文章编号:1000-2367(2015)05-0022-08　　DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2015.05.005

关于非扩张映射上三类问题公共元的迭代算法

王亚丽[1a,1b],闫学阳[2]

(1. 河南师范大学 a. 计算机与信息工程学院;b."智慧商务与物联网技术"河南省工程实验室,河南 新乡 453007;2. 南阳医学高等专科学校 公共教学部,河南 南阳 473061)

摘　要:基于 Hilbert 空间的非扩张映射的一类问题的解或两类问题的公共解已给出了相应的迭代算法.针对非扩张映射上的广义均衡问题的解集,不动点集及变分包含问题的解集的公共元问题,提出了一种迭代算法,获得一强收敛定理和若干相关的推论.

关键词:广义均衡问题;非扩张映射族;不动点

中图分类号:O152　　**文献标志码**:A

设 H 为实 Hilbert 空间,其内积和范数分别表示为 $\langle .,. \rangle$, $\| \cdot \|$, C 为 Hilbert 空间中一非空闭凸子集.映射 $T: C \to C$ 称为非扩张映射,如果满足 $\| Tx - Ty \| \le \| x - y \|$, $\forall x, y \in C$. 用 $F(T)$ 表示 T 的不动点集,即 $F(T) = \{x \in C, Tx = x\}$.

设二元函数 $f: C \times C \to \mathbf{R}$, $\mathbf{R}$ 为实数集, $A: C \to H$ 为一非线性映射,所谓的广义均衡问题为:求解 $x \in C$ 使得

$$f(x,y) + \langle Ax, y - x \rangle \ge 0, \forall y \in C, \tag{1}$$

其解集记为 $GEP(f,A)$.

特别地,如果 $A \equiv 0$,则问题(1) 为一般的均衡问题,即求 $x \in C$ 使得

$$f(x,y) \ge 0, \forall y \in C, \tag{2}$$

记其解集为 $EP(f)$.

当 $f \equiv 0$ 时,则问题(1) 成为变分不等式问题,即求 $x \in C$ 使得

$$\langle Ax, y - x \rangle \ge 0, \forall y \in C, \tag{3}$$

其解集记为 $VI(C,A)$.

2009 年,Yonghong Yao[1] 提出了一种新的迭代算法来解决非扩张映射的不动点问题,即

$$\begin{cases} y_n = P_C[(1-\alpha_n)x_n], \\ x_{n+1} = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T y_n, \end{cases}$$

在适当的条件下,序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $F(T)$ 中的一点.

2009 年,Jintana Joomwong[2] 提出了一种迭代算法来解决非扩张映射族的不动点问题,即

$$\begin{cases} y_n = P_C[(1-\alpha_n)x_n], \\ x_{n+1} = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T_n y_n, \end{cases}$$

证明了在适当的条件下,序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 $F(T_n)$ 中的一点.

与此同时,又有许多学者把不动点问题,变分包含问题和变分不等式问题等结合起来,提出了一些新的迭代算法,以此来研究寻求他们的相关公共元的问题.

2007,Shang[3] 等人提出一种新的迭代算法,用来寻求非扩张映射的不动点集和变分不等式问题的解集

收稿日期:2015-06-01;**修回日期**:2015-07-13.

基金项目:国家自然科学基金(U1404602);河南省重点科技攻关计划(102102210178).

第 1 作者简介(通信作者):王亚丽(1979-),女,河南三门峡人,河南师范大学讲师,研究方向为智慧商务中间件技术、算法设计与分析,E-mail:yaliwan_g@163.com.

的公共元. 即 $x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+\beta_n x_n+\gamma_n SP_C(I-\tau_n B)x_n$，$\forall n\geq 1$，证明了在一定的条件下，所生成的序列 $\{x_n\}$ 强收敛于一点 $z\in F(S)\cap VI(C,B)$.

2008，Chang[4] 等人研究了一个寻求变分包含问题的解集和非扩张映射不动点集合的公共元的迭代方法，即对任意的 $x_0=x\in H$，$y_n=J_{M,\lambda}(x_n-\lambda Ax_n)$，$x_{n+1}=\alpha_n x+(1-\alpha_n)Sy_n$，$\forall n\geq 0$，其中 $J_{M,\lambda}=(I+\lambda M)^{-1}$ 为预解算子.

受文献[1－4]的启示，本文结合广义均衡问题，提出了一种迭代算法，得到了广义均衡问题的解集和非扩张映射族的公共不动点集及变分包含问题的解集的公共元，获得一个强收敛定理和若干相关的推论. 所得结果推广了文献[1－2]等的相关的结果.

1　预备知识

设 H 为实 Hilbert 空间，C 为 Hilbert 空间中一非空闭凸子集.

设 $B: H\to H$ 为一单值的非线性映射，$M: H\to 2^H$ 为一多值映射，研究如下变分包含问题：求 $u\in H$，使得 $\theta\in B(u)+M(u)$，其中 θ 为 H 中的零向量，记其解集为 $I(B,M)$.

定义 1[5]　多值映射 $M: H\to 2^H$ 称为单调的，如果对 $\forall x,y\in H$ 以及 $\forall f\in Mx, g\in My$，有 $\langle x-y, f-g\rangle\geq 0$. 单调映射 $M: H\to 2^H$ 称为极大单调的，如果 $\langle x,y\rangle\in H\times H$，$\langle x-y,f-g\rangle\geq 0$ 对 $\forall (y,g)\in G(M)$，有 $x\in D(M)$，$f\in M(x)$，其中 $G(M)=\{(x,y)\in H\times H: y\in M(x)\}$ 为映像 M 的图像.

定义 2　映射 $B: H\to H$ 称系数为 β 逆强单调算子，如果存在一常数 $\beta>0$ 使得 $\langle Bx-By, x-y\rangle\geq \beta\|Ax-Ay\|^2$. 如果 B 是 β 逆强单调算子，那么 B 必是 $\frac{1}{\beta}-$Lipschitz 连续的.

引理 1[6]　$M: H\to 2^H$ 为一极大单调映射，$B: H\to H$ 为 Lipschitz 连续映射，那么映射 $S=M+B: H\to 2^H$ 为一极大单调映射.

由极大单调算子的满射性，如果 $M: H\to 2^H$ 是极大单调的，$B: H\to H$ 系数为 β 的逆强单调算子且 $\lambda\in(0,2\beta)$，那么 $I(B,M)$ 非空且为闭凸的集合.

定义 3[6-7]　设映射 $M: H\to 2^H$ 为极大单调的，将预解算子 $J_{M,\lambda}$ 定义为：$J_{M,\lambda}=(I+\lambda M)^{-1}$，$\lambda>0$.

容易证明预解算子是非扩张的，单值的且系数为 1 的逆强单调算子，即 $\langle x-y, J_{M,\lambda}x-J_{M,\lambda}y\rangle\geq\|J_{M,\lambda}x-J_{M,\lambda}y\|^2$，$\forall x,y\in H$.

此外，u 是变分包含 $\theta\in B(u)+M(u)$ 的解当且仅当 $u=J_{M,\lambda}(I-\lambda B)u$，$\lambda>0$，即变分包含问题的解是预解算子 $J_{M,\lambda}(I-\lambda B)$，$\lambda>0$ 的不动点，其中 $B: H\to H$ 系数为 β 的逆强单调算子.

定义 4[8]　设 H 是一个实 Hilbert 空间，C 是 H 中一非空闭凸子集，$u\in H$ 为一给定的点. 如果存在唯一的 $z\in C$ 使得 $\|z-u\|=\min\|u-v\|$，$\forall v\in C$，则称 z 是 u 在 C 上的度量投影，记为 $z=P_C(u)$. 易知它是非扩张的且有以下结论成立：(i) $\|P_Cx-P_Cy\|^2\leq\langle P_Cx-P_Cy, x-y\rangle$，$\forall x,y\in H$；(ii) $P_Cx\in C$，$\langle x-P_Cx, P_Cx-y\rangle\geq 0$，$\forall y\in C$；(iii) $z\in VI(C,A)\Leftrightarrow z=P_C(z-\lambda Az)$，$\lambda>0$.

定义 5[1]　设 $T: C\to C$ 为非扩张映射，对 $t\in(0,1)$，定义一个压缩映射：$T_tx=TP_C[(1-t)x]$，$\forall x\in C$，由 Banach 压缩映像原理可知，T_t 存在唯一的一个不动点 $x_t=TP_C[(1-t)x_t]$.

引理 2[1]　C 是 Hilbert 中一非空闭凸子集，$T: C\to C$ 为一非扩张映射，且 $F(T)\neq\emptyset$，对任意的 $t\in(0,1)$，网 $\{x_t\}$ 由定义 5 所确定，那么当 $t\to 0$ 时，$\{x_t\}$ 强收敛于 T 的一个不动点.

引理 3[9]　设 K 为 Hilbert 空间中一非空有界闭凸子集，$\{T_n\}$，$(n=1,2,\cdots)$ 为一组从 K 映到 K 的映射，如果 $\lim\limits_{k,l\to\infty}\{\sup\|T_kz-T_lz\|: z\in K\}<\infty=0$，那么对任意的 $x\in K$，序列 $\{T_nx\}$ 强收敛于 K 中的某一点. 定义映射 $T: K\to K$ 为 $Tx=\lim\limits_{n\to\infty}T_nx$，$\forall x\in K$，这时，$\limsup\limits_{n\to\infty}\{\|T_nz-Tz\|: z\in K\}=0$.

为研究均衡问题，通常假设：(a_1) $f(x,x)=0$，$\forall x\in C$；(a_2) $f(x,y)+f(y,x)\leq 0$，$\forall x,y\in C$；(a_3) $\lim\limits_{t\to 0}f(tz+(1-t)x,y)\leq f(x,y)$，$\forall x,y,z\in C$；$(a_4)$ $\forall x\in C$，$y\mapsto f(x,y)$ 是凸且弱的下半连续的.

引理 4[10-11]　设 C 是 Hilbert 空间中一非空的闭凸子集，$f: C\times C\to\mathbf{R}$ 满足条件 $(a_1)\sim(a_4)$，那么对任意 $r>0$ 和 $x\in H$，则存在 $z\in C$ 使得 $f(z,y)+\langle Ax, y-z\rangle+\frac{1}{r}\langle y-z, z-x\rangle\geq 0$，$\forall y\in C$. 进一步地，

定义映射 $T_r: H \to C$ 如下 $T_r(x) = \left\{z \in C: f(z,y) + \langle Ax, y-z\rangle + \frac{1}{r}\langle y-z, z-x\rangle \geq 0, \forall y \in C\right\}$, $\forall x \in H$,则以下结论成立:(i) T_r 是单值的;(ii) T_r 是稳定非扩张(firmly nonexpansive) 映像,即 $\forall x,y \in H$ 有 $\| T_rx - T_ry \|^2 \leq \langle T_rx - T_ry, x-y\rangle$;(iii) $F(T_r) = GEP(f)$;(iv) GEP(f) 是闭凸的.

引理 5[12] 设 $a_{n+1} \leq (1-\theta_n)a_n + b_n, n \geq 0$ 其中 $\{a_n\} \subset (0,+\infty), \{b_n\} \subset (0,+\infty), \{\theta_n\} \subset [0,1)$. 若如下条件满足:(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n = \infty$;(ii) $\limsup_{n\to\infty}\frac{b_n}{\theta_n} \leq 0$ 或者 $\sum_{n=1}^{\infty} | b_n | < \infty$,那么 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

引理 6[13] 设 C 是实 Hilbert 中一非空闭凸子集,$T: C \to C$ 为一非扩张映射. 那么 $I-T$ 在 θ 处是半闭的. 即,如果 x_n 弱收敛于 $x \in C$ 且 $x_n - Tx_n \to \theta$,那么有 $x = Tx$.

引理 7[14] 设 $\{x_n\},\{z_n\}$ 为 Banach 空间 E 中的两个有界序列,$\{\beta_n\} \subset [0,1]$ 且 $0 < \liminf_{n\to\infty}\beta_n \leq \limsup_{n\to\infty}\beta_n < 1$,如果 $x_{n+1} = (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n, n \geq 0$ 且有 $\limsup_{n\to\infty}(\| z_{n+1} - z_n \| - \| x_{n+1} - x_n \|) \leq 0$,那么 $\lim_{n\to\infty} \| z_n - x_n \| = 0$.

另外,在实 Hilbert 中,$\forall x,y \in H$ 和 $\lambda \in [0,1]$ 有下式成立:

$$\| \lambda x + (1-\lambda)y \|^2 = \lambda \| x \|^2 + (1-\lambda) \| y \|^2 - \lambda(1-\lambda) \| x-y \|^2.$$

2 主要结果

定理 1 设 C 是实 Hilbert 中一非空闭凸子集,$f: C \times C \to \mathbf{R}$ 满足条件 $(a_1)-(a_4)$,$A: C \to H$ 是一系数为 α 的逆强单调算子,$B: H \to H$ 是一系数为 β 的逆强单调算子,$M: H \to 2^H$ 为极大单调映射,$T_n: C \to C(n = 1,2,\cdots)$ 是一非扩张映射无限族. 设 $r_n \in (0,2\alpha), \lambda_n \in (0,2\beta), \{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ 为 $(0,1)$ 中的序列, 如果 $\Phi := GEP(f,A) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \cap I(B,M) \neq \varnothing$. $\{x_n\}$ 由以下迭代算法生成:$x_1 \in C$

$$\begin{cases} u_n: f(u_n,y) + \langle Ax_n, y-u_n\rangle + \frac{1}{r_n}\langle y-u_n, u_n-x_n\rangle \geq 0, \forall y \in C, \\ v_n = J_{M,\lambda_n}(u_n - \lambda_n Bu_n), \\ y_n = P_C[(1-\alpha_n)v_n], \\ x_{n+1} = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T_n y_n; \end{cases}$$

且有以下条件满足:(i) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \infty$; (ii) $0 < \liminf_{n\to\infty}\beta_n \leq \limsup_{n\to\infty}\beta_n < 1$; (iii) $0 < \liminf_{n\to\infty} r_n \leq \limsup_{n\to\infty} r_n < 2\alpha$, $\lim_{n\to\infty} | r_{n+1} - r_n | = 0$, $0 < \liminf_{n\to\infty}\lambda_n \leq \limsup_{n\to\infty}\lambda_n < 2\beta$,

对于 H 中的任意有界闭凸子集 K,如果 $\{T_n\}, T$ 如引理 3 所述且满足 $F(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$,那么序列 $\{x_n\}$ 强收敛一点 z,其中 $z \in \Phi$.

证明 分以下步骤对定理进行证明.

第 1 步 证明 $\{x_n\},\{u_n\},\{v_n\},\{T_nx_n\},\{T_nu_n\},\{T_ny_n\},\{T_nv_n\}$ 均为有界序列. 由引理 4 可知 $u_n = T_{r_n}(x_n - r_nAx_n)$. 任取 $p \in \Phi$,显然 $p = T_{r_n}(p - r_nAp)$. 那么

$$\begin{aligned} \| u_n - p \|^2 \leq \| (x_n - r_nAx_n) - (p - r_nAp) \| &= \| x_n - p \|^2 - 2r_n\langle x_n - p, Ax_n - Ap\rangle + \\ r_n^2 \| Ax_n - Ap \|^2 \leq \| x_n - p \|^2 - 2r_n\alpha \| Ax_n - Ap \|^2 &+ r_n^2 \| Ax_n - Ap \|^2 = \\ \| x_n - p \|^2 - r_n(2\alpha - r_n) \| Ax_n - Ap \|^2 &\leq \| x_n - p \|^2. \end{aligned} \tag{4}$$

由 J_{M,λ_n} 是非扩张的,B 是逆强单调算子以及 $p = J_{M,\lambda_n}(p - \lambda_nBp)$,结合(4) 式得

$$\begin{aligned} | v_n - p \|^2 \leq \| (u_n - \lambda_nBu_n) - (p - \lambda_nBp) \|^2 \leq \| u_n - p \|^2 - \lambda_n(2\beta - \lambda_n) \| Bu_n - Bp \|^2 \leq \\ \| x_n - p \|^2 - r_n(2\alpha - r_n) \| Ax_n - Ap \|^2 - \lambda_n(2\beta - \lambda_n) \| Bu_n - Bp \|^2 \leq \| x_n - p \|^2, \end{aligned} \tag{5}$$

于是

$$\begin{aligned} \| x_{n+1} - p \| \leq (1-\beta_n) \| x_n - p \| + \beta_n \| y_n - p \| \leq (1-\beta_n) \| x_n - p \| + \beta_n \| (1-\alpha_n)v_n - p \| \leq \\ (1-\beta_n) \| x_n - p \| + \beta_n\{(1-\alpha_n) \| v_n - p \| + \alpha_n \| p \| \} \leq (1-\alpha_n\beta_n) \| x_n - p \| + \alpha_n\beta_n \| p \| \leq \end{aligned}$$

$$\max\{\|x_n-p\|,\|p\|\}\le$$
$$\vdots$$
$$\max\{\|x_1-p\|,\|p\|\}.$$

由此可见，序列$\{x_n\}$是有界的. 易见$\{u_n\}$，$\{v_n\}$，$\{T_nx_n\}$，$\{T_ny_n\}$，$\{T_nv_n\}$，$\{T_nu_n\}$也是有界的. 不失一般性，可取有界闭凸子集$K\subset C$使得$\{x_n\}$，$\{u_n\}$，$\{T_nx_n\}$，$\{T_ny_n\}$，$\{T_nu_n\}\subset K$.

第 2 步 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$.

由$u_n=T_{r_n}(x_n-r_nAx_n)$，则有以下两式成立

$$f(u_{n+1},u)+\langle Ax_{n+1},u-u_{n+1}\rangle+\frac{1}{r_{n+1}}\langle u-u_{n+1},u_{n+1}-x_{n+1}\rangle\ge 0,\forall u\in C,\tag{6}$$

$$f(u_n,u)+\langle Ax_n,u-u_n\rangle+\frac{1}{r_n}\langle u-u_n,u_n-x_n\rangle\ge 0,\forall u\in C.\tag{7}$$

令(6)式中$u=u_n$和(7)式中$u=u_{n+1}$，则有

$$f(u_{n+1},u_n)+\langle Ax_{n+1},u_n-u_{n+1}\rangle+\frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n-u_{n+1},u_{n+1}-x_{n+1}\rangle\ge 0,\tag{8}$$

$$f(u_n,u_{n+1})+\langle Ax_n,u_{n+1}-u_n\rangle+\frac{1}{r_n}\langle u_{n+1}-u_n,u_n-x_n\rangle\ge 0,\tag{9}$$

(8)和(9)式相加并由f的单调性得

$$\langle Ax_{n+1}-Ax_n,u_n-u_{n+1}\rangle+\langle u_n-u_{n+1},\frac{u_{n+1}-x_{n+1}}{r_{n+1}}-\frac{u_n-x_n}{r_n}\rangle\ge 0.$$

类似于式(4)，可知$I-r_nA$是非扩张的，因此

$$0\le\langle u_n-u_{n+1},r_n(Ax_{n+1}-Ax_n)+\frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1}-x_{n+1})-(u_n-x_n)\rangle\le-\|u_n-u_{n+1}\|^2+$$
$$\|u_n-u_{n+1}\|\left\{\|(x_{n+1}-r_nAx_{n+1})-(x_n-r_nAx_n)\|+\left|1-\frac{r_n}{r_{n+1}}\right|\|u_{n+1}-x_{n+1}\|\right\}\le$$
$$-\|u_n-u_{n+1}\|^2+\|u_n-u_{n+1}\|\left\{\|x_{n+1}-x_n\|+\left|1-\frac{r_n}{r_{n+1}}\right|\|u_{n+1}-x_{n+1}\|\right\},$$

化简可得

$$\|u_n-u_{n+1}\|\le\|x_{n+1}-x_n\|+\left|1-\frac{r_n}{r_{n+1}}\right|\|u_{n+1}-x_{n+1}\|.\tag{10}$$

记$z_n=T_ny_n$，由(10)式

$$\|z_{n+1}-z_n\|\le\|T_{n+1}y_{n+1}-T_{n+1}y_n\|+\|T_{n+1}y_n-T_ny_n\|\le\|(1-\alpha_{n+1})u_{n+1}-(1-\alpha_n)u_n\|+$$
$$\|T_{n+1}y_n-T_ny_n\|\le\|u_{n+1}-u_n\|+\alpha_{n+1}\|u_{n+1}\|+\alpha_n\|u_n\|+\|T_{n+1}y_n-T_ny_n\|\le$$
$$\|x_{n+1}-x_n\|+\left|1-\frac{r_n}{r_{n+1}}\right|\|u_{n+1}-x_{n+1}\|+\alpha_{n+1}\|u_{n+1}\|+$$
$$\alpha_n\|u_n\|+\sup\{\|T_{n+1}t-T_nt\|:t\in K\},$$

于是$\|z_{n+1}-z_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|\le\left|1-\frac{r_n}{r_{n+1}}\right|\|u_{n+1}-x_{n+1}\|+\alpha_{n+1}\|u_{n+1}\|+\alpha_n\|u_n\|+\sup\{\|T_{n+1}t-T_nt\|:t\in K\}$，所以$\limsup\limits_{n\to\infty}(\|z_{n+1}-z_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|)\le 0$. 由引理 7 得$\lim\limits_{n\to\infty}\|z_n-x_n\|=0$. 从而$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=\lim\limits_{n\to\infty}\|(1-\beta_n)x_n+\beta_nz_n-x_n\|=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n\|z_n-x_n\|=0$.

第 3 步　证明当$n\to\infty$时，$\|x_n-u_n\|\to 0$，$\|v_n-u_n\|\to 0$，$\|v_n-x_n\|\to 0$和$\|y_n-x_n\|\to 0$，$\|x_n-T_nx_n\|\to 0$，$\|x_n-Tx_n\|\to 0$，$\|y_n-Ty_n\|\to 0$.

先证明$\lim\limits_{n\to\infty}\|Ax_n-Ap\|=0$和$\lim\limits_{n\to\infty}\|Bu_n-Bp\|=0$. 为此，任取$p\in\Phi$，

$$\|x_{n+1}-p\|^2\le 1-\beta_n)\|x_n-p\|^2+\beta_n\|y_n-p\|^2\le(1-\beta_n)\|x_n-p\|^2+$$
$$\beta_n\{(1-\alpha_n)\|v_n-p\|^2-2\alpha_n(1-\alpha_n)\langle v_n-p,p\rangle+\alpha_n\|p\|^2\}\le(1-\beta_n)\|x_n-p\|^2+$$
$$\beta_n\{(1-\alpha_n)\|v_n-p\|^2+2\alpha_n\|v_n-p\|\|p\|+\alpha_n\|p\|^2\}\le(1-\beta_n)\|x_n-p\|^2+$$
$$\beta_n\{\|x_n-p\|^2-r_n(2\alpha-r_n)\|Ax_n-Ap\|^2-\lambda_n(2\beta-\lambda_n)\|Bu_n-Bp\|^2\}+3\beta_n\alpha_nM_1\le$$

$$\| x_n - p \|^2 - \beta_n r_n (2\alpha - r_n) \| Ax_n - Ap \|^2 - \beta_n \lambda_n (2\beta - \lambda_n) \| Bu_n - Bp \|^2 + 3\beta_n \alpha_n M_1, \tag{11}$$

其中 $M_1 = \sup\{ \| v_n - p \| \| p \|, \| p \|^2, n \geq 1\}$. 从而

$$\beta_n r_n (2\alpha - r_n) \| Ax_n - Ap \|^2 \leq \| x_n - p \|^2 - \| x_{n+1} - p \|^2 + 3\beta_n \alpha_n M_1 \leq \\ \| x_{n+1} - x_n \| (\| x_n - p \| + \| x_{n+1} - p \|) + 3\beta_n \alpha_n M_1,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \| Ax_n - Ap \| = 0$. 同理 $\lim\limits_{n\to\infty} \| Bu_n - Bp \| = 0$.

由引理 4 有

$$\| u_n - p \|^2 \leq \langle (I - r_n A) x_n - (I - r_n A) p, u_n - p \rangle = \frac{1}{2} \{ \| (I - r_n A) x_n - (I - r_n A) \|^2 + \\ \| u_n - p \|^2 - \| (I - r_n A) x_n - (I - r_n A) P - (u_n - p) \|^2 \} \leq \frac{1}{2} \{ \| u_n - p \|^2 + \\ \| x_n - p \|^2 - \| (x_n - u_n) - r_n (Ax_n - Ap) \|^2 \},$$

化简得

$$\| u_n - p \|^2 \leq \| x_n - p \|^2 - \| x_n - u_n \|^2 + 2r_n \langle x_n - u_n, Ax_n - Ap \rangle - r_n^2 \| Ax_n - Ap \|^2 \leq \\ \| x_n - p \|^2 - \| x_n - u_n \|^2 + 2r_n \langle x_n - u_n, Ax_n - Ap \rangle. \tag{12}$$

又 $\| v_n - p \|^2 \leq \| u_n - p \|^2 - \lambda_n (2\beta - \lambda_n) \| Bu_n - Bp \|^2 \leq \| u_n - p \|^2$, 因此

$$\| x_{n+1} - p \|^2 \leq (1 - \beta_n) \| x_n - p \|^2 + \beta_n \{ (1 - \alpha_n) \| v_n - p \|^2 - 2\alpha_n (1 - \alpha_n) \langle v_n - p, p \rangle + \alpha_n \| p \|^2 \} \leq \\ (1 - \beta_n) \| x_n - p \|^2 + \beta_n \{ (1 - \alpha_n) \| u_n - p \|^2 - 2\alpha_n (1 - \alpha_n) \langle v_n - p, p \rangle + \alpha_n \| p \|^2 \} \leq \\ \| x_n - p \|^2 - \beta_n \| x_n - u_n \|^2 + 2r_n \beta_n (1 - \alpha_n) \| x_n - u_n \| \| Ax_n - Ap \| + 3\beta_n \alpha_n M_1.$$

移项可得

$$\beta_n \| x_n - u_n \|^2 \leq \| x_n - p \|^2 - \| x_{n+1} - p \|^2 + 2r_n \beta_n (1 - \alpha_n) \| x_n - u_n \| \| Ax_n - Ap \| + 3\beta_n \alpha_n M_1 = \\ (\| x_n - p \| + \| x_{n+1} - p \|) \| x_n - x_{n+1} \| + 2r_n \beta_n (1 - \alpha_n) \| x_n - u_n \| \| Ax_n - Ap \| + 3\beta_n \alpha_n M_1,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - u_n \|^2 = 0$.

另一方面,

$$\| v_n - p \|^2 = \| J_{M,\lambda_n} (I - \lambda_n B) u_n - J_{M,\lambda_n} (I - \lambda_n B) p \|^2 \leq \langle (I - \lambda_n B) u_n - (I - \lambda_n B) p, v_n - p \rangle = \\ \frac{1}{2} \{ \| (I - \lambda_n B) u_n - (I - \lambda_n B) p \|^2 + \| v_n - p \|^2 - \| (I - \lambda_n B) u_n - (I - \lambda_n B) p - (v_n - p) \|^2 \} \leq \\ \frac{1}{2} \{ \| u_n - p \|^2 + \| v_n - p \|^2 - \| (u_n - v_n) - \lambda_n (Bu_n - Bp) \|^2 \} = \frac{1}{2} \{ \| u_n - p \|^2 + \\ \| v_n - p \|^2 - \| u_n - v_n \|^2 + 2\lambda_n \langle u_n - v_n, Bu_n - Bp \rangle - \lambda_n^2 \| Bu_n - Bp \|^2 \},$$

化简得

$$\| v_n - p \|^2 \leq \| x_n - p \|^2 - \| u_n - v_n \|^2 + 2\lambda_n \| u_n - v_n \| \| Bu_n - Bp \|, \tag{13}$$

因此

$$\| x_{n+1} - p \|^2 \leq (1 - \beta_n) \| x_n - p \|^2 + \beta_n (1 - \alpha_n) \| v_n - p \|^2 + 3\alpha_n \beta_n M_1 \leq \| x_n - p \|^2 - \\ \beta_n (1 - \alpha_n) \| u_n - v_n \|^2 + 2\beta_n \lambda_n (1 - \alpha_n) \| u_n - v_n \| \| Bu_n - Bp \| + 3\alpha_n \beta_n M_1,$$

从而

$$\beta_n (1 - \alpha_n) \| x_n - u_n \|^2 \leq \| x_n - p \|^2 - \| x_{n+1} - p \|^2 + 2r_n \beta_n (1 - \alpha_n) \| x_n - \\ u_n \| \| Ax_n - Ap \| + 3\beta_n \alpha_n M_1 = (\| x_n - p \| + \| x_{n+1} - p \|) \| x_n - \\ x_{n+1} \| + 2r_n \beta_n (1 - \alpha_n) \| x_n - u_n \| \| Ax_n - Ap \| + 3\beta_n \alpha_n M_1,$$

由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n - v_n \| = 0$. 又 $\| x_n - v_n \| = \| u_n - v_n \| + \| x_n - u_n \|$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - v_n \| = 0$. 显然 $\| x_n - y_n \| \leq \| (1 - \alpha_n)(x_n - v_n) + \alpha_n x_n \| \leq (1 - \alpha_n) \| x_n - v_n \| + \alpha \| x_n \|$, 所以, $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| = 0$. 而

$$\| x_n - T_n x_n \| \leq \| x_n - x_{n+1} \| + \| x_{n+1} - T_n x_n \| \leq \| x_n - x_{n+1} \| + (1 - \beta_n) \| x_n - T_n x_n \| + \\ \beta_n \| T_n y_n - T_n x_n \| \leq \| x_n - x_{n+1} \| + (1 - \beta_n) \| x_n - T_n x_n \| + \beta_n \| (1 - \alpha_n) v_n - x_n \| \leq \\ \| x_n - x_{n+1} \| + (1 - \beta_n) \| x_n - T_n x_n \| + \beta_n \{ (1 - \alpha_n) \| v_n - x_n \| + \alpha_n \| x_n \| \},$$

$\beta_n \| x_n - T_n x_n \| \leq \| x_n - x_{n+1} \| + \beta_n \{ (1-\alpha_n) \| v_n - x_n \| + \alpha_n \| x_n \| \}$,

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - T_n x_n \| = 0$. 又 $\| x_n - T x_n \| = \| x_n - T x_n + T_n x_n - T_n x_n \| \leq \| x_n - T_n x_n \| + \| T_n x_n - T x_n \| \leq \| x_n - T_n x_n \| + \sup\{ \| T_n x - T x \| : x \in K \}$，及 $\| y_n - T y_n \| \leq \| y_n - x_n \| + \| x_n - T x_n \| + \| T x_n - T y_n \| \leq 2 \| y_n - x_n \| + \| x_n - T x_n \|$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - T x_n \| = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty} \| y_n - T y_n \| = 0$.

第 4 步　证明 $\{x_n\}$ 强收敛于 $z \in F(T) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F(T_n)$.

设 $\{x_t\}$ 由定义 5 所确定，由引理 2 知，当 $t \to 0$ 时，$x_t \to z$ 其中 $z \in F(T)$.

接下来，证明 $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle z, z - y_n \rangle \leq 0$，显然 $y_n \in C$. 所以

$$\begin{aligned} \| x_t - y_n \|^2 = {} & \| x_t - T y_n + T y_n - y_n \|^2 = \| x_t - T y_n \|^2 + 2\langle x_t - T y_n, T y_n - y_n \rangle + \\ & \| T y_n - y_n \|^2 \leq \| x_t - T y_n \|^2 + 2\langle x_t - y_n, T y_n - y_n \rangle - 2\langle T y_n - y_n, T y_n - y_n \rangle + \\ & \| T y_n - y_n \|^2 \leq \| T P_C[(1-t)x_t] - T y_n \|^2 + 2 \| x_t - y_n \| \, \| T y_n - y_n \| - \\ & \| T y_n - y_n \|^2 \leq \| (1-t)x_t - y_n \|^2 + 2 \| x_t - y_n \| \, \| T y_n - y_n \| \leq \\ & \| x_t - y_n \|^2 - 2t\langle x_t - y_n, x_t \rangle + t^2 \| x_t \|^2 + 2 \| x_t - y_n \| \, \| T y_n - y_n \| \leq \\ & \| x_t - y_n \|^2 - 2t\langle x_t - y_n, x_t \rangle + M_2 \{ t^2 + \| T y_n - y_n \| \}, \end{aligned} \tag{14}$$

其中 $M_2 = \sup\{ \| x_t \|^2, 2 \| x_t - y_n \| \}$，$\forall n \in N$. 则 $\limsup\limits_{t\to 0}(\limsup\limits_{n\to\infty} \langle x_t - y_n, x_t \rangle) \leq 0$. 又

$$\begin{aligned} \langle z, z - y_n \rangle = {} & \langle z, z - x_t \rangle + \langle z - x_t, x_t - y_n \rangle + \langle x_t, x_t - y_n \rangle \leq \\ & \langle z, z - x_t \rangle + \| z - x_t \| \, \| x_t - y_n \| + \langle x_t, x_t - y_n \rangle \leq \\ & \langle z, z - x_t \rangle + M_2 \| z - x_t \| + \langle x_t, x_t - y_n \rangle, \end{aligned}$$

从而可得 $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle z, z - y_n \rangle \leq 0$.

进一步地，$\langle z, z - v_n \rangle = \langle z, z - y_n \rangle + \langle z, x_n - v_n \rangle + \langle z, y_n - x_n \rangle$，所以

$$\limsup_{n\to\infty} \langle z, z - v_n \rangle \leq 0. \tag{15}$$

因此

$$\begin{aligned} \| x_{n+1} - z \|^2 \leq {} & (1-\beta_n) \| x_n - z \|^2 + \beta_n \| y_n - z \|^2 \leq (1-\beta_n) \| x_n - z \|^2 + \beta_n \| (1-\alpha_n) v_n - z \|^2 \leq \\ & (1-\beta_n) \| x_n - z \|^2 + \beta_n \{ (1-\alpha_n) \| v_n - z \|^2 + 2\alpha_n (1-\alpha_n) \langle z, z - v_n \rangle + \alpha_n^2 \| z \|^2 \} \leq \\ & (1-\beta_n) \| x_n - z \|^2 + \beta_n (1-\alpha_n) \| x_n - z \|^2 + \alpha_n \beta_n \{ 2(1-\alpha_n) \langle z, z - v_n \rangle + \alpha_n \| z \|^2 \} \leq \\ & (1-\alpha_n \beta_n) \| x_n - z \|^2 + \alpha_n \beta_n \{ 2(1-\alpha_n) \langle z, z - v_n \rangle + \alpha_n \| z \|^2 \}. \end{aligned}$$

由引理 5 可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - z \| = 0$.

第 5 步　证明 $z \in GEP(f, A)$.

因 $x_n \to z$ 故也弱收敛于 z. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - u_n \| = 0$，则 $\{u_n\}$ 也弱收敛于 z.

由 $u_n = T_{r_n}(I - r_n A) x_n$ 和条件 (a_2) 得

$$\langle A x_n, y - u_n \rangle + \langle y - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} \rangle \geq f(y, u_n), \forall y \in C. \tag{16}$$

对任意 $y \in C$，令 $z_s = sy + (1-s)z$，$s \in (0,1]$，则 $z_s \in C$. 将 z_s 代替(16) 中的 y 有 $\langle A x_n, z_s - u_n \rangle + \langle z_s - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} \rangle - f(z_s, u_n) \geq 0$，显然，

$$\begin{aligned} \langle A z_s, z_s - u_n \rangle \geq {} & \langle A z_s, z_s - u_n \rangle - \langle A x_n, z_s - u_n \rangle - \langle z_s - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} \rangle + f(z_s, u_n) = \\ & \langle A z_s - A u_n, z_s - u_n \rangle + \langle A u_n - A x_n, z_s - u_n \rangle - \langle z_s - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} \rangle + f(z_s, u_n). \end{aligned}$$

因 A 是 α 逆强单调的，那么 $f(z_s, u_n) \leq \langle A z_s, z_s - u_n \rangle + \langle z_s - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} \rangle - \langle A u_n - A x_n, z_s - u_n \rangle$，$A$ 又是 $\frac{1}{\alpha}$ − Lipschitz 连续，则 $\| A u_n - A x_n \| \to 0$. 易知 $\frac{(u_n - x_n)}{r_n} \to 0$，那么由 (a_4) 有

$$f(z_s,z)\le \lim_{n\to\infty} f(z_s,u_n)\le \lim_{n\to\infty}\langle Az_s,z_s-z\rangle=\langle Az_s,z_s-z\rangle,$$

故由条件(a_1),(a_4)有$0=f(z_s,z_s)\le sf(z_s,y)+(1-s)f(z_s,z)\le sf(z_s,y)+(1-s)\langle Az_s,z_s-z\rangle=sf(z_s,y)+(1-s)s\langle Az_s,y-z\rangle$,因此$f(z_s,y)+(1-s)\langle Az_s,y-z\rangle\ge 0$,让$s\to 0$,则有$f(z,y)+\langle Az,y-z\rangle\ge 0$,即证得$z\in GEP(f,A)$.

最后证明$z\in I(B,M)$.因为B是$\frac{1}{\alpha}$-Lipschitz 连续的单调映射且$D(B)=H$.由引理1可知$M+B$是极大单调的.取$(v,g)\in G(M+B)$,那么$g-Bv\in M(v)$.又因$v_n=J_{M,\lambda_n}(u_n-\lambda_nBu_n)$,显然有$u_n-\lambda_nBu_n\in(I+\lambda_nM)(v_n)$,

也就是$\frac{(u_n-\lambda_nBu_n-v_n)}{\lambda_n}\in M(v_n)$.由$M+B$的极大单调性,有

$$\langle v-v_n,g-Bv-\frac{1}{\lambda_n}(u_n-\lambda_nBu_n-v_n)\rangle\ge 0, \tag{17}$$

所以$\langle v-v_n,g\rangle\ge\langle v-v_n,Bv+\frac{1}{\lambda_n}(u_n-\lambda_nBu_n-v_n)\rangle\ge\langle v-v_n,Bv+Bv_n-Bv_n-Bu_n+\frac{1}{\lambda_n}(u_n-v_n)\rangle\ge\langle v-v_n,Bv_n-Bu_n\rangle+\langle v-v_n,\frac{1}{\lambda_n}(u_n-v_n)\rangle$.

由第3步的结论可知$\|u_n-v_n\|\to 0$,$\|Bu_n-Bv_n\|\to 0$和v_n弱收敛于z,那么

$$\langle v-v_n,g\rangle\to\langle v-z,g\rangle\ge 0,n\to\infty.$$

因此$\theta\in(M+B)(z)$,也就是$z\in I(B,M)$.综上可得$z\in\Phi$.

推论 1 设C是实 Hilbert 空间中一非空闭凸子集,$f:C\times C\to\mathbf{R}$满足条件$(a_1)\sim(a_4)$,$A,B:C\to H$是系数分别为α和β的逆强单调算子,$T_n:C\to C(n=1,2,\cdots)$是一非扩张映射无限族.设$r_n\in(0,2\alpha)$,$\lambda_n\in(0,2\beta)$,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$为$(0,1)$中的序列.如果$\Phi:=GEP(f,A)\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)\cap VI(C,B)\ne\varnothing$.序列$\{x_n\}$由以下迭代算法生成:$x_1\in C$,

$$\begin{cases}u_n:f(u_n,y)+\langle Ax_n,y-u_n\rangle+\frac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\ge 0,\forall y\in C\\ v_n=P_C(u_n-\lambda_nBu_n),\\ y_n=P_C[(1-\alpha_n)v_n],\\ x_{n+1}=(1-\beta_n)x_n+\beta_nT_ny_n,\end{cases}$$

且有以下条件满足:(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$;(ii) $0<\liminf\limits_{n\to\infty}\beta_n\le\limsup\limits_{n\to\infty}\beta_n<1$;(iii) $0<\liminf\limits_{n\to\infty}r_n\le\limsup\limits_{n\to\infty}r_n<2\alpha$,$\lim\limits_{n\to\infty}|r_{n+1}-r_n|=0$,$0<\liminf\limits_{n\to\infty}\lambda_n\le\limsup\limits_{n\to\infty}\lambda_n<2\beta$,对于$H$中的任意有界闭凸子集$K$,$\{T_n\}$,$T$如引理3所述且满足$F(T)=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)$,那么序列$\{x_n\}$强收敛一点$z$,其中$z\in\Phi$.

证明 在定理1中,令$M=\partial\delta_C:H\to 2^H$,其中,$\partial\delta_C:H\to[0,\infty)$为$C$中的指标函数,$\delta_{Cx}=\begin{cases}0,x\in C\\ +\infty,x\notin C\end{cases}$.已知次微分$\partial\delta_C$是极大单调算子,那么变分包含问题就等价于变分不等式问题,而且$J_{M,\lambda}=P_C$.即证得结果.

令推论1中$A=0$,$B=0$,$f(x,y)=0$,$r_n=1$,其他条件不变,则有

推论 2[2] 设C是实 Hilbert 空间中一非空闭凸子集,$T_n:C\to C$其中$n=1,2,\cdots$为一组非扩张映射,$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$是$(0,1)$中的序列,序列$\{x_n\}$由以下迭代算法生成:$x_{n+1}=(1-\beta_n)x_n+\beta_nT_nP_C[(1-\alpha_n)x_n]$,且有以下条件满足:(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$;(ii) $0<\liminf\limits_{n\to\infty}\beta_n\le\limsup\limits_{n\to\infty}\beta_n<1$,

对于H中的任意有界闭凸集K,如果$\{T_n\}$,T如引理3所述且使得$F(T)=\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)\ne\varnothing$,那么序列$\{x_n\}$强收敛一点$z$,其中$z\in T(T)$.如果令推论2中的$T_n:C\to C$中的$n=1$,则可得文献[1]的结果.

3 结 论

基于非扩张映射族上广义均衡问题的解集，公共不动点集及变分包含问题的解集的公共元的问题，提出了一种迭代算法得以解决上述问题．此算法具有广泛的应用价值，同时对于求解多问题的公共元问题有一定的参考价值．进一步，将研究推广至若干问题的公共元及在 Banach 空间上的相应研究．

参 考 文 献

[1] Yao Y, Liou Y C, Marino G. Strong Convergence of two Iterative Algorithms for Nonexpansive Mappings in Hilbert spaces[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2009(1):22.

[2] Joomwong J. Strong Convergence of Two Iterative Algorithms for a Countable Family of Nonexpansive Mappings in Hilbert Spaces[J]. International Mathematical Forum, 2010, 5(44): 2165-2172.

[3] Shang M, Su Y, Qin X. Strong convergence theorem for nonexpansive mappings and relaxed cocoercive mappings[J]. Iternational Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 3(4):24-34.

[4] Zhang S, Lee J H W, Chan C K. Algorithms of common solutions to quasi variational inclusion and fixed point problems[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2008, 29:571-581.

[5] 张石生．变分不等式及其相关问题[M]．重庆：重庆出版社，2006.

[6] Brezis H. Operateur maximaux monotones[M]. Amsterdam: Mathematics Studies, 1973.

[7] Lemaire B. Which fixed point does the iteration method select? [J]. In Recent Advances in Optimization, 1997, 452:154-167.

[8] Chakkrid Klin-eam, Suthep Suantai. A new approximation method for solving variational inequalities and fixed points of nonexpansive mappings[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2009(1):520301.

[9] Plubtieng S, Thammathiwat T. A viscosity approximation method for finding a common fixed point of nonexpansive and firmly nonexpansive mappings in hilbert spaces[J]. Thai J Math, 2008, 6(2):377-390.

[10] Blum E, Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. Mathematics Student-India, 1994, 63(1): 123-145.

[11] Combettes P L, Hirstoaga S A. Equilibrium programming in Hilbert spaces[J]. J Nonlinear Convex Anal, 2005, 6(1):117-136.

[12] Xu H K. An iterative approach to quadratic optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, 116(3):659-678.

[13] Xu H K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 298 (1):279-291.

An Iterative Algorithm for Sovling Three Common Elements Problems on Nonexpansive Mappings

WANG Yali[1a,1b], YAN Xueyang[2]

(1. a. College of Computer and Information Engineering; b. Engineering Lab of Intelligence Business & Internet of Things, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China;
2. Public Teaching Department, Nanyang Medical College, Nanyang 473061, China)

Abstract: Several iterative algorithms have been given for finding the set of solutions for a kind of problems and the common solutions for two kinds of problems about nonexpansive mappings in Hilbert space. In this paper, an iterative algorithm is proposed for finding the common elements of the solution set of generalized equilibrium problems, fixed points set and variational inclusion problems. As a result, a strong convergence theorem and several related inferences are obtained.

Keywords: generalized equilibrium problem; a family of nonexpansive mapping; fixed point