角度来看,在 $\lambda > \mu_1$ 的情况下,允许流体违约总是可取的.

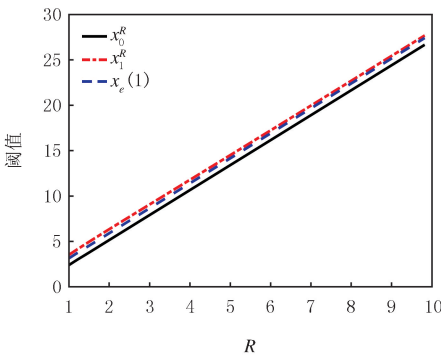


图5 均衡阈值随报酬R的变化曲线
Fig. 5 x_0^R, x_1^R and $x_e(1)$ versus R

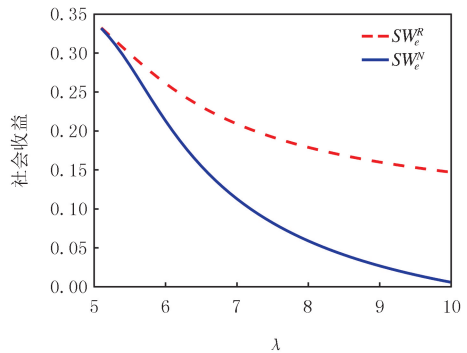


图6 均衡社会收益随到达率lambda的变化曲线
Fig. 6 SW_e^R and SW_e^N versus λ

4 结论

本文研究了具有违约顾客和部分故障的流体排队模型,分析了完全可见情形下顾客的均衡进队策略并讨论了系统参数对顾客进队策略的影响.通过数值实验对比两种情形下的均衡吞吐量和均衡社会收益,发现在到达率不超过正常工作期的服务速率时,两种情形的均衡社会收益相等,此时,违约选项意义较小.在到达

率高于正常工作期的服务速率时,允许违约情形下的均衡社会收益要超过不允许违约情形下的均衡社会收益,此时,违约选项的存在使得顾客可以进行有效的权衡选择,从而提高了整体效益.本文的讨论深化了对允许违约和不允许违约这两种情形的研究,更清楚地看到这两种情形之间的差异,为进行决策的社会管理者提供一定的理论依据,具有应用价值.在此基础上,未来的研究可以考虑不同排队模型下违约的价值,以及从社会规划者或服务商利益最大化角度对违约选项进行定价.

参 考 文 献

- [1] VIRTAMO J, NORROS I. Fluid queue driven by an M/M/1 queue[J]. *Queueing Systems*, 1994, 16(3): 373-386.
- [2] PARTHASARATHY P R, VIJAYASHREE K V, LENIN R B. An M/M/1 driven fluid queue-continued fraction approach[J]. *Queueing Systems*, 2002, 42(2): 189-199.
- [3] 徐秀丽, 王现英, 李晓庆. 具有可选服务的 M/M/1 排队驱动的流模型[J]. *西北师范大学学报(自然科学版)*, 2016, 52(1): 21-24.
XU X L, WANG X Y, LI X Q. Fluid model driven by an M/M/1 queue with optional service[J]. *Journal of Northwest Normal University (Natural Science)*, 2016, 52(1): 21-24.
- [4] WANG S, XU X L. Equilibrium strategies of the fluid queue with working vacation[J]. *Operational Research*, 2021, 21(2): 1211-1228.
- [5] EL-PAOUMY M S, RADWAN T. A matrix approach for stationary analysis fluid model driven by an M/M/1/N queue with discouraged arrivals[J]. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 2020, 28(1): 14.
- [6] BURNETAS A, ECONOMOU A. Equilibrium customer strategies in a single server Markovian queue with setup times[J]. *Queueing Systems*, 2007, 56(3): 213-228.
- [7] ECONOMOU A, KANTA S. Equilibrium balking strategies in the observable single-server queue with breakdowns and repairs[J]. *Operations Research Letters*, 2008, 36(6): 696-699.
- [8] GUO P F, HASSIN R. Strategic behavior and social optimization in Markovian vacation queues[J]. *Operations Research*, 2011, 59(4): 986-997.
- [9] 徐秀丽, 王蕊. 完全可见下具有两类顾客和故障启动排队系统的均衡分析[J]. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2021, 49(2): 7-14.
XU X L, WANG R. Equilibrium strategies of queueing system with two types of parallel customers, breakdowns and setup times in fully visible case[J]. *Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition)*, 2021, 49(2): 7-14.
- [10] ECONOMOU A, LOGOTHETIS D, MANOU A. The value of renegeing for strategic customers in queueing systems with server vacations/failures[J]. *European Journal of Operational Research*, 2022, 299(3): 960-976.
- [11] AVI-ITZHAK B, NAOR P. Some queueing problems with the service station subject to breakdown[J]. *Operations Research*, 1963, 11(3): 303-320.
- [12] SRIDHARAN V, JAYASHREE P J. Some characteristics on a finite queue with normal partial and total failures[J]. *Microelectronics Reliability*, 1996, 36(2): 265-267.
- [13] KALIDASS K, KASTURI R. A queue with working breakdowns[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2012, 63(4): 779-783.
- [14] 叶晴晴, 陈钰. 带有工作故障的 M/M/1 重试排队系统的性能分析[J]. *河南师范大学学报(自然科学版)*, 2023, 51(3): 82-89.
YE Q Q, CHEN Y. Performance analysis of M/M/1 retrial queueing system with working breakdowns[J]. *Journal of Henan Normal University (Natural Science Edition)*, 2023, 51(3): 82-89.
- [15] ECONOMOU A, MANOU A. Strategic behavior in an observable fluid queue with an alternating service process[J]. *European Journal of Operational Research*, 2016, 254(1): 148-160.

Equilibrium strategies of fluid queue with customer renegeing and partial-breakdown

Ye Qingqing, Li Ziyi

(School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

Abstract: To analyze the effect of renegeing customer on the queueing system, we consider the fluid model with renegeing customer and partial-breakdown policy. Firstly, the equilibrium threshold strategies are studied based on the "reward-cost" structure. Secondly, the equilibrium throughout and equilibrium social welfare are derived by using the renewal-reward theorem. Finally, some numerical examples are presented to illustrate the influence of key parameters on system performance measures. It reveals that the existence of the renegeing option is very beneficial to overloaded systems, i.e., for such systems balking alone is not sufficient to achieve good outcomes.

Keywords: fluid queue; equilibrium strategy; renegeing; social welfare