第 45 卷　第 2 期　河南师范大学学报(自然科学版)　Vol.45　No.2
2017 年 3 月　Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)　Mar. 2017

文章编号:1000－2367(2017)02－0008－06　DOI:10.16366/j.cnki.1000－2367.2017.02.002

与年龄相关的随机种群系统分裂倒向 Euler 法的几乎必然指数稳定性

申芳芳[1],辛志贤[2],张启敏[2],哈金才[2]

(1.贵州财经大学 商务学院,贵州 惠水 550600;2.北方民族大学 数学与信息科学学院,银川 750021)

摘　要:将分裂倒向 Euler 法应用于随机种群系统.在一定的假设条件下,首先给出解的存在唯一性,再利用离散半鞅收敛定理,建立了分裂倒向 Euler 法对应数值解的几乎必然指数稳定性的判定准则.最后,通过数值例子对所给的结论进行了验证.

关键词:随机种群系统;指数稳定;分裂倒向 Euler 法;半鞅收敛定理

中图分类号:O175.1　**文献标志码**:A

由于生物种群在自然界中容易受到外界环境因素的干扰,如洪水、地震、海啸以及人为干预等,从而种群模型中的参数发生随机的波动.考虑到环境噪声的影响,在确定性模型中引入白噪声,使得种群模型更符合实际意义.近年来,与年龄相关的种群系统引起了国内外学者的广泛关注[1-11].例如,文献[2]讨论了模糊随机种群系统的指数稳定性,文献[4]研究了如下与年龄相关的随机种群系统解的存在、唯一性和指数稳定性.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial P(a,t)}{\partial a}=-\mu(a,t)P(a,t)+f(a,t,P(a,t))+g(a,t,P(a,t))\dfrac{\mathrm{d}\omega_t}{\mathrm{d}t},\text{在 } Q \text{ 内},\\ P(0,t)=\displaystyle\int_0^A\beta(a,t)P(a,t)\mathrm{d}a,\text{在}[0,T]\text{ 内},\\ P(a,0)=P_0,\text{在}[0,A]\text{ 内},\end{cases}\tag{1}$$

其中 $Q=[0,A]\times[0,T]$.$a\in[0,A]$ 表示年龄,A 表示种群的最大年龄.$t\in[0,T]$ 表示时间,$0<T<\infty$,$P(a,t)$,$\beta(a,t)$ 和 $\mu(a,t)$ 分别表示时刻 t 年龄为 a 的种群密度、生育率和死亡率,$f(a,t,P(a,t))$ 为外部环境对种群系统的影响,$g(a,t,P(a,t))\dfrac{\mathrm{d}\omega_t}{\mathrm{d}t}$ 为随机外界环境对系统的扰动,ω_t 为 Brown 运动.

研究随机环境下的种群动力系统的动力学行为,已经成为现代生物数学的一个主要研究课题.然而,在现实问题中对于系统(1),很难得到精确解,因此其数值方法就显得尤为重要,寻找合适的数值方法有利于预测和分析系统的性质.尽管随机种群系统的数值解已有很多研究[5,7-10].但到目前为止,很少有关于随机种群系统分裂倒向 Euler 法的研究和数值解的几乎必然指数稳定性的报道.本文的主要目的是将分裂倒向 Euler 法应用于与年龄相关的随机种群系统.

1　预备知识

令 $V=H'([0,A])\equiv\{\varphi\mid\varphi\in L^2([0,A]),\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}\in L^2([0,A])$,其中$\dfrac{\partial\varphi}{\partial a}$是广义偏导数$\}$,$V$ 是一个 Sobolev 空间,有 $V\to H\equiv H'\to V'$,V' 是 V 的对偶空间,分别用 $\|\cdot\|$,$|\cdot|$,表示 V' 和 V 的范数,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 V'

收稿日期:2016-09-10;修回日期:2017-02-25.

基金项目:国家自然科学基金(11461053;11661064;11261043);宁夏回族自治区自然科学基金(NZ15104).

作者简介(通信作者):张启敏(1964－),女,宁夏银川人,北方民族大学教授,博士生导师,研究方向为应用概率统计与非线性动力系统,E-mail:zhangqimin64@sina.com.

和 V 的对偶积，$(\cdot,\cdot)$ 是 H 中的内积. $\{B_t\}_{t\in[0,T]}$ 是定义在完备的概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 取值于可分的 Hilbert 空间 M 上的 Wiener 过程，具有增量协方差算子 W. $B\in\mathscr{L}(M,H)$ 是所有从 M 到 H 的有界线性算子空间，$\|B\|_2$ 是 Hilbert-Shmidt 范数，即 $\|B\|_2=\mathrm{tr}(BWB^{\mathrm{T}})$.

首先，对方程(1)应用分裂倒向 Euler(SSBE)数值方法[9-10]，则得到以下迭代格式：

$$\begin{cases}Y_n^*=Y_n+\left(-\dfrac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*)\right)\Delta t,\\ Y_{n+1}=Y_n^*+g(t_n,Y_n^*)\Delta\omega_n,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $n=0,1,2,\cdots,N$. 在上述式子中 $\Delta t=\dfrac{T}{N}$ 是时间步长，$t_n=n\Delta t$，$\Delta\omega_n=\omega(t_{n+1})-\omega(t_n)$. 并且 $Y_0=P_0$，$Y_n=P(a,t_n)$.

定义 1[13]　如果对任意初值 ξ，存在常数 $\lambda>0$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n\Delta t}\lg(|Y_n|)\leq-\lambda\qquad \text{a. s.},\tag{3}$$

则(2)式对应的数值解 Y_n 是几乎必然指数稳定的.

引理 1[14]（离散半鞅收敛定理）　对 $i=1,2,\cdots$，令 $\{A_i\}$，$\{U_i\}$ 是使 A_i，U_i 都是 $\mathscr{F}_{i-1}$-可测的两个非负随机变量序列，且 $A_0=U_0=0$　a. s.，令 M_i 是一实值局部鞅且 $M_0=0$　a. s.，令 ξ 是一非负 $\mathscr{F}_0$-可测的随机变量. 假设 X_i 是一个非负半鞅，由 Doob-Mayer 分解 $X_i=\xi+A_i-U_i+M_i$，如果 $\lim\limits_{t\to\infty}A_i<\infty$　a. s.，则对几乎所有的 $\omega\in\Omega$，有 $\lim\limits_{t\to\infty}X_i<\infty$，$\lim\limits_{t\to\infty}U_i<\infty$，即 X_i，U_i 都是收敛到有限的随机变量.

为了证明本文的主要结论，给出以下假设条件：

(a) $\mu(a,t)$，$\beta(a,t)$ 是 $[0,T]$ 中非负连续的，且有

$$\begin{cases}0\leq\mu_0\leq\mu(a,t)<\infty,\text{在 } Q \text{ 内},\\ 0\leq\beta(a,t)\leq\bar{\beta}<\infty,\quad\text{在 } Q \text{ 内};\end{cases}\tag{4}$$

(b)对 $\forall x\in V$ 和 $t\geq0$，存在非负常数 λ_1 满足

$$\langle f(t,x),x\rangle\leq-\lambda_1|x|^2;\tag{5}$$

(c) $f(t,0)=0$，$g(t,0)=0$，$\forall t\in[0,T]$；

(d)(Lipschitz 条件)对 $\forall x_1,x_2\in V$，存在非负常数 λ_2 满足

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\vee\|g(t,x_1)-g(t,x_2)\|_2^2\leq\lambda_2|x_1-x_2|^2,\tag{6}$$

特别地，有

$$\|g(t,x_1)\|_2^2\leq\lambda_2|x_1|^2.\tag{7}$$

2　数值解的几乎必然指数稳定性

在这节将给出判断与年龄相关的随机种群系统 SSBE 数值解的几乎必然指数稳定性准则. 首先，给出系统(1)的存在、唯一性定理.

定理 1　如果假设条件(a)～(d)成立，则对于系统(1)有唯一的解.

证明　由方程(5)和(7)，有

$$2\langle f(t,x),x\rangle+\|g(t,x)\|_2^2\leq-2\lambda_1|x|^2+\lambda_2|x|^2,\tag{8}$$

因此满足文献[3]中的假设条件(H)，

$$2\langle f(t,x),x\rangle+\|g(t,x)\|_2^2\leq-\alpha|x|^2+\lambda_2|x|^2+\gamma(t)\mathrm{e}^{-\xi t},\tag{9}$$

其中，$\alpha>0$，$\xi>0$，$\gamma(t)$ 是非负连续函数. 证明过程类似文献[4].

对于与年龄相关的随机种群系统(1)SSBE 法的几乎必然指数稳定性可以给出如下判定准则.

定理 2　假设条件(a)～(d)成立，并且 $\lambda_2+A\bar{\beta}^2-2\lambda_1-2\mu_0<0$，对任意的 $\epsilon\in\left(0,\dfrac{2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2-\lambda_2}{2}\right)$，则存在 $\Delta t^*>0$，使得 $0<\Delta t<\Delta t^*$，有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n\Delta t}\lg(|Y_n|)\leq -\frac{2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2-\lambda_2}{2}+\epsilon \quad \text{a.s.}, \tag{10}$$

其中 Y_n 是满足 SSBE 方法(2)式且初始条件为 $P_0\in\mathscr{F}_0$ 的数值解.

证明 首先,由(2)式可得

$$\langle -\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*),Y_n+(-\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*))\Delta t\rangle=\langle -\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*),-\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*)\rangle\Delta t+\langle -\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*),Y_n\rangle=\left|-\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*)\right|^2\Delta t+\langle -\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*),Y_n\rangle, \tag{11}$$

因此,由(2)式和(11)式有

$$\left|-\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*)\right|^2\Delta t+\langle -\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*),Y_n\rangle=\langle -\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*),Y_n+(-\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*))\Delta t\rangle=\langle -\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*),Y_n^*\rangle=\langle -\frac{\partial Y_n^*}{\partial a},Y_n^*\rangle+\langle -\mu(a,t_n)Y_n^*,Y_n^*\rangle+\langle f(t_n,Y_n^*),Y_n^*\rangle=-\int_0^A Y_n^*\,\mathrm{d}_a(Y_n^*)-\mu(a,t_n)\langle Y_n^*,Y_n^*\rangle+\langle f(t_n,Y_n^*),Y_n^*\rangle, \tag{12}$$

因为

$$-\int_0^A Y_n^*\,\mathrm{d}_a(Y_n^*)=\frac{1}{2}(\int_0^A\beta(a,t_n)Y_n^*\,\mathrm{d}a)^2\leq\frac{1}{2}\int_0^A\beta^2(a,t_n)\mathrm{d}a\int_0^A(Y_n^*)^2\mathrm{d}a\leq\frac{1}{2}A\bar{\beta}^2|Y_n^*|^2. \tag{13}$$

根据(12)式和(13)式,同时应用假设条件(a)和(b)有

$$\langle -\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*),Y_n\rangle\leq\frac{1}{2}A\bar{\beta}^2|Y_n^*|^2-\mu_0|Y_n^*|^2-\lambda_1|Y_n^*|^2. \tag{14}$$

然后,有

$$|Y_n^*|^2=\langle Y_n^*,Y_n^*\rangle=\langle Y_n+\left(-\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*)\right)\Delta t,Y_n+(-\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*))\Delta t\rangle=\langle Y_n,Y_n\rangle+\langle Y_n,-\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*)\rangle\Delta t+\langle\left(-\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*)\right)\times\Delta t,Y_n+\left(-\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*)\right)\Delta t\rangle=\langle Y_n,Y_n\rangle+\langle Y_n,-\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*)\rangle\Delta t+\langle -\frac{\partial Y_n^*}{\partial a}-\mu(a,t_n)Y_n^*+f(t_n,Y_n^*),Y_n^*\rangle\Delta t, \tag{15}$$

根据(14)式可以得到

$$|Y_n^*|^2\leq|Y_n|^2+2\left(\frac{1}{2}A\bar{\beta}^2-\mu_0-\lambda_1\right)|Y_n^*|^2\Delta t, \tag{16}$$

因为 $\lambda_2+A\bar{\beta}^2-2\mu_0-2\lambda_1<0$,故

$$|Y_n^*|^2\leq\frac{1}{1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t}|Y_n|^2, \tag{17}$$

由(2)式和(17)式可知

$$|Y_{n+1}|^2=|Y_n^*+g(t_n,Y_n^*)\Delta\omega_n|^2=|Y_n^*|^2+2\langle Y_n^*,g(t_n,Y_n^*)\Delta\omega_n\rangle+\|g(t_n,Y_n^*)\Delta\omega_n\|_2^2\leq\frac{1}{1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t}|Y_n|^2+2\langle Y_n^*,g(t_n,Y_n^*)\Delta\omega_n\rangle+\lambda_2|Y_n^*|^2|\Delta\omega_n|^2, \tag{18}$$

即

$$[1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t]|Y_{n+1}|^2\leq|Y_n|^2+2[1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t]\langle Y_n^*,g(t_n,Y_n^*)\Delta\omega_n\rangle+\lambda_2|Y_n|^2|\Delta\omega_n|^2, \tag{19}$$

对于任意给定的正常数 $C>1, n=0,1,2,\cdots$,有

$$(1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t)[C^{(n+1)\Delta t}|Y_{n+1}|^2-C^{n\Delta t}|Y_n|^2]\le[C^{(n+1)\Delta t}-(1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t)C^{n\Delta t}]|Y_n|^2+\lambda_2 C^{(n+1)\Delta t}|Y_n|^2\Delta t+2C^{(n+1)\Delta t}[1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t]\langle Y_n^*,g(t_n,Y_n^*)\Delta\omega_n\rangle+\lambda_2 C^{(n+1)\Delta t}|Y_n|^2(|\Delta\omega_n|^2-\Delta t), \tag{20}$$

将(20)式左右两端从 0 至 $n-1$ 作和,可得

$$(1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t)C^{n\Delta t}|Y_n|^2\le(1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t)|Y_0|^2+\sum_{i=0}^{n-1}[C^{(i+1)\Delta t}-(1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t)C^{i\Delta t}]|Y_i|^2+\lambda_2\sum_{i=1}^{n-1}C^{(i+1)\Delta t}|Y_i|^2\Delta t+M_n=(1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t)|Y_0|^2+\sum_{i=0}^{n-1}[1-(1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t)C^{-\Delta t}+\lambda_2\Delta t]C^{(i+1)\Delta t}|Y_i|^2+M_n, \tag{21}$$

其中

$$M_n=\sum_{i=0}^{n-1}2C^{(i+1)\Delta t}[1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t]\langle Y_i^*,g(t_i,Y_i^*)\Delta\omega_i\rangle+\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_2 C^{(i+1)\Delta t}|Y_i|^2(|\Delta\omega_i|^2-\Delta t),$$

显然 M_n 是一个鞅,令

$$\psi(C)=1-(1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t)C^{-\Delta t}+\lambda_2\Delta t, \tag{22}$$

则 $\psi(1)=(\lambda_2+A\bar{\beta}^2-2\lambda_1-2\mu_0)\Delta t<0, \psi'(C)=(1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t)\Delta t C^{-\Delta t-1}>0, \lim\limits_{C\to\infty}\psi(C)=1+\lambda_2\Delta t>1$,

故存在唯一的 $C_*(\Delta t)>1$,使得 $\psi(C_*)=0$. 由离散半鞅收敛定理(引理 1),对几乎所有的 $\omega\in\Omega$,有

$$C_*^{n\Delta t}|Y_n|^2\le(1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t)C_*^{n\Delta t}|Y_n|^2\le(1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t)|Y_0|^2+M_n<\infty,$$

故存在随机变量 $M(\omega)>0$,使得 $C_*^{n\Delta t}|Y_n|^2<M$. 从而可得到

$$\frac{1}{n\Delta t}\lg(|Y_n|)<-\frac{1}{2}\lg C_*+\frac{1}{2n\Delta t}\lg M. \tag{23}$$

由

$$\psi(C_*)=1-(1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t)C_*^{-\Delta t}+\lambda_2\Delta t=0, \tag{24}$$

可得,$C_*(\Delta t)=\left(\dfrac{1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t}{1+\lambda_2\Delta t}\right)^{\frac{1}{\Delta t}}$,由于

$$\lim_{\Delta t\to0}C_*(\Delta t)=\lim_{\Delta t\to0}\left(\frac{1+(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2)\Delta t}{1+\lambda_2\Delta t}\right)^{\frac{1}{\Delta t}}=\lim_{\Delta t\to0}\left(1+\frac{(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2-\lambda_2)\Delta t}{1+\lambda_2\Delta t}\right)^{\frac{1}{\Delta t}}=\lim_{\Delta t\to0}\left(1+\frac{2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2-\lambda_2}{1/\Delta t+\lambda_2}\right)^{\frac{1}{\Delta t}}=\lim_{\Delta t\to0}\left(1+\frac{2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2-\lambda_2}{1/\Delta t+\lambda_2}\right)^{\frac{1/\Delta t+\lambda_2}{2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2-\lambda_2}\cdot\frac{2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2-\lambda_2}{1/\Delta t+\lambda_2}\cdot\frac{1}{\Delta t}}=\lim_{\Delta t\to0}\exp\left(\frac{2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2-\lambda_2}{1+\lambda_2\Delta t}\right)=\exp(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2-\lambda_2),$$

即

$$\lim_{\Delta t\to0}C_*(\Delta t)=\exp(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2-\lambda_2). \tag{25}$$

对 $\forall\epsilon>0$,存在充分小的 Δt^* 使得对于所有的 $\Delta t<\Delta t^*$,有

$$C_*>\exp(2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2-\lambda_2-2\epsilon), \tag{26}$$

将(26)式代入(23)式,可得 $\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\Delta t}\lg(|Y_n|)<-\dfrac{2\mu_0+2\lambda_1-A\bar{\beta}^2-\lambda_2}{2}+\epsilon$. 定理证毕.

3　数值例子

通过以下例子对给出的结论进行验证.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial P(a,t)}{\partial a}=-\dfrac{2}{(1-a)^2}P(a,t)-(t^2+1)P(a,t)-\cos^2 tP(a,t)+\sin tP(a,t)\dfrac{\mathrm{d}\omega_t}{\mathrm{d}t},\text{在 } Q \text{ 内}, \\ P(0,t)=\int_0^{0.8}(-(0.5-a)^2+2)P(a,t)\mathrm{d}a,\text{在}[0,3]\text{内}, \\ P(a,0)=\exp(-\dfrac{1}{1-a}),\text{在}[0,0.8]\text{内}, \end{cases} \tag{27}$$

其中 ω_t 是一个标准的 Brown 过程，$T=3, A=0.8, Q=[0,0.8]\times[0,3], H=L^2([0,0.8])$，出生率 $\beta(a,t)=-(0.5-a)^2+2$，死亡率 $\mu(a,t)=\dfrac{2}{(1-a)^2}$，初值 $P_0=\exp(-\dfrac{1}{1-a})$，$f(t,P(a,t))=-(t^2+1)P(a,t)-\cos^2 tP(a,t)$，$g(t,P(a,t))=\sin tP(a,t)$. 可以很容易得到如下不等式：

$$\begin{cases} 2=\mu_0\le\mu(a,t)<\infty,\text{在 } Q \text{ 内}, \\ 0\le\beta(a,t)\le\bar{\beta}=2<\infty,\text{在 } Q \text{ 内}, \end{cases}$$

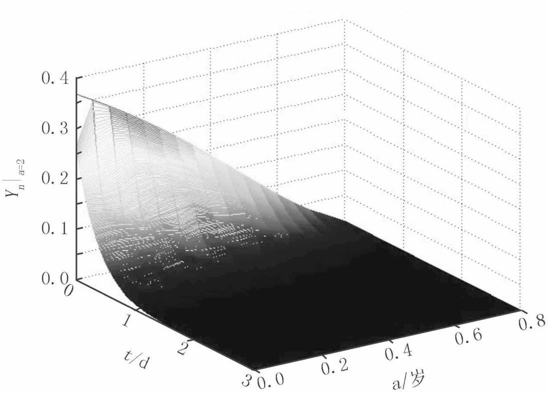
$$\langle f(t,P(a,t)),P(a,t)\rangle=\langle-(t^2+1)P(a,t)-\cos^2 tP(a,t),P(a,t)\rangle\le-|P(a,t)|^2,$$

$$\|g(t,P(a,t))\|_2^2=|P(a,t)|^2,$$

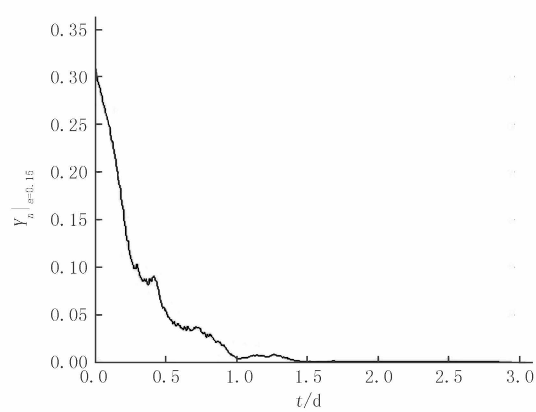
其中 $\lambda_1=1,\lambda_2=1$. 并且有 $f(t,0)=0, g(t,0)=0, A=0.8$.

故可以很容易地验证系统(27)满足假设条件(a)～(d)，且满足 $\lambda_2+A\bar{\beta}^2-2\lambda_1-2\mu_0=-1.8<0$. 由上面的分析可知系统(27)满足定理 2 中的假设条件，故系统(27)对应的 SSBE 法是几乎必然指数稳定的. 下面给出 $\Delta t=0.005, \Delta a=0.05$ 固定步长的数值解模拟.

图 1(a)表示初值为 $P_0=\exp(-\dfrac{1}{1-a})$ 的 SSBE 数值模拟，图 1(b)为图 1(a)当 $a=0.15$ 时的图形，它是为了更直观的描述随机种群模型的稳定性.



(a) 当 Δt=0.005, Δa=0.05时



(b) 当a=0.15, Δt=0.005时

图1 与年龄相关的随机种群系统的数值模型

4 结 论

由于与年龄相关的随机种群系统很难求得精确解，因此找到合适的数值方法就尤为重要，本文在引入分裂倒向 Euler 法的基础上，利用离散半鞅收敛定理，给出了与年龄相关的随机种群系统分裂倒向 Euler 法的几乎必然指数稳定性. 所得到的结论为种群的灭绝和最优控制等研究提供了一定的理论依据.

致谢：感谢审稿人提出的宝贵修改意见.

参 考 文 献

[1] 杨莉，张启敏. 与年龄相关的种群模型解的全局稳定性[J]. 河南师范大学学报(自然科学版)，2016，44(2)：9-14.

[2] 申芳芳，张启敏，杨洪福，等. 与年龄相关的模糊随机种群扩散系统的指数稳定性[J]. 数学的实践与认识，2014，44(19)：187-196.

[3] 何泽荣.具有年龄结构和约束的群落系统的最优收获[J].数学物理学报，2010，30A(2)：477-486.
[4] Zhang Q，Liu W，Nie Z. Existence，uniqueness and exponential stability for stochastic age-dependent population[J]. Applied Mathematics and Computation，2004，154：183-201.
[5] Zhang Q，Han C. Numerical analysis for stochastic age-dependent population equations[J]. Applied Mathematics and Computation，2005，176：210-223.
[6] 何泽荣，刘荣，刘丽丽.模拟周期环境和尺度结构的种群系统的最优收获[J].数学物理学报，2014，34A(3)：684-690.
[7] 辛志贤，张启敏，哈金才.具有年龄结构的种群扩散系统反问题的数值解[J].河南师范大学学报(自然科学版)，2016，44(4)：27-33.
[8] 石秀明，张启敏，李西宁.基于 POD 方法具有 Poisson 跳随机种群系统的数值解讨论[J].河南师范大学学报(自然科学版)，2014，42(5)：7-15.
[9] Li R，Meng H，Chang Q. Convergence of numerical solutions to stochastic age-dependent population equations[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2006，193：109-120.
[10] Pang W，Li R ，Liu M. Convergence of thesemi-implicit Euler method for stochastic age-dependent population equations[J]. Applied Mathematics and Computation，2008，195(2)：466-474.
[11] Zhang Q，Liu Y，Li X. Strong convergence of split-step backward Euler method for stochastic age-dependent capital system with Markovian switching[J]. Applied Mathematics and Computation，2014，235(25)：439-453.
[12] Bastani A，Tahmasebi M. Strong convergence of split-step backward Euler method for stochastic differential equations with nonsmooth drift[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2012，236：1903-1918.
[13] Wu F，Mao X，Szpruch L. Almost sure exponential stability of numerical solutions for stochastic delay differential equations[J]. Numerische Mathematik，2010，115(4)：681-697.
[14] Shiryayev A. Probablity[M]. Berlin：Springer，1996.

Almost Sure Exponential Stability of The Split-step Backward Euler Method for Stochastic Age-Structured Population System

Shen Fangfang[1]，Xin Zhixian[2]，Zhang Qimin[2]，Ha Jincai[2]

(1. Business Department，Guizhou University of Finance and Economics，Huishui 550600，China；
2. School of Mathematics and Information Science，North University for Nationalities，Yinchuan 750021，China)

Abstract：In this paper，the split-step backward Euler method with high precision is applied to stochastic age-structured population system. Under the certain assumed condition ，the existence and uniqueness of the solution are given. Using discrete semi-martingale convergence theorem，some criterion are established for almost sure exponential stability of numerical solution corresponding to split-step backward Euler method. Finally，we give a stochastic age-structured population equation example to conclude this research. Under certain assumptions，the existence and uniqueness of the solution are given，and the convergence theorem of the discrete semi martingale is obtained，

Keywords：stochastic population system；exponential stability；split-step backward Euler method；semi-martingale convergence theorem

［责任编辑　陈留院］