文章编号:1000-2367(2021)01-0019-06 **DOI**:10.16366/j.cnki.1000-2367.2021.01.003

Young 型不等式的推广及其反向形式

王永忠[1],李玉[2],杨长森[2]

(1.新乡学院 数学与信息科学学院,河南 新乡 453003;2.河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453007)

摘 要:在给出数字情形 Young 型不等式的推广及其反向形式的基础上,获得相应的算子不等式及在 Hilbert-Schmidt 范数、酉不变范数和迹范数意义下的矩阵不等式.

关键词:Young 型不等式;Hilbert-Schmidt 范数;迹范数;酉不变范数

中图分类号:O177.1 **文献标志码**:A

$\boldsymbol{B}(H)$ 表示复 Hilbert 空间 H 上有界线性算子构成的 C^* - 代数. 算子 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{B}(H)$ 称为正的,如果对任意的 $x\in H$ 有 $\langle \boldsymbol{A}x,x\rangle\geq 0$.$H$ 上全体正算子(可逆正算子)构成的集合用 $\boldsymbol{B}^+(H)$($\boldsymbol{B}^{++}(H)$)表示.当 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{B}^{++}(H)$ 时,记为 $\boldsymbol{A}>0$.另外,算子间加权的算术平均和几何平均分别定义为:$\boldsymbol{A}\nabla_v\boldsymbol{B}=(1-v)\boldsymbol{A}+v\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}\sharp_v\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}})^v\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$,其中 $v\in[0,1]$,$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{B}^{++}(H)$.如果 $v=\dfrac{1}{2}$,用 $\boldsymbol{A}\nabla\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}\sharp\boldsymbol{B}$ 简记之.为方便起见,采用下边记号 $\boldsymbol{A}\sharp_v\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-\frac{1}{2}})^v\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}$.$v\in\mathbf{R}$.

其次,用 M_n 表示 $n\times n$ 复矩阵的全体.M_n^+ 表示 M_n 中所有正半定矩阵组成的子集.当 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 是 M_n 中 Hermitian 矩阵并使得 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y}\in M_n^+$ 时,则称 $\boldsymbol{X}\geq\boldsymbol{Y}$.$M_n$ 中严格正定矩阵全体用 M_n^{++} 表示.M_n 上的范数 $\|\cdot\|$ 称为酉不变范数,如果它对一切 $\boldsymbol{A}\in M_n$ 和一切酉矩阵 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in M_n$ 满足 $\|\boldsymbol{UAV}\|=\|\boldsymbol{A}\|$.对 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]\in M_n$,Hilbert-Schmidt 范数和迹范数分别定义为 $\|\boldsymbol{A}\|_2=\sqrt{\sum\limits_{j=1}^n s_j^2(\boldsymbol{A})}$,$\|\boldsymbol{A}\|_1=\sum\limits_{j=1}^n s_j(\boldsymbol{A})$,其中 $s_1(\boldsymbol{A})\geq s_2(\boldsymbol{A})\geq\cdots\geq s_n(\boldsymbol{A})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值按照递减顺序(根据重数重复)的排列.我们知道 $\|\cdot\|_2$ 是一个酉不变范数.

经典的 Young 不等式为:如果 $a,b\geq 0$ 且 $v\in[0,1]$,则

$$a^vb^{1-v}\leq va+(1-v)b,\tag{1}$$

并且上述不等式中等号成立当且仅当 $a=b$.该不等式应用十分广泛.最近,许多学者研究其推广形式.文献[1]给出了(1)式的一个完全加细形式如下:若 $a,b>0$,$v\in[0,1]$,则

$$va+(1-v)b\geq a^vb^{1-v}+\sum_{j=1}^N S_j(v)\left(\sqrt[2^j]{b^{2^{j-1}-k_j(v)}a^{k_j(v)}}-\sqrt[2^j]{a^{k_j(v)+1}b^{2^{j-1}-k_j(v)-1}}\right)^2,\tag{2}$$

其中 $S_j(v)=(-1)^{r_j(v)}2^{j-1}v+(-1)^{r_j(v)+1}\left[\dfrac{r_j(v)+1}{2}\right]$,$r_j(v)=[2^jv]$,$k_j(v)=[2^{j-1}v]$,$j=1,2,\cdots,N$.这里$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

为了使用方便,用 $S_N(v;a,b)$ 表示(2)式右端中的和式,它是一个非负函数,即

$$S_N(v;a,b)=\sum_{j=1}^N S_j(v)\left(\sqrt[2^j]{b^{2^{j-1}-k_j(v)}a^{k_j(v)}}-\sqrt[2^j]{a^{k_j(v)+1}b^{2^{j-1}-k_j(v)-1}}\right)^2.$$

另外,文献[2]最先给出了平方形式的 Young 型不等式.

收稿日期:2019-10-23;**修回日期**:2020-07-25.

基金项目:国家自然科学基金(11271112;11771126;11701154);河南师范大学硕士创新研究(YL201919).

作者简介(通信作者):王永忠(1966—),男,河南武陟人,新乡学院副教授,主要从事算子理论方面的研究,E-mail:1761099972@qq.com.

(1)若 $0\le v\le \frac{1}{2}$,则

$$v^2a^2+(1-v)^2b^2\ge (va)^{2v}b^{2-2v}+v^2(a-b)^2. \tag{3}$$

(2)若$\frac{1}{2}\le v\le 1$,则

$$v^2a^2+(1-v)^2b^2\ge a^{2v}[(1-v)b]^{2-2v}+(1-v)^2(a-b)^2. \tag{4}$$

随后,(3)和(4)式被文献[3]推广为:

如果 $0\le v\le \frac{1}{2}$,则

$$(va)^{2v}b^{2-2v}+v^2(a-b)^2+r_0b(\sqrt{va}-\sqrt{b})^2\le v^2a^2+(1-v)^2b^2\le$$
$$a^{2v}[(1-v)b]^{2-2v}+(1-v)^2(a-b)^2-r_0a(\sqrt{a}-\sqrt{(1-v)b})^2, \tag{5}$$

其中 $r_0=\min\{2v,1-2v\}$.

如果$\frac{1}{2}\le v\le 1$,则

$$a^{2v}[(1-v)b]^{2-2v}+(1-v)^2(a-b)^2+r_0a(\sqrt{a}-\sqrt{(1-v)b})^2\le$$
$$v^2a^2+(1-v)^2b^2\le (va)^{2v}b^{2-2v}+v^2(a-b)^2-r_0b(\sqrt{va}-\sqrt{b})^2. \tag{6}$$

其中 $r_0=\min\{2v-1,2-2v\}$.

本文根据文献[1]中的想法,给出(3)和(4)式的一个完全加细形式,在此基础上进而给出相应算子不等式及矩阵形式的 Hilbert-Schmidt 范数、酉不变范数和迹的不等式,这些结果是文献[4]中结果的进一步加细.

1 数字形式和算子形式的 Young 型不等式

首先给出(3)和(4)式的一个完全形式.

定理 1 假设 $a,b\ge 0$ 及 $v\in[0,1]$.

i)如果 $0\le v\le \frac{1}{2}$,则

$$(va)^{2v}b^{2-2v}+v^2(a-b)^2+bS_N(2v;va,b)\le v^2a^2+(1-v)^2b^2\le$$
$$a^{2v}[(1-v)b]^{2-2v}+(1-v)^2(a-b)^2-S_N(2v;(1-v)ab,a^2). \tag{7}$$

ii)如果$\frac{1}{2}\le v\le 1$,则

$$a^{2v}[(1-v)b]^{2-2v}+(1-v)^2(a-b)^2+aS_N(2v-1;a,(1-v)b)\le v^2a^2+(1-v)^2b^2\le$$
$$(va)^{2v}b^{2-2v}+v^2(a-b)^2-S_N(2v-1;b^2,vab). \tag{8}$$

证明 i)当 $0\le v\le \frac{1}{2}$时,由(2)式可得

$$v^2a^2+(1-v)^2b^2-v^2(a-b)^2-(va)^{2v}b^{2-2v}=b[2v(va)+(1-2v)b]-(va)^{2v}b^{2-2v}\ge$$
$$b[(va)^{2v}b^{1-2v}+S_N(2v;va,b)]-(va)^{2v}b^{2-2v}=bS_N(2v;va,b),$$

且

$$(1-v)^2(a-b)^2-v^2a^2-(1-v)^2b^2+a^{2v}[(1-v)b]^{2-2v}=2v[(1-v)ab]+(1-2v)a^2-2(1-v)ab+a^{2v}[(1-v)b]^{2-2v}\ge a^{2-2v}[(1-v)b]^{2v}+S_N(2v;(1-v)ab,a^2)-2(1-v)ab+a^{2v}[(1-v)b]^{2-2v}=S_N(2v;(1-v)ab,a^2)+[a^{1-v}((1-v)b)^v-a^v((1-v)b)^{1-v}]^2\ge S_N(2v;(1-v)ab,a^2).$$

故得(7)式.

ii)当$\frac{1}{2}\le v\le 1$ 时,同样根据(2)式类似可得(8)式.

注记 1 当 $N=1$ 时(7)和(8)式就变成(5)式及(6)式.

引理 1[5] 设 $X\in \boldsymbol{B}(H)$ 是自伴算子,且 f 与 g 是实值连续函数并使得对一切 $t\in Sp(X)$(X 的谱)有

$f(t) \leq g(t)$.则 $f(X) \leq g(X)$.

利用该引理 1 和(7)式易得定理 1 具有如下的算子形式.

定理 2　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{B}^{++}(H)$ 且 $v \in [0,1]$.

i)如果 $v \in [0,\frac{1}{2}]$, 则

$$v^{2v}(\boldsymbol{A}\sharp_{1-v}\boldsymbol{B})+2v^2(\boldsymbol{A}\nabla\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\sharp\boldsymbol{B})+\sum_{j=1}^{N}S_j(2v)[v^{\frac{k_j(2v)}{2^{j-1}}}(\boldsymbol{A}\sharp_{\frac{2^j-k_j(2v)}{2^j}}\boldsymbol{B})+v^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}(\boldsymbol{A}\sharp_{\frac{2^j-k_j(2v)-1}{2^j}}\boldsymbol{B})- 2v^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^j}}(\boldsymbol{A}\sharp_{\frac{2^{j+1}-2k_j(2v)-1}{2^{j+1}}}\boldsymbol{B})]\leq v^2\boldsymbol{A}+(1-v)^2\boldsymbol{B}\leq(1-v)^{2-2v}(\boldsymbol{A}\sharp_{1-v}\boldsymbol{B})+2(1-v)^2(\boldsymbol{A}\nabla\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\sharp\boldsymbol{B})- \sum_{j=1}^{N}S_j(2v)[(1-v)^{\frac{k_j(2v)}{2^{j-1}}}(\boldsymbol{A}\sharp_{\frac{k_j(2v)}{2^j}}\boldsymbol{B})+(1-v)^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}(\boldsymbol{A}\sharp_{\frac{k_j(2v)+1}{2^j}}\boldsymbol{B})-2(1-v)^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^j}}(\boldsymbol{A}\sharp_{\frac{2k_j(2v)+1}{2^{j+1}}}\boldsymbol{B})]. \tag{9}$$

ii)如果 $v \in [\frac{1}{2},1]$, 则

$$(1-v)^{2-2v}(\boldsymbol{A}\sharp_{v}\boldsymbol{B})+2(1-v)^2(\boldsymbol{A}\nabla\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\sharp\boldsymbol{B})+\sum_{j=1}^{N}S_j(2v-1)[(1-v)^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)}{2^{j-1}}}(\boldsymbol{A}\sharp_{\frac{2^{j-1}+k_j(2v-1)}{2^j}}\boldsymbol{B})+ (1-v)^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)-1}{2^{j-1}}}(\boldsymbol{A}\sharp_{\frac{2^{j-1}+k_j(2v-1)+1}{2^j}}\boldsymbol{B})-2(1-v)^{\frac{2^j-2k_j(2v-1)-1}{2j}}(\boldsymbol{A}\sharp_{\frac{2^j+2k_j(2v-1)+1}{2^{j+1}}}\boldsymbol{B})]\leq v^2\boldsymbol{B}+(1-v)^2\boldsymbol{A}\leq v^{2v}(\boldsymbol{A}\sharp_{v}\boldsymbol{B})+2v^2(\boldsymbol{A}\nabla\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\sharp\boldsymbol{B})-\sum_{j=1}^{N}S_j(2v-1)[v^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)}{2^{j-1}}}(\boldsymbol{A}\sharp_{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)}{2^j}}\boldsymbol{B})+ v^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)-1}{2^{j-1}}}(\boldsymbol{A}\sharp_{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)-1}{2^j}}\boldsymbol{B})-2v^{\frac{2^j-2k_j(2v-1)-1}{2^j}}(\boldsymbol{A}\sharp_{\frac{2^j-2k_j(2v-1)-1}{2^{j+1}}}\boldsymbol{B})]. \tag{10}$$

注记 2　当 $N=1$ 时,(9)和(10)式就变成(5)和(6)式的算子形式.

2　矩阵形式的不等式

本节中给出定理 1 的 Hilbert-Schmidt 范数、酉不变范数和迹范数意义下的矩阵不等式.为此,先给出如下引理.

引理 2[6]　假设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},X \in M_n$ 使得 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是正半定的.$|||\cdot|||$是任意一个酉不变范数.

如果 $0 \leq v \leq 1$,则 $|||\boldsymbol{A}^vX\boldsymbol{B}^{1-v}||| \leq |||\boldsymbol{A}X|||^v\,|||X\boldsymbol{B}|||^{1-v}$.

引理 3[7]　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in M_n$,则 $\sum_{j=1}^{n}s_j(\boldsymbol{AB}) \leq \sum_{j=1}^{n}s_j(\boldsymbol{A})s_j(\boldsymbol{B})$.

引理 4　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in M_n^+$ 且 $v \in [0,1]$,则 $\|\boldsymbol{A}^v\boldsymbol{B}^{1-v}\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^{n}[s_j^v(\boldsymbol{A})s_j^{1-v}(\boldsymbol{B})]^2$.

证明　对任意 $\boldsymbol{C} \in M_n$,由文献[8]知,$|\mathrm{tr}\boldsymbol{C}| \leq \sum_{j=1}^{n}s_j(\boldsymbol{C})$.

故根据引理 3 得 $\sum_{j=1}^{n}[s_j^v(\boldsymbol{A})s_j^{1-v}(\boldsymbol{B})]^2 \geq \sum_{j=1}^{n}s_j(\boldsymbol{A}^{2v}\boldsymbol{B}^{2(1-v)}) \geq \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{2v}\boldsymbol{B}^{2(1-v)}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^{1-v}\boldsymbol{A}^{2v}\boldsymbol{B}^{1-v}) = \sum_{j=1}^{n}s_j^2(\boldsymbol{A}^v\boldsymbol{B}^{1-v}) = \|\boldsymbol{A}^v\boldsymbol{B}^{1-v}\|_2^2$.

下边先给出 Hilbert-Schmidt 范数意义下的不等式.

定理 3　若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},X \in M_n$ 使得 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in M_n^+$ 且 $v \in [0,1]$.

i)如果 $v \in [0,\frac{1}{2}]$, 则

$$v^{2v}\|\boldsymbol{A}^vX\boldsymbol{B}^{1-v}\|_2^2+v^2\|\boldsymbol{A}X-X\boldsymbol{B}\|_2^2+2v(1-v)\|\boldsymbol{A}^{\frac{1}{2}}X\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\|_2^2+\sum_{j=1}^{N}S_j(2v)[v^{\frac{k_j(2v)}{2^{j-1}}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{k_j(2v)}{2^j}}X\boldsymbol{B}^{\frac{2^j-k_j(2v)}{2^j}}\|_2^2+$$

$$v^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}X\boldsymbol{B}^{\frac{2^j-k_j(2v)-1}{2^j}}\|_2^2-2v^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^j}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^{j+1}}}X\boldsymbol{B}^{\frac{2^{j+1}-2k_j(2v)-1}{2^{j+1}}}\|_2^2]\le\|v\boldsymbol{A}X+(1-v)X\boldsymbol{B}\|_2^2\le$$
$$(1-v)^{2-2v}\|\boldsymbol{A}^vX\boldsymbol{B}^{1-v}\|_2^2+(1-v)^2\|\boldsymbol{A}X-X\boldsymbol{B}\|_2^2+2v(1-v)\|\boldsymbol{A}^{\frac12}X\boldsymbol{B}^{\frac12}\|_2^2-$$
$$\sum_{j=1}^N S_j(2v)[(1-v)^{\frac{k_j(2v)}{2^{j-1}}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{2^j-k_j(2v)}{2^j}}X\boldsymbol{B}^{\frac{k_j(2v)}{2^j}}\|_2^2+(1-v)^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{2^j-k_j(2v)-1}{2^j}}X\boldsymbol{B}^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}\|_2^2-$$
$$2(1-v)^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^j}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{2^{j+1}-2k_j(2v)-1}{2^{j+1}}}X\boldsymbol{B}^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^{j+1}}}\|_2^2].\qquad(11)$$

ii)如果 $v\in[\frac12,1]$，则

$$(1-v)^{2-2v}\|\boldsymbol{A}^vX\boldsymbol{B}^{1-v}\|_2^2+(1-v)^2\|\boldsymbol{A}X-X\boldsymbol{B}\|_2^2+2v(1-v)\|\boldsymbol{A}^{\frac12}X\boldsymbol{B}^{\frac12}\|_2^2+\sum_{j=1}^N S_j(2v-1)[(1-$$
$$v)^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)}{2^{j-1}}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{2^{j-1}+k_j(2v-1)}{2^j}}X\boldsymbol{B}^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)}{2^j}}\|_2^2+(1-v)^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)-1}{2^{j-1}}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{2^{j-1}+k_j(2v-1)+1}{2^j}}X\boldsymbol{B}^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)-1}{2^j}}\|_2^2-$$
$$2(1-v)^{\frac{2^j-2k_j(2v-1)-1}{2^j}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{2^j+2k_j(2v-1)+1}{2^{j+1}}}X\boldsymbol{B}^{\frac{2^j-2k_j(2v-1)-1}{2^{j+1}}}\|_2^2]\le\|v\boldsymbol{A}X+(1-v)X\boldsymbol{B}\|_2^2\le$$
$$v^{2v}\|\boldsymbol{A}^vX\boldsymbol{B}^{1-v}\|_2^2+v^2\|\boldsymbol{A}X-X\boldsymbol{B}\|_2^2+2v(1-v)\|\boldsymbol{A}^{\frac12}X\boldsymbol{B}^{\frac12}\|_2^2-\sum_{j=1}^N S_j(2v-$$
$$1)[v^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)}{2^{j-1}}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)}{2^j}}X\boldsymbol{B}^{\frac{2^{j-1}+k_j(2v-1)}{2^j}}\|_2^2+v^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)-1}{2^{j-1}}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)-1}{2^j}}X\cdot$$
$$\boldsymbol{B}^{\frac{2^{j-1}+k_j(2v-1)+1}{2^j}}\|_2^2-2v^{\frac{2^j-2k_j(2v-1)-1}{2^j}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{2^j-2k_j(2v-1)-1}{2^{j+1}}}X\boldsymbol{B}^{\frac{2^j+2k_j(2v-1)+1}{2^{j+1}}}\|_2^2].\qquad(12)$$

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是正半定的，由谱定理存在酉矩阵 $\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}\in M_n$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\Gamma_1\boldsymbol{U}^*$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{V}\Gamma_2\boldsymbol{V}^*$，其中 $\Gamma_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，$\Gamma_2=\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，$\lambda_m,\mu_l\ge 0,m,l=1,2,\cdots,n$.

现令 $Y=\boldsymbol{U}^*X\boldsymbol{V}=[y_{ml}]$. 则有 $v\boldsymbol{A}X+(1-v)X\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}[(v\lambda_m+(1-v)\mu_l)y_{ml}]\boldsymbol{V}^*$，$\boldsymbol{A}X-X\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}[(\lambda_m-\mu_l)y_{ml}]\boldsymbol{V}^*$，$\boldsymbol{A}^vX\boldsymbol{B}^{1-v}=\boldsymbol{U}[(\lambda_m^v\mu_l^{1-v})y_{ml}]\boldsymbol{V}^*$

i)如果 $v\in[0,\frac12]$，利用(7)式和 Hilbert-Schmidt 范数的酉不变性，有

$$\|v\boldsymbol{A}X+(1-v)X\boldsymbol{B}\|_2^2=\sum_{m,l=1}^n[v\lambda_m+(1-v)\mu_l]^2|y_{ml}|^2\ge v^{2v}\sum_{m,l=1}^n(\lambda_m^v\mu_l^{1-v})^2|y_{ml}|^2+v^2\sum_{m,l=1}^n(\lambda_m-$$
$$\mu_l)^2|y_{ml}|^2+2v(1-v)\sum_{m,l=1}^n(\lambda_m^{\frac12}\mu_l^{\frac12})^2|y_{ml}|^2+\sum_{j=1}^N S_j(2v)[v^{\frac{k_j(2v)}{2^{j-1}}}\sum_{m,l=1}^n(\lambda_m^{\frac{k_j(2v)}{2^j}}\mu_l^{\frac{2^j-k_j(2v)}{2^j}})^2|y_{ml}|^2+$$
$$v^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}\sum_{m,l=1}^n(\lambda_m^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}\mu_l^{\frac{2^j-k_j(2v)-1}{2^j}})^2|y_{ml}|^2-2v^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^j}}\sum_{m,l=1}^n(\lambda_m^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^{j+1}}}\mu_l^{\frac{2^{j+1}-2k_j(2v)-1}{2^{j+1}}})^2|y_{ml}|^2]=$$
$$v^{2v}\|\boldsymbol{A}^vX\boldsymbol{B}^{1-v}\|_2^2+v^2\|\boldsymbol{A}X-X\boldsymbol{B}\|_2^2+2v(1-v)\|\boldsymbol{A}^{\frac12}X\boldsymbol{B}^{\frac12}\|_2^2+\sum_{j=1}^N S_j(2v)[v^{\frac{k_j(2v)}{2^{j-1}}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{k_j(2v)}{2^j}}X\cdot$$
$$\boldsymbol{B}^{\frac{2^j-k_j(2v)}{2^j}}\|_2^2+v^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}X\boldsymbol{B}^{\frac{2^j-k_j(2v)-1}{2^j}}\|_2^2-2v^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^j}}\|\boldsymbol{A}^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^{j+1}}}X\boldsymbol{B}^{\frac{2^{j+1}-2k_j(2v)-1}{2^{j+1}}}\|_2^2],$$

及

$$\|v\boldsymbol{A}X+(1-v)X\boldsymbol{B}\|_2^2=\sum_{m,l=1}^n[v\lambda_m+(1-v)\mu_l]^2|y_{ml}|^2\le(1-v)^{2-2v}\sum_{m,l=1}^n(\lambda_m^v\mu_l^{1-v})^2|y_{ml}|^2+(1-$$
$$v)^2\sum_{m,l=1}^n(\lambda_m-\mu_l)^2|y_{ml}|^2+2v(1-v)\sum_{m,l=1}^n(\lambda_m^{\frac12}\mu_l^{\frac12})^2|y_{ml}|^2-\sum_{j=1}^N S_j(2v)[(1-$$
$$v)^{\frac{k_j(2v)}{2^{j-1}}}\sum_{m,l=1}^n(\lambda_m^{\frac{2^j-k_j(2v)}{2^j}}\mu_l^{\frac{k_j(2v)}{2^j}})^2|y_{ml}|^2+(1-v)^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}\sum_{m,l=1}^n(\lambda_m^{\frac{2^j-k_j(2v)-1}{2^j}}\mu_l^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}})^2|y_{ml}|^2-$$
$$2(1-v)^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^j}}\sum_{m,l=1}^n(\lambda_m^{\frac{2^{j+1}-2k_j(2v)-1}{2^{j+1}}}\mu_l^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^{j+1}}})^2|y_{ml}|^2]=(1-v)^{2-2v}\|\boldsymbol{A}^vX\boldsymbol{B}^{1-v}\|_2^2+$$
$$(1-v)^2\|\boldsymbol{A}X-X\boldsymbol{B}\|_2^2+2v(1-v)\|\boldsymbol{A}^{\frac12}X\boldsymbol{B}^{\frac12}\|_2^2-\sum_{j=1}^N S_j(2v)[(1-$$

$$v)^{\frac{k_j(2v)}{2^{j-1}}}\|A^{\frac{2^j-k_j(2v)}{2^j}}XB^{\frac{k_j(2v)}{2^j}}\|_2^2+(1-v)^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}\|A^{\frac{2^j-k_j(2v)-1}{2^j}}XB^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}\|_2^2-2(1-$$
$$v)^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^j}}\|A^{\frac{2^{j+1}-2k_j(2v)-1}{2^{j+1}}}XB^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^{j+1}}}\|_2^2].$$

故(11)式成立.

ii)(12)式可类似得到.

注记 3　在(11)、(12)式中令 $N=1$ 可得(5)、(6)式的 Hilbert-Schmidt 范数形式的不等式.

由引理 2 和(7)式可得下面的酉不变范数意义下的不等式和迹不等式.

定理 4　假设 $A,B,X\in M_n$ 使得 $A,B\in M_n^{++}$, $v\in[0,1]$, $|||\cdot|||$ 是任意一个酉不变范数.

i)如果 $v\in[0,\frac{1}{2}]$, 则

$$[v|||AX|||+(1-v)|||XB|||]^2\geq v^{2v}|||A^vXB^{1-v}|||^2+v^2(|||AX|||-|||XB|||)^2+$$
$$2v(1-v)|||A^{\frac{1}{2}}XB^{\frac{1}{2}}|||^2+\sum_{j=1}^N S_j(2v)[v^{\frac{k_j(2v)}{2^{j-1}}}|||A^{\frac{k_j(2v)}{2^j}}XB^{\frac{2^j-k_j(2v)}{2^j}}|||^2+v^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}\cdot$$
$$|||A^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}XB^{\frac{2^j-k_j(2v)-1}{2^j}}|||^2-2v^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^j}}|||AX|||^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^j}}|||XB|||^{\frac{2^{j+1}-2k_j(2v)-1}{2^j}}].$$

ii)如果 $v\in[\frac{1}{2},1]$, 则

$$[v|||AX|||+(1-v)|||XB|||]^2\geq(1-v)^{2-2v}|||A^vXB^{1-v}|||^2+(1-v)^2(|||AX|||-|||XB|||)^2+$$
$$2v(1-v)|||A^{\frac{1}{2}}XB^{\frac{1}{2}}|||^2+\sum_{j=1}^N S_j(2v-1)[(1-v)^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)}{2^{j-1}}}|||A^{\frac{2^{j-1}+k_j(2v-1)}{2^j}}XB^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)}{2^j}}|||^2+$$
$$(1-v)^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)-1}{2^{j-1}}}|||A^{\frac{2^{j-1}+k_j(2v-1)+1}{2^j}}XB^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)-1}{2^j}}|||^2-2(1-$$
$$v)^{\frac{2^j-2k_j(2v-1)-1}{2^j}}|||AX|||^{\frac{2^j+2k_j(2v-1)+1}{2^j}}|||XB|||^{\frac{2^j-2k_j(2v-1)-1}{2^j}}g].$$

定理 5　设 $A,B,X\in M_n$ 使得 $A,B\in M_n^{++}$, $v\in[0,1]$.

i)如果 $v\in[0,\frac{1}{2}]$, 则

$$[\mathrm{tr}(A\nabla_{1-v}B)]^2\geq v^{2v}[\mathrm{tr}|A^vB^{1-v}|]^2+v^2(\mathrm{tr}A-\mathrm{tr}B)^2+2v(1-v)(\mathrm{tr}|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|)^2+$$
$$\sum_{j=1}^N S_j(2v)[v^{\frac{k_j(2v)}{2^{j-1}}}(\mathrm{tr}|A^{\frac{k_j(2v)}{2^j}}B^{\frac{2^j-k_j(2v)}{2^j}}|)^2+v^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}(\mathrm{tr}|A^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}}B^{\frac{2^j-k_j(2v)-1}{2^j}}|)^2-$$
$$2v^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^j}}(\mathrm{tr}A)^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^j}}(\mathrm{tr}B)^{\frac{2^{j+1}-2k_j(2v)-1}{2^j}}].$$

ii)如果 $v\in[\frac{1}{2},1]$, 则

$$[\mathrm{tr}(A\nabla_{1-v}B)]^2\geq(1-v)^{2-2v}[\mathrm{tr}|A^vB^{1-v}|]^2+(1-v)^2(\mathrm{tr}A-\mathrm{tr}B)^2+2v(1-v)(\mathrm{tr}|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}|)^2+$$
$$\sum_{j=1}^N S_j(2v-1)[(1-v)^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)}{2^{j-1}}}(\mathrm{tr}|A^{\frac{2^{j-1}+k_j(2v-1)}{2^j}}B^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)}{2^j}}|)^2+(1-v)^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)-1}{2^{j-1}}}\cdot$$
$$(\mathrm{tr}|A^{\frac{2^{j-1}+k_j(2v-1)+1}{2^j}}B^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)-1}{2^j}}|)^2-2(1-v)^{\frac{2^j-2k_j(2v-1)-1}{2^j}}(\mathrm{tr}A)^{\frac{2^j+2k_j(2v-1)+1}{2^j}}(\mathrm{tr}B)^{\frac{2^j-2k_j(2v-1)-1}{2^j}}].$$

利用引理 3、引理 4、Cauchy-Schwarz 不等式和(7)式,又可得下列定理 6,它可看作是 Young 型不等式的迹范数形式.

定理 6　设 $A,B\in M_n$ 使得 $A,B\in M_n^+$ 及 $v\in[0,1]$.

i)如果 $v\in[0,\frac{1}{2}]$, 则

$$\mathrm{tr}(v^2A^2+(1-v)^2B^2)\geq v^{2v}||A^vB^{1-v}||_2^2+v^2(||A||_2-||B||_2)^2+$$

$$\sum_{j=1}^{N} S_j(2v)[v^{\frac{k_j(2v)}{2^{j-1}}} \| A^{\frac{k_j(2v)}{2^{j-1}}} B^{\frac{2^j-k_j(2v)}{2^{j-1}}} \|_1 + v^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}} \| A^{\frac{k_j(2v)+1}{2^{j-1}}} B^{\frac{2^j-k_j(2v)-1}{2^{j-1}}} \|_1 -$$

$$2v^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^j}} \sqrt{\| A^{\frac{2k_j(2v)+1}{2^{j-1}}} \|_1 \| B^{\frac{2^{j+1}-2k_j(2v)-1}{2^{j-1}}} \|_1}]. \tag{13}$$

ii)如果 $v \in [\frac{1}{2},1]$, 则

$$\mathrm{tr}(v^2 A^2 + (1-v)^2 B^2) \geq (1-v)^{2-2v} || A^v B^{1-v} ||_2^2 + (1-v)^2(|| A ||_2 - || B ||_2)^2 +$$

$$\sum_{j=1}^{N} S_j(2v-1)[(1-v)^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)}{2^{j-1}}} \| A^{\frac{2^{j-1}+k_j(2v-1)}{2^{j-1}}} B^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)}{2^{j-1}}} \|_1 +$$

$$(1-v)^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)-1}{2^{j-1}}} \| A^{\frac{2^{j-1}+k_j(2v-1)+1}{2^{j-1}}} B^{\frac{2^{j-1}-k_j(2v-1)-1}{2^{j-1}}} \|_1 - 2(1-$$

$$v)^{\frac{2^j-2k_j(2v-1)-1}{2^j}} \sqrt{\| A^{\frac{2^j+2k_j(2v-1)+1}{2^{j-1}}} \|_1 \| B^{\frac{2^j-2k_j(2v-1)-1}{2^{j-1}}} \|_1}]. \tag{14}$$

注记 3 在(13)、(14)式中令 $N=1$ 可得文献[3]中的定理 2.7.

参 考 文 献

[1] SABABHEH M,CHOI D.A completed refinement of Young's inequality[J].J Math Anal Appl,2016,440:379-393.

[2] HU X.Young type inequalities for matrices[J].Journal of East China Normal University(Natural Science),2012,4:12-17.

[3] NASIRI L,SHAKOORI M,LIAO W.A note on the Young type inequalities[J].Int J Nonlinear Anal Appl,2017,8(1):261-267.

[4] YANG C,LI Y.Refinements and reverses of Young type inequalities[J].Journal of Mathematical Inequalities,2020,14(2):401-409.

[5] FURUTA T,MIĆIĆ J,PEČARIĆ J,et al.Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities[M].Zagreb:Element,2005.

[6] KITTANEH F.Norm inequalities for fractional powers of positive operators[J].Lett Math phys,1993,27:279-285.

[7] BHATIA R.Matrix Analysis[M].New York:Springer-Verlag,1997.

[8] ZHAN X.Matrix Inequalities[M].New York:Springer-Verlag,2002.

A generalization of refinements and reverses for Young type inequality

Wang Yongzhong[1], Li Yu[2], Yang Changsen[2]

(1. College of Mathematics and Information Science, Xinxiang University, Xinxiang 453003, China;
2. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: In this paper, we give a completed refinements and reverses of Young type inequality for real numbers. Meanwhile, based on the scalars results, we obtain some corresponding operator versions and matrix versions including Hilbert-Schmidt norm, unitarily invariant norm and related trace versions, which can be regarded as the applications of the scalars results.

Keywords: Young type inequality; Hilbert-Schmidt norm; trace norm; unitarily invariant norm

[责任编校 陈留院 赵晓华]