

高阶色散方程的柯西问题

蒋敏杰, 刘利敏

(河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

摘 要:主要研究了高阶色散方程 $u_t + \partial_x^{2j+1}u = \partial_x^{j+1}(u^2) + \partial_x^{-1}(u_x^2), j \geq 2, j \in \mathbf{N}, x, t \in \mathbf{R}$ 的柯西问题. 使用修正傅里叶限制范数方法和 Strichartz 估计以及修正 Bourgain 空间, 证明了这个问题在修正的 Sobolev 空间 $H^{(s, \frac{1}{2j})} (s > -\frac{j}{2} + \frac{3}{4})$ 上是局部适定的. 使用迭代技巧, 也证明了这个问题在 $H^{(s, w)} (0 < w < \frac{1}{2j})$ 中, 对于任意的 $s \in \mathbf{R}$, 流映射不是 C^2 的.

关键词:柯西问题; 局部适定; 修正的 Sobolev 空间

中图分类号:O175.5

文献标志码:A

本文主要研究以下高阶色散方程的柯西问题

$$u_t + \partial_x^{2j+1}u = \partial_x^{j+1}(u^2) + \partial_x^{-1}(u_x^2), j \geq 2, j \in \mathbf{N}, x, t \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2)$$

(1)、(2) 式是下面的一种特殊的情况

$$u_t + \partial_x^{2j+1}u + P(u, \partial_x u, \dots, \partial_x^{2j}u) = 0, j \in \mathbf{N}, x, t \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (4)$$

其中 $P: \mathbf{R}^{2j+1} \rightarrow \mathbf{R}$ (或者 $P: C^{2j+1} \rightarrow C$) 是一种没有常数或线性项的多项式, 并且

$$u_t + \partial_x^{2j+1}u = \sum_{0 \leq j_1 + j_2 \leq 2j} a_{j_1, j_2} \partial_x^{j_1} u \partial_x^{j_2} u, j \in \mathbf{N}, x, t \in \mathbf{R}, \quad (5)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (6)$$

在规范变换的帮助下, 文献[1]已经证明了(3)~(4)式在一些加权 Sobolev 空间中对于一些小初值是适定的. 当 $s > -\frac{1}{4}$ 时文献[2]证明了(1)、(2)式在 $j = 2$ 时在修正的 Sobolev 空间 $H^{(s, \frac{1}{4})}$ 中是适定的. 文献[3]已经研究了(5)、(6)式在 Besov 中的适定性并且证明了(5)、(6)式在空间 $H^k(\mathbf{R}) \cap H^{k-2j}(\mathbf{R}; x^2 dx), k > 2j + \frac{1}{4}$ 中对于小初值是适定的. 文献[3]也证明了 $a_{0, k} \neq 0$ 时 $k > j$ 的情况下的一些不适定结果, 在 $H^s(\mathbf{R})$ 中, 对于任意的 $s \in \mathbf{R}$, (5)、(6)式的流映射不是 C^2 的. 最近, 文献[4]考虑在修正的 Sobolev 空间中

$$u_t - \partial_x^5 u + c_1 \partial_x(u^3) + c_2 \partial_x(u_x^2) + c_3 \partial_x(uu_{xx}) = 0, \quad (7)$$

对于 $c_j \in \mathbf{R}, j = 1, 2, 3$ 并且 $c_3 \neq 0$ 的柯西问题. 最近文献[5-6]借助短时间 $X^{s, b}$ 空间研究了(7)式在 Sobolev 空间下的柯西问题.

受文献[2, 7-9]的启发, 本文证明了(1)、(2)式在修正的 Sobolev 空间 $H^{(s, \frac{1}{2j})}$ 中, 对于任意的 $s > -\frac{j}{2} + \frac{3}{4}$ 是局部适定的. 也证明了(1)、(2)式在 $H^{(s, w)}$ 中, 当 $0 < w < \frac{1}{2j}$ 时, 对于任意的 $s \in \mathbf{R}$, 流映射不是 C^2 的.

收稿日期: 2016-04-08; 修回日期: 2016-09-22.

基金项目: 国家自然科学基金(11401180); 河南省软科学项目(142400410424).

第 1 作者简介(通信作者): 蒋敏杰(1992-), 女, 河南开封人, 河南师范大学硕士研究生, 主要从事偏微分方程的研究工作, E-mail: 1764915956@qq.com.

在陈述一些主要结论之前, 首先介绍一些符号和定义. 用 $X \sim Y$ 表示 $A_1 |X| \leq |Y| \leq A_2 |X|$, 这里 $A_j > 0 (j = 1, 2)$, 用 $|X| > C |Y|$ 表示 $X \gg Y$, 这里 C 是一个大于 2 的正整数. 对于任意的 $\xi \in \mathbf{R}, \langle \xi \rangle^s = (1 + \xi^2)^{\frac{s}{2}}$, $\mathcal{F}u$ 表示对 u 的所有变量的傅里叶变换. \mathcal{F}_u^{-1} 表示对 u 的所有变量的傅里叶逆变换. \mathcal{F}_x^u 表示对 u 的空间变量的傅里叶变换. $\mathcal{F}_x^{-1}u$ 表示对 u 的空间变量的傅里叶逆变换. 速降函数是 Schwartz 空间, 缓增空间是它的对偶空间. $H^{(s,w)}(\mathbf{R})$ 是修正的 Sobolev 空间并且 $\|f\|_{H^{(s,w)}(\mathbf{R})} \triangleq \|\langle \xi \rangle^{s+w} |\xi|^{-w} \mathcal{F}_x f\|_{L_x^2(\mathbf{R})}$. 在本文中, 总是假定 ψ 是一个光滑函数, $\psi_b(t) = \psi(\frac{t}{b})$, 满足 $0 \leq \psi \leq 1, \psi = 1$, 当 $t \in [0, 1], \text{supp} \psi \subset [-1, 2]$ 并且 $\sigma = \tau + (-1)^j \xi^{2j+1}, \sigma_k = \tau_k + (-1)^j \xi_k^{2j+1} (k = 1, 2)$,

$$W(t)u_0 = \int_{\mathbf{R}} e^{i(x\tau + (-1)^j \xi^{2j+1} t)} \mathcal{F}_x u_0(\xi) d\xi,$$

$$\|f\|_{L_t^q L_x^p} = \left(\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x,t)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} dt \right)^{\frac{1}{q}}, \|f\|_{L_t^p L_x^p} = \|f\|_{L_x^p}.$$

对于任意的 $s, b \in \mathbf{R}, X_{s,b}(\mathbf{R}^2)$ 是具有相函数 $\mathcal{O}(\xi) = (-1)^j \xi^{2j+1}$ 的 Bourgain 空间. 即缓增空间中的函数 $u(x,t)$ 属于 $X_{s,b}(\mathbf{R}^2)$ 当且仅当

$$\|u\|_{X_{s,w,b}(\mathbf{R}^2)} \triangleq \|\langle \xi \rangle^{s-2jw} |\xi|^{-w} \langle \tau + (-1)^j \xi^{2j+1} \rangle^w \langle \sigma \rangle^b \mathcal{F}u(\xi, \tau)\|_{L_{\tau}^2(\mathbf{R}^2)} < \infty.$$

对于任意给定的区间 $L, X_{s,b}(\mathbf{R} \times L)$ 是 $X_{s,b}(\mathbf{R}^2)$ 对所有函数在 $\mathbf{R} \times L$ 上的限制, 对于 $u \in X_{s,b}(\mathbf{R} \times L)$, 满足

$$\|u\|_{X_{s,w,b}(\mathbf{R} \times L)} = \inf\{\|U\|_{X_{s,w,b}(\mathbf{R}^2)}; U|_{\mathbf{R} \times L} = u\}.$$

当 $L = [0, T]$ 时, $X_{s,w,b}(\mathbf{R} \times L)$ 可以缩写为 $X_{s,w,b}^T. C = C(j)$ 一直在变化并且 C 依赖于 j . 在本文中, 假定 $0 < \epsilon < \frac{1}{16j}$.

下面是本文的主要结论.

定理 1 在(1)式中令 $j \geq 2, j \in \mathbf{N}, u_0(x) \in H^{(s, \frac{1}{2j})}(\mathbf{R})$ 且 $s > -\frac{j}{2} + \frac{3}{4}$. 那么柯西问题(1)是局部适定的.

注 1 方程(1)包含 $u \partial_x^{j+1} u$, 从文献[3]中知道在某种意义下(1)、(2)式是不适定的, (1)、(2)式的流映射在 $H^s(\mathbf{R})$ 中对于 $s \in \mathbf{R}$ 不是 C^2 的.

定理 2 在(1)式中令 $j \geq 2, j \in \mathbf{N}$, 并且(1)式的柯西问题在 $H^{(s,w)}(\mathbf{R})$ 中对于 $0 < w < \frac{1}{2j}, s \in \mathbf{R}$ 是适定的. 那么流映射不是 C^2 的.

注 2 定理 2 意味着在定理 1 中的低频条件分别最佳优化了(1)、(2)式的流映射的解析性.

1 预备知识

在这一节将为证明双线性估计做一些准备.

引理 1 令 $b > \frac{1}{2}$, 那么

$$\|u\|_{L_x^4} \leq C \|u\|_{X_{0, \frac{j+1}{2j+1}} b}, \tag{8}$$

$$\|D_x^{\frac{2j-1}{4}} u\|_{L_t^4 L_x^\infty} \leq C \|u\|_{X_{0,b}}, \tag{9}$$

$$\|u\|_{L_t^4 L_x^2} \leq C \|u\|_{X_{0, \frac{1}{2}} b}, \tag{10}$$

$$\|u\|_{X_{0, -\frac{1}{2}} b} \leq C \|u\|_{L_x^{\frac{4}{3}} L_x^2}, \tag{11}$$

$$\|D_x^{\frac{2j-1}{8}} u\|_{L_x^4} \leq C \|u\|_{X_{0, \frac{3}{4}} b}. \tag{12}$$

证明 对于引理 1 中对(8)~(11)式的证明, 读者可以参考文献[11]中引理 2.1. 结合文献[11]中(2.7)和一个标准的证明, 有

$$\|D_x^{\frac{2j-1}{8}} u\|_{L_x^6} \leq C \|u\|_{X_{0,b}}.$$

内插上述不等式和 $\|u\|_{L^2_x} = C\|u\|_{X_{0,0}}$ 得到(12) 式.

已经完成了引理 1 的证明.

引理 2 令 $b = \frac{1}{2} + \epsilon$, 那么

$$\|I^{\frac{1}{2}}(u_1, u_2)\|_{L^2_x} \leq C \prod_{k=1}^2 \|u_k\|_{X_{0,b}}, \tag{13}$$

其中

$$\mathcal{F}I^{\frac{1}{2}}(u_1, u_2)(\xi, \tau) = \int_{\substack{\xi = \xi_1 + \xi_2 \\ \tau = \tau_1 + \tau_2}} |\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}u_1(\xi_1, \tau_1) \mathcal{F}u_2(\xi_2, \tau_2) d\xi_1 d\tau_1.$$

对于引理 2 的证明, 参见文献[11] 中引理 3. 1.

引理 3 对于任意的 $0 < \delta < \frac{1}{2}, 0 < \omega \leq \frac{1}{2}$ 和 $s \in \mathbf{R}$, 当 $b > 0$ 时, 有

$$\|\psi_\delta(t)W(t)u_0\|_{X_{s,\omega,b}} \leq C\delta^{\frac{1}{2}-b-\omega} \|u_0\|_{H^{(s,\omega)}}. \tag{14}$$

对于 $-\frac{1}{2} < b' \leq 0 \leq b' + 1$ 和 $b' + \omega \leq 0$, 有

$$\|\psi_\delta(t) \int_0^t W(t-\tau)u d\tau\|_{X_{s,\omega,b'}} \leq C\delta^{1+b'-b} \|u\|_{X_{s,\omega,b}}. \tag{15}$$

对于引理 3 的证明, 参见文献[2] 中的引理 2. 4.

引理 4 令 $j \in \mathbf{N}^+, \xi = \xi_1 + \xi_2$, 那么

$$|\xi^{2j+1} - \xi_1^{2j+1} - \xi_2^{2j+1}| \sim |\xi_{\min}| |\xi_{\max}|^{2j}, \tag{16}$$

这里 $|\xi_{\min}| := \min\{|\xi|, |\xi_1|, |\xi_2|\}, |\xi_{\max}| := \max\{|\xi|, |\xi_1|, |\xi_2|\}$.

对于引理 4 的证明, 可以参考文献[12].

注 3 从引理 4, 可以得出, 存在 $C > 0$ 使得

$$3\max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} \geq |\sigma - \sigma_1 - \sigma_2| = C < |\xi_{\min}| |\xi_{\max}|^{2j}. \tag{17}$$

2 双线性估计

在这一节中, 将建立两个重要的双线性估计.

引理 5 令 $s \geq s_0 = -\frac{j}{2} + \frac{3}{4} + (2j+1)\epsilon, b = \frac{1}{2} + \epsilon, j \in \mathbf{N}^+, j \geq 2, b' = -\frac{1}{2} + 2\epsilon$, 那么

$$\|\partial_x^{j+1} \prod_{k=1}^2 (u_k)\|_{X_{s,\frac{1}{2j},b'}} \leq C \prod_{k=1}^2 \|u_k\|_{X_{s,\frac{1}{2j},b'}}. \tag{18}$$

定义

$$\begin{aligned} F_k(\xi_k, \tau_k) &= \langle \xi \rangle^s \langle \sigma_k \rangle^b \mathcal{F}u_k(\xi_k, \tau_k), k = 1, 2, F(\xi, \tau) = \langle \xi \rangle^{-s} \langle \sigma \rangle^b \mathcal{F}u(\xi, \tau), \\ \sigma &= \tau + (-1)^j \xi^{2j+1}, \sigma_k = \tau_k + (-1)^j |\xi|^{2j+1}, \lambda = |\tau| + |\xi|^{2j+1}, \\ \lambda_k &= |\tau_k| + |\xi_k|^{2j+1}, k = 1, 2. \end{aligned}$$

为了证明(18) 式, 需要证明如下的不等式

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^2} \int_{\substack{\xi = \xi_1 + \xi_2 \\ \tau = \tau_1 + \tau_2}} K_1(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) |F| \prod_{k=1}^2 |F_k| d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq \\ & C \|F\|_{L^2_\xi} [\|F_1\|_{L^2_\xi} \|\langle \xi \rangle^{s-s_0} F_2\|_{L^2_\xi} + \|\langle \xi \rangle^{s-s_0} F_1\|_{L^2_\xi} \|F_2\|_{L^2_\xi}], \end{aligned} \tag{19}$$

这里

$$K_1(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) = \frac{|\xi|^{j+1-\frac{1}{2j}} (\prod_{k=1}^2 |\xi_k|^{\frac{1}{2j}}) \langle \sigma \rangle^{b'} \langle \lambda \rangle^{\frac{1}{2j}} \langle \xi \rangle^{s-1}}{\prod_{k=1}^2 \langle \xi_k \rangle^{s-1} \langle \sigma_k \rangle^b \langle \lambda_k \rangle^{\frac{1}{2j}}}. \tag{20}$$

不失一般性, 设 $F \geq 0, F_k \geq 0 (k = 1, 2)$. 为了证明(19) 式, 只需证明

$$\int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_1(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) F \prod_{k=1}^2 F_k d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq C \|F\|_{L_{\xi}^2} \prod_{k=1}^2 \|F_k\|_{L_{\xi}^2}, \tag{21}$$

这里

$$K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) = \frac{|\xi|^{j+1-\frac{1}{2j}} (\prod_{k=1}^2 |\xi_k|^{\frac{1}{2j}} \langle \sigma \rangle^{b'} \langle \lambda \rangle^{\frac{1}{2j}} \langle \xi \rangle^{s_0-1}}{\prod_{k=1}^2 \langle \xi_k \rangle^{s_0-1} \langle \sigma_k \rangle^b \langle \lambda_k \rangle^{\frac{1}{2j}}}. \tag{22}$$

并且 $\langle \xi_1 + \xi_2 \rangle^{s_0} \leq C[\langle \xi_1 \rangle^{s_0} + \langle \xi_2 \rangle^{s_0}]$. 由 $|\xi_1|$ 和 $|\xi_2|$ 之间的对称性, 不失一般性, 设 $|\xi_1| \leq |\xi_2|$.

显然 $\{\xi = \xi_1 + \xi_2, \tau = \tau_1 + \tau_2, |\xi_2| \geq |\xi_1|\} \subset \bigcup_{k=1}^6 \Omega_k$, 这里

- $\Omega_1 = \{(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \in \mathbb{R}^4, \xi = \xi_1 + \xi_2, \tau = \tau_1 + \tau_2, |\xi_1| \leq |\xi_2| \leq 6\}$,
- $\Omega_2 = \{(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \in \mathbb{R}^4, \xi = \xi_1 + \xi_2, \tau = \tau_1 + \tau_2, |\xi_2| \geq 6, |\xi_2| \geq 4|\xi_1|, |\xi_1| \leq 1\}$,
- $\Omega_3 = \{(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \in \mathbb{R}^4, \xi = \xi_1 + \xi_2, \tau = \tau_1 + \tau_2, |\xi_2| \geq 6, |\xi_2| \geq 4|\xi_1|, |\xi_1| \geq 1\}$,
- $\Omega_4 = \{(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \in \mathbb{R}^4, \xi = \sum_{k=1}^2 \xi_k, \tau = \sum_{k=1}^2 \tau_k, |\xi_2| \geq 6, |\xi_1| \leq |\xi_2| \leq 4|\xi_1|, |\xi| \leq \frac{1}{2}|\xi_1|, \xi_1 \xi_2 \leq 0\}$,
- $\Omega_5 = \{(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \in \mathbb{R}^4, \xi = \xi_1 + \xi_2, \tau = \tau_1 + \tau_2, |\xi_2| \geq 6, |\xi_1| \leq |\xi_2| \leq 4|\xi_1|, |\xi_2| \geq \frac{|\xi_1|}{2}\}$,
- $\Omega_6 = \{(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \in \mathbb{R}^4, \xi = \xi_1 + \xi_2, \tau = \tau_1 + \tau_2, |\xi_2| \geq 6, |\xi_1| \leq |\xi_2| \leq 4|\xi_1|, \xi_1 \xi_2 \geq 0\}$.

在(21)式中相对应于 $\Omega_k (1 \leq k \leq 6)$ 的积分分别记做 $J_k (1 \leq k \leq 6)$. 定义 $f = \mathcal{F}^{-1} \frac{F}{\langle \sigma \rangle^{-b'}}$, $f_k = \mathcal{F}^{-1}$

$$\frac{F_k}{\langle \sigma_k \rangle^b}, k = 1, 2.$$

(I) 子区域 Ω_1 . 由于 $|\xi_1| \leq |\xi_2| \leq 6$, 那么 $K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq \frac{C}{\langle \sigma \rangle^{-b'} \prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b}$.

因此, 由 Plancherel 恒等式, Hölder 不等式和 $\frac{j+1}{2j+1}b < b$, 得出

$$J_1 \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) F \prod_{k=1}^2 F_k d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{F \prod_{k=1}^2 F_k}{\langle \sigma \rangle^{-b'} \prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq C \int_{\mathbb{R}^2} f_1 f_2 f dx dt \leq C \|f\|_{L_x^2} \prod_{k=1}^2 \|f_k\|_{L_x^4} \leq C \|F\|_{L_{\xi}^2} \prod_{k=1}^2 \|f_k\|_{X_{0, \frac{j+1}{2j+1}b}} \leq C \|F\|_{L_{\xi}^2} \prod_{k=1}^2 \|F_k\|_{L_{\xi}^2}.$$

(II) 子区域 Ω_2 . 在这个子区域中,

$$|\xi_2| \sim |\xi|, |\xi| \leq |\xi_1|^{-\frac{1}{2j}} \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}^{\frac{1}{2j}}. \tag{23}$$

显然, $\langle \lambda \rangle \leq C \max\{\langle \lambda_1 \rangle, \langle \lambda_2 \rangle\}$. 由于 $\min\{\langle \lambda_1 \rangle^{\frac{1}{2j}}, \langle \lambda_2 \rangle^{\frac{1}{2j}}\} \geq 1$, 那么

$$K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi|^{j+1} |\xi_1|^{\frac{1}{2j}} \langle \sigma \rangle^{b'} \langle \lambda \rangle^{\frac{1}{2j}}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b \langle \lambda_k \rangle^{\frac{1}{2j}}} \leq C \frac{|\xi|^j \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}^{\frac{1}{2j}} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\min\{\langle \lambda_1 \rangle^{\frac{1}{2j}}, \langle \lambda_2 \rangle^{\frac{1}{2j}}\} \prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} \leq C \frac{|\xi|^j \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}^{\frac{1}{2j}} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b}.$$

(i) 当 $\max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma|$ 或者 $\max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma_1| \leq 2|\sigma|$ 时, 由于 $\frac{1}{2j} +$

$b' < 0$, 那么 $K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi|^j \langle \sigma \rangle^{b'+\frac{1}{2j}}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} \leq C \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b}$. 因此, 从 Cauchy-Schwartz 不等式和引理 2

得出

$$J_2 \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) F \prod_{k=1}^2 F_k d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} F \prod_{k=1}^2 F_k d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq$$

$$C \left\| \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^2 F_k}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_{\xi}^2} \|F\|_{L_{\xi}^2} \leq C \|F\|_{L_{\xi}^2} \prod_{k=1}^2 \|F_k\|_{L_{\xi}^2}.$$

(ii) 当 $\max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma_1| > 2|\sigma|$ 时, 令 $|\sigma_1| \leq C\lambda_2$. 事实上, 通过用(17)式, 得出 $|\sigma_1| = |\tau_1 + (-1)^j \xi_1^{2j+1}| = |\tau + (-1)^j \xi^{2j+1} - (\tau_2 + (-1)^j \xi_2^{2j+1}) + (-1)^{j+1} \xi^{2j+1} + (-1)^j \xi_1^{2j+1} - (-1)^j \xi_2^{2j+1}| \leq |\tau + (-1)^j \xi^{2j+1}| + |\tau_2| + |\xi_2|^{2j+1} + |\xi^{2j+1} - \xi_1^{2j+1} - \xi_2^{2j+1}| \leq |\sigma| + \lambda_2 + C|\xi_1| |\xi|^{2j} \leq \frac{|\sigma_1|}{2} + C\lambda_2$,

因此, 有 $|\sigma_1| \leq C\lambda_2$. 由于 $|\sigma_1| \leq C\lambda_1$ 且 $|\lambda| \leq C\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$, 那么 $|\sigma_1| \leq C\min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$, 通过(23)式, 得出

$$K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi|^{j+1} |\xi_1|^{\frac{1}{2j} \langle \sigma \rangle^{b'}} \langle \lambda \rangle^{\frac{1}{2j}}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b \langle \lambda_k \rangle^{\frac{1}{2j}}} \leq C \frac{|\xi|^j |\sigma_1|^{\frac{1}{2j} \langle \sigma \rangle^{b'}}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b \min\{\langle \lambda_1 \rangle^{\frac{1}{2j}}, \langle \lambda_2 \rangle^{\frac{1}{2j}}\}} \leq$$

$$C \frac{|\xi|^j}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} \leq C \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b}.$$

因此, 利用 Cauchy-Schwartz 不等式和引理 2 可得出

$$J_2 \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) F \prod_{k=1}^2 F_k d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}} F \prod_{k=1}^2 F_k}{\prod_{j=1}^2 \langle \sigma_j \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq$$

$$C \left\| \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}} F_1 F_2 d\xi_1 \tau_1}{\prod_{j=1}^2 \langle \sigma_j \rangle^b} \right\|_{L_{\xi}^2} \|F\|_{L_{\xi}^2} \leq C \|F\|_{L_{\xi}^2} \prod_{k=1}^2 \|F_k\|_{L_{\xi}^2}.$$

(iii) 当 $\max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma_2|$ 时, 运用 $\min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} \geq 1$ 和(23)式, 由于 $b' + \frac{1}{2j} < 0$, 得出

$$K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi|^j \langle \sigma \rangle^{b'} |\sigma_2|^{\frac{1}{2j}}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b \min\{\langle \lambda_1 \rangle^{\frac{1}{2j}}, \langle \lambda_2 \rangle^{\frac{1}{2j}}\}} \leq C \frac{|\xi|^j \langle \sigma_2 \rangle^{\frac{1}{2j} - b} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\langle \sigma_1 \rangle^b} \leq$$

$$C \frac{|\xi|^j \langle \sigma \rangle^{\frac{1}{2j} - b} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\langle \sigma_1 \rangle^b} \leq C \frac{|\xi|^j \langle \sigma \rangle^{\frac{1}{2j} + b'}}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b} \leq C \frac{|\xi|^j}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b} \leq C \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{1/2}}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b}.$$

设 $\xi'_1 = -\xi_1, \xi'_2 = \xi, \xi' = \xi_2, \tau'_1 = -\tau_1, \tau'_2 = \tau, \tau' = \tau_2$. 那么 $\xi_1 + \xi_2 = \xi', \tau_1 + \tau_2 = \tau'$ 并且

$$|\sigma| = |\tau + (-1)^j \xi^{2j+1}| = |\tau'_2 + (-1)^j \xi'^{2j+1}| = |\sigma'_2|,$$

$$|\sigma_1| = |\tau_1 + (-1)^j \xi_1^{2j+1}| = |-\tau'_1 + (-1)^{j+1} \xi'^{2j+1}| = |\sigma'_1|,$$

$$|\sigma_2| = |\tau_2 + (-1)^j \xi_2^{2j+1}| = |-\tau' + (-1)^{j+1} \xi'^{2j+1}| = |\sigma'|.$$

设 $F_1(\xi_1, \tau_1) = G_1(\xi'_1, \tau'_1), F_2(\xi_2, \tau_2) = F_2(\xi', \tau') = G(\xi', \tau'), F(\xi, \tau) = F(\xi'_2, \tau'_2) = G_2(\xi'_2, \tau'_2)$. 则

$$J_2 \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) F(\xi, \tau) \prod_{k=1}^2 F_k(\xi_k, \tau_k) d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq$$

$$C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi'_1=\xi'_1+\xi'_2 \\ \tau'=\tau'_1+\tau'_2}} \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma'_1 \rangle^b \langle \sigma'_2 \rangle^b} G_1(\xi'_1, \tau'_1) G_2(\xi'_2, \tau'_2) G(\xi', \tau') d\xi'_1 d\tau'_1 d\xi' d\tau' \leq$$

$$C \|G\|_{L_{\xi}^2} \prod_{k=1}^2 \|G_k\|_{L_{\xi}^2} \leq C \|F\|_{L_{\xi}^2} \prod_{k=1}^2 \|F_k\|_{L_{\xi}^2}.$$

(III) 子区域 Ω_3 . 在这个子区间中, 有 $|\xi| \sim |\xi_2|$.

(i) 当 $\max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma|$ 或者 $\max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma_1| \leq 2|\sigma|$ 时, 由于

$$\min\{\langle \lambda_1 \rangle^{\frac{1}{2j}}, \langle \lambda_2 \rangle^{\frac{1}{2j}}\} \geq \min\{|\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}}, |\xi_2|^{1+\frac{1}{2j}}\},$$

运用(17)式和 $1 - s_0 + (2j + 1)b' \leq 0$, 可以得出

$$\begin{aligned} K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) &\leq C \frac{|\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}-s_0} |\xi|^{j+1} \langle \lambda \rangle^{\frac{1}{2j}} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\prod_{k=1}^2 \langle \lambda_k \rangle^{\frac{1}{2j}} \langle \sigma_k \rangle^b} \leq C \frac{|\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}-s_0} |\xi|^{j+1} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\min\{\langle \lambda_1 \rangle^{\frac{1}{2j}}, \langle \lambda_2 \rangle^{\frac{1}{2j}}\} \prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} \leq \\ &C \frac{|\xi_1|^{-s_0} |\xi|^{j+1} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} \leq C \frac{|\xi_1|^{-s_0+b'} |\xi|^{j+1+2jb'}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} \leq \\ &C \frac{|\xi_1|^{1-s_0+(2j+1)b'} |\xi|^j}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} \leq C \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b}. \end{aligned}$$

(ii) 当 $|\sigma_1| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} \geq 2|\sigma|$ 时, 显然 $|\sigma_1| \leq C \min\{\langle \lambda_1 \rangle, \langle \lambda_2 \rangle\}$. 从(17)式中可以得出 $|\sigma_1| \geq C |\xi_1| |\xi|^{2j}$, 因此

$$\begin{aligned} K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) &\leq C \frac{|\xi|^{j+1} |\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}-s_0} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\min\{\langle \lambda_1 \rangle^{\frac{1}{2j}}, \langle \lambda_2 \rangle^{\frac{1}{2j}}\} \prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} \leq C \frac{|\xi|^{j+1} |\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}-s_0} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\langle \sigma_1 \rangle^{b+\frac{1}{2j}} \langle \sigma_2 \rangle^b} \leq \\ &C \frac{|\xi|^{j(1-2b)} |\xi_1|^{1-s_0-b} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\langle \sigma_2 \rangle^b}. \end{aligned}$$

当 $1 - s_0 - b \geq 0$ 时, 因为 $j + 1 - s_0 - (2j + 1)b \leq \frac{2j - 1}{4}$, 那么

$$K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi|^{j+1-s_0-(2j+1)b} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\langle \sigma_2 \rangle^b} \leq C \frac{|\xi_2|^{\frac{2j-1}{4}} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\langle \sigma_2 \rangle^b}.$$

当 $1 - s_0 - b < 0$ 时, 因为 $j(1 - 2b) \leq \frac{2j - 1}{4}$, 那么

$$K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi|^{j(1-2b)} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\langle \sigma_2 \rangle^b} \leq C \frac{|\xi_2|^{\frac{2j-1}{4}} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\langle \sigma_2 \rangle^b}.$$

因此, 通过运用 Plancherel 恒等式, Hölder 不等式, $b' < -\frac{b}{2}$ 和(9) ~ (11) 式, 得出

$$\begin{aligned} J_3 &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi = \xi_1 + \xi_2 \\ \tau = \tau_1 + \tau_2}} K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) F \prod_{k=1}^2 F_k d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi = \xi_1 + \xi_2 \\ \tau = \tau_1 + \tau_2}} \frac{|\xi_2|^{\frac{2j-1}{4}} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\langle \sigma_2 \rangle^b} F \prod_{k=1}^2 F_k d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq \\ &C \|\mathcal{F}^{-1}(F_1) D_x^{\frac{2j-1}{4}} \mathcal{F}^{-1}(f_2)\|_{X_{0,b'}} \|F\|_{L_x^2} \leq C \|\mathcal{F}^{-1}(F_1) D_x^{\frac{2j-1}{4}} \mathcal{F}^{-1}(f_2)\|_{L_t^{4/3} L_x^2} \|F\|_{L_x^2} \leq \\ &C \|\mathcal{F}^{-1} F_1\|_{L_x^2} \|D_x^{\frac{2j-1}{4}} f_2\|_{L_t^4 L_x^\infty} \|F\|_{L_x^2} \leq C \|F\|_{L_x^2} \prod_{k=1}^2 \|F_k\|_{L_x^2}. \end{aligned} \tag{24}$$

当 $|\sigma_2| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}$ 时, 因为 $\langle \sigma \rangle^{b'} \langle \sigma_2 \rangle^{-b} \leq \langle \sigma \rangle^{-b} \langle \sigma_2 \rangle^{b'}$, 运用

$$\min\{\langle \lambda_1 \rangle^{\frac{1}{2j}}, \langle \lambda_2 \rangle^{\frac{1}{2j}}\} \geq \min\{|\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}}, |\xi_2|^{1+\frac{1}{2j}}\},$$

$$\text{可以得出 } K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi|^{j+1} |\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}-s_0} \langle \sigma_2 \rangle^{b'}}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b \min\{\langle \lambda_1 \rangle^{\frac{1}{2j}}, \langle \lambda_2 \rangle^{\frac{1}{2j}}\}} \leq C \frac{|\xi|^{j+1+2jb'} |\xi_1|^{-s_0+b'} \langle \sigma_2 \rangle^{b'}}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b}.$$

如果 $-s_0 + b' \leq 0$, 因为 $1 + 2jb' \leq 0$, 那么 $K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi|^j}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b} \leq C \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b}$.

如果 $-s_0 + b' \geq 0$, 因为 $1 - s_0 + (2j + 1)b' \leq j$, 那么

$$K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi|^{1-s_0+(2j+1)b'}}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b} \leq C \frac{|\xi|^j}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b} \leq C \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^b}.$$

这种情况可以用类似于 Ω_2 中 $|\sigma_2| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}$ 的情况证明.

(IV) 子区域 Ω_4 . 在这个子区间中, $|\xi_1| \sim |\xi_2|$, 并且很容易得到

$$|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}| \geq C |\xi| |\xi_1|^{2j-1}, |\xi_2^{2j} - \xi_1^{2j}| \geq C |\xi_1|^{2j}, |\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}| \geq C |\xi_2|^{2j}.$$

这些可以在文献 [11] 中得出.

(i) 当 $|\sigma| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}$ 时, 通过 $|\xi_1| \sim |\xi_2|$, 可以得到

$$K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi|^{j+1-\frac{1}{2j}} |\xi_1|^{\frac{1}{2j}-2(s_0-1)} \langle \sigma \rangle^{b'} \langle \lambda \rangle^{\frac{1}{2j}}}{|\xi_1|^{2+\frac{1}{j}} \prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} \leq C \frac{|\xi|^{j+1-\frac{1}{2j}} |\xi_1|^{-2s_0} \langle \sigma \rangle^{b'} \langle \lambda \rangle^{\frac{1}{2j}} \langle \xi \rangle^{s_0-1}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b}.$$

注意到 $|\lambda| = |\tau| + |\xi|^{2j+1} \leq |\tau| + (-1)^j \xi^{2j+1} + 2\xi^{2j+1} = |\sigma| + 2|\xi|^{2j+1} \leq |\sigma| + C\langle \xi \rangle^{2j+1} \chi_{|\xi| \geq 1}$. 从 (17) 式中可以得到

$$\begin{aligned} K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) &\leq C \frac{|\xi|^{j+1-\frac{1}{2j}} |\xi_1|^{-2s_0} \langle \sigma \rangle^{b'+\frac{1}{2j}} \langle \xi \rangle^{s_0-1}}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b} + C \frac{|\xi|^{j+s_0-\frac{1}{2j}} |\xi_1|^{-2s_0} \langle \xi \rangle^{1+\frac{1}{2j}} \langle \sigma \rangle^{b'} \chi_{|\xi| \geq 1}}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b} \leq \\ &C \frac{|\xi|^{j+1+b'} |\xi_1|^{1+2jb'-2s_0} \langle \xi \rangle^{s_0-1}}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b} + C \frac{|\xi|^{1+j+s_0+b'} |\xi_1|^{-2s_0+2jb'} \chi_{|\xi| \geq 1}}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b} \leq \\ &C \frac{|\xi|^{\frac{1}{2}+b'} |\xi_1|^{\frac{3}{2}+2jb'-2s_0} \langle \xi \rangle^{s_0-1} |\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{1/2}}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b} + C \frac{|\xi|^{s_0+\frac{1}{2}+b'} |\xi_1|^{\frac{1}{2}-2s_0+2jb'} |\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{1/2} \chi_{|\xi| \geq 1}}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b} \leq \\ &C \frac{\langle \xi \rangle^{s_0-\frac{1}{2}+b'} |\xi_1|^{\frac{3}{2}+2jb'-2s_0} |\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{1/2}}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b} + C \frac{|\xi|^{s_0+\frac{1}{2}+b'} |\xi_1|^{\frac{1}{2}-2s_0+2jb'} |\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{1/2} \chi_{|\xi| \geq 1}}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b}. \end{aligned}$$

由 $s_0 + \frac{1}{2} + b' \geq 0$, $s_0 - \frac{1}{2} + b' \leq 0$, $\frac{3}{2} + 2jb' - 2s_0 \leq 0$ 和 $1 + (2j + 1)b' - s_0 \leq 0$, 可以得到

$$K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{1/2}}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b} + C \frac{|\xi_1|^{1+(2j+1)b'-s_0} |\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{1/2}}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b} \leq C \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{1/2}}{\langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b}.$$

这个情况可以用类似于 $|\sigma_1| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}$ 的情况证明.

(ii) 当 $|\sigma_1| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}$ 时, 那么 $|\sigma_1| \geq |\xi| |\xi_2|^{2j}$, $\langle \sigma \rangle^{b'} \langle \sigma_1 \rangle^{-b} \leq \langle \sigma \rangle^{-b} \langle \sigma_1 \rangle^{b'}$, $\lambda \leq \langle \sigma \rangle + C\langle \xi \rangle^{2j+1} \chi_{|\xi| \geq 1} \leq \langle \sigma_1 \rangle + C\langle \xi \rangle^{2j+1} \chi_{|\xi| \geq 1}$.

由于 $\langle \lambda_k \rangle^{\frac{1}{2j}} \geq C |\xi_k|^{1+\frac{1}{2j}}$ ($k = 1, 2$), 通过运用 (17) 式, 得出

$$\begin{aligned} K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) &\leq C \frac{|\xi|^{1-\frac{1}{2j}} |\xi_1|^{j-2s_0} \langle \xi \rangle^{s_0-1} \langle \sigma \rangle^{b'} \langle \sigma_1 \rangle^{\frac{1}{2j}}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} + C \frac{|\xi_1|^{j-2s_0} \langle \xi \rangle^{s_0+1} \langle \sigma \rangle^{b'} \chi_{|\xi| \geq 1}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} \leq \\ &C \frac{|\xi|^{1-\frac{1}{2j}} |\xi_1|^{j-2s_0} \langle \xi \rangle^{s_0-1} \langle \sigma_1 \rangle^{b'+\frac{1}{2j}}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^b} + C \frac{|\xi_1|^{j-2s_0} \langle \xi \rangle^{s_0+1} \langle \sigma_1 \rangle^{b'} \chi_{|\xi| \geq 1}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^b} \leq \\ &C \frac{|\xi|^{1+b'} |\xi_1|^{j+1+2jb'-2s_0} \langle \xi \rangle^{s_0-1}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^b} + C \frac{|\xi_1|^{j-2s_0+2jb'} |\xi|^{s_0+1+b'} \chi_{|\xi| \geq 1}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^b} \leq \\ &C \frac{|\xi_1|^{j+1+2jb'-2s_0} \langle \xi \rangle^{s_0+b'}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^b} + C \frac{|\xi_1|^{j-2s_0+2jb'} |\xi|^{s_0+1+b'} \chi_{|\xi| \geq 1}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^b} \leq \\ &C \frac{|\xi_1|^{1+2jb'-2s_0} \langle \xi \rangle^{s_0+b'} |\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{1/2}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^b} + C \frac{|\xi_1|^{-2s_0+2jb'} |\xi|^{s_0+1+b'} |\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{1/2} \chi_{|\xi| \geq 1}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^b}. \end{aligned}$$

当 $-1 \leq s_0 + b' \leq 0$ 时, 由于 $1 + 2jb' - 2s_0 \leq 0$, $1 - s_0 + (2j + 1)b' \leq 0$, 得出

$$K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b} + C \frac{|\xi_1|^{1-s_0+(2j+1)b'} \chi_{|\xi| \geq 1}}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b} \leq C \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b}.$$

当 $s_0 + b' + 1 < 0$ 时, 由于 $1 + 2jb' - 2s_0 \leq 0$, 可以得出 $K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi_1^{2j} - \xi_2^{2j}|^{\frac{1}{2}}}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b}$.

这个情况可以用类似于 Ω_2 中 $|\sigma_2| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}$ 的情况证明.

(iii) 当 $\max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma_2|$ 时, 整个情况可以用类似于 $\max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\} = |\sigma_1|$ 的情况证明.

(V) 子区域 Ω_5 . 在这个子区间中, $|\xi| \sim |\xi_1| \sim |\xi_2|$, $\min\{\langle \lambda_1 \rangle^{\frac{1}{2j}}, \langle \lambda_2 \rangle^{\frac{1}{2j}}\} \geq C |\xi_1|^{1+\frac{1}{2j}}$, 因此, 得出

$$K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi|^{j+1-\frac{1}{2j}} \langle \xi \rangle^{s_0-1} \prod_{k=1}^2 |\xi_k|^{\frac{1}{2j}} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\min\{|\lambda_1|^{\frac{1}{2j}}, |\lambda_2|^{\frac{1}{2j}}\} \prod_{k=1}^2 \langle \xi_k \rangle^{s_0-1} \langle \sigma_k \rangle^b} \leq C \frac{|\xi|^{j+1-s_0} \langle \sigma \rangle^{b'}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b}.$$

(i) 当 $|\sigma| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}$ 时, 通过运用 (17) 式, 可以得出

$$K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi|^{j+1-s_0+(2j+1)b'}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} \leq C \frac{\prod_{k=1}^2 |\xi_k|^{\frac{2j-1}{8}}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b}.$$

通过运用 Plancherel 恒等式, Hölder 不等式, $\frac{3}{4}b < b$ 和(12)式, 可以得出

$$\begin{aligned} J_5 &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) F \prod_{k=1}^2 F_k d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{\prod_{k=1}^2 |\xi_k|^{\frac{2j-1}{8}}}{\prod_{k=1}^2 \langle \sigma_k \rangle^b} d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq \\ &C \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}^{-1} F \prod_{k=1}^2 D_x^{\frac{2j-1}{8}} f_k dx dt \leq C \| \mathcal{F}^{-1} F \|_{L_{xt}^2} \prod_{k=1}^2 \| D_x^{\frac{2j-1}{8}} f_k \|_{L_{xt}^4} \leq \\ &C \| F \|_{L_{\xi}^2} \prod_{k=1}^2 \| f_k \|_{X_{0, \frac{3}{4}b}} \leq C \| F \|_{L_{\xi}^2} \prod_{k=1}^2 \| F_k \|_{L_{\xi}^2}. \end{aligned}$$

(ii) 当 $|\sigma_1| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}$ 时, $\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_1 \rangle^{-b} \leq \langle \sigma_1 \rangle^b \langle \sigma \rangle^{-b}$. 通过运用(17)式, 可以得到

$$K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) \leq C \frac{|\xi|^{j+1-s_0} \langle \sigma_1 \rangle^{b'}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^b} \leq C \frac{|\xi|^{j+1-s_0+(2j+1)b'}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^b} \leq C \frac{|\xi|^{\frac{2j-1}{8}} |\xi_2|^{\frac{2j-1}{8}}}{\langle \sigma \rangle^b \langle \sigma_2 \rangle^b}.$$

运用 Plancherel 恒等式, Hölder 不等式, (12) 式和 $\frac{3}{4}b < b$, 可以得出

$$\begin{aligned} J_5 &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} K_2(\xi_1, \tau_1, \xi, \tau) F \prod_{k=1}^2 F_k d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\substack{\xi=\xi_1+\xi_2 \\ \tau=\tau_1+\tau_2}} \frac{|\xi|^{\frac{2j-1}{8}} |\xi_2|^{\frac{2j-1}{8}}}{\langle \sigma_2 \rangle^b \langle \sigma \rangle^b} F \prod_{k=1}^2 F_k d\xi_1 d\tau_1 d\xi d\tau \leq \\ &C \int_{\mathbb{R}^2} (\mathcal{F}^{-1} F_1) \left(D_x^{\frac{2j-1}{8}} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{F}{\langle \sigma \rangle^b} \right) \right) D_x^{\frac{2j-1}{8}} f_2 dx dt \leq C \| \mathcal{F}^{-1} F_1 \|_{L_{xt}^2} \| D_x^{\frac{2j-1}{8}} f_2 \|_{L_{xt}^4} \left\| D_x^{\frac{2j-1}{8}} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{F}{\langle \sigma \rangle^b} \right) \right\|_{L_{xt}^4} \leq \\ &C \| F_1 \|_{L_{\xi}^2} \| f_2 \|_{X_{0, \frac{3}{4}b}} \left\| \frac{F}{\langle \sigma \rangle^b} \right\|_{X_{0, \frac{3}{4}b}} \leq C \| F \|_{L_{\xi}^2} \prod_{k=1}^2 \| F_k \|_{L_{\xi}^2}. \end{aligned}$$

(iii) 当 $|\sigma_2| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}$ 时.

这种情况可以用类似于情形 $|\sigma_1| = \max\{|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|\}$ 的方法证明.

(VI) 子区域 Ω_6 . 在这个子区间中, 有 $|\xi| \sim |\xi_1| \sim |\xi_2|$.

这种情况可以用类似于子区间 Ω_5 的情况证明.

已经完成了引理 5 的证明.

引理 6 令 $s \geq s_0 = -\frac{j}{2} + \frac{3}{4} + (2j+1)\epsilon$, $b = \frac{1}{2} + \epsilon$, $j \geq 2$, $j \in \mathbb{N}$, $b' = -\frac{1}{2} + 2\epsilon$. 那么

$$\| \partial_x^{-1} \prod_{k=1}^2 (u_{kx}) \|_{X_{s, \frac{1}{2j}, b'}} \leq C \prod_{k=1}^2 \| u_k \|_{X_{s, \frac{1}{2j}, b}}. \tag{25}$$

引理 6 可以用类似于引理 5 的情况证明.

3 证明定理 1

证明 (1)、(2) 式在 $j \geq 1$, $j \in \mathbb{N}^+$ 时等价于下面的积分方程:

$$u(t) = W(t)u_0 + \int_0^t W(t-\tau) [\partial_x^{j+1}(u^2) + \partial_x^{j-1}(u_x^2)] d\tau. \tag{26}$$

定义

$$\Phi(u) = \Psi(t)W(t)u_0 + \Psi_\delta(t) \int_0^t W(t-\tau) [\partial_x^{j+1}(u^2) + \partial_x^{j-1}(u_x^2)] d\tau. \tag{27}$$

在这里, 可以运用引理 3、5、6 和不动点定理来构建局部解. 对于细节, 建议读者参考文献[8]中的定理 2.6.

4 证明定理 2

证明 受文献[8,10]启发, 由 $\mathcal{F}_x \phi_N(\xi) := N^{(2j+)(\frac{1}{2}-\frac{1}{2j})} \chi_1(\xi) + N^{\frac{2j+}{2}-s} \chi_2(\xi)$ 定义了一系列的初始值, 这

里 $\chi_1(\xi) = \chi_{\frac{1}{2}N^{-2j-\epsilon} \leq \xi \leq N^{-2j-\epsilon}}(\xi), \chi_2(\xi) = \chi_{N \leq \xi \leq N+N^{-2j-\epsilon}}(\xi)$. 通过直接计算, 得出

$$\begin{aligned} \|\phi_N\|_{H^{(s, \frac{1}{2})}}^2 &= \int_{\mathbf{R}} \langle \xi \rangle^{2s+\frac{1}{2}} |\xi|^{-\frac{1}{2}} |\mathcal{F}_x \phi_N(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbf{R}} \langle \xi \rangle^{2s+\frac{1}{2}} |\xi|^{-\frac{1}{2}} N^{(2j+\epsilon)(1-\frac{1}{2})} \chi_{\frac{1}{2}N^{-2j-\epsilon} \leq \xi \leq N^{-2j-\epsilon}}(\xi) d\xi + \\ &\int_{\mathbf{R}} \langle \xi \rangle^{2s+\frac{1}{2}} |\xi|^{-\frac{1}{2}} N^{2j+\epsilon} \chi_{N \leq \xi \leq N+N^{-2j-\epsilon}}(\xi) d\xi \leq 4, \end{aligned}$$

因此, 得出 $\|\phi_N\|_{H^{(s, \frac{1}{2})}} \leq 2$. 通过文献[10]中的证明, 可以得出

$$\left\| \int_0^t W(t-\tau) [\partial_x^{j+1}(W(\tau)\phi_N)^2 + \partial_x^{j-1}(W(\tau)\phi_{N_x})^2] d\tau \right\|_{H^s} \geq C \|F(t)\|_{H^s}.$$

这里 $\mathcal{F}_x F(t) = \frac{N^{2j+\epsilon} \xi^{j+1} e^{i\theta(-1)^{j+1} \xi^{2j+1}}}{N^{s+(2j+\epsilon)w}} \int_{\mathbf{R}} [\chi_1(\xi_1)\chi_2(\xi-\xi_1) + \chi_2(\xi_1)\chi_1(\xi-\xi_1)] \frac{e^{i\theta r(\xi_1, \xi)} - 1}{r(\xi_1, \xi)} d\xi_1$ 且 $r(\xi_1, \xi) = (-1)^j [\xi_1^{2j+1} + \xi_2^{2j+1} - \xi^{2j+1}]$. 通过运用(17)式, 得出 $|r(\xi_1, \xi)| \leq CN^{-2j-\epsilon} N^{2j} \leq CN^{-\epsilon}$. 很容易检查出 $\left| \frac{e^{i\theta r(\xi_1, \xi)} - 1}{r(\xi_1, \xi)} \right| \geq |t| - C|t|^2 N^{-\epsilon}$.

因此, 对于 $t > 0$, 有

$$\|F(t)\|_{H^s} \geq CN^{j+1} N^s N^{-2j-\epsilon} N^{-\frac{2j+\epsilon}{2}} N^{2j+\epsilon} N^{s-(2j+\epsilon)w} = CN^{j+1-\frac{2j+\epsilon}{2}-(2j+\epsilon)w}. \tag{28}$$

在(28)式中, 如果 $j+1 - \frac{2j+\epsilon}{2} - (2j+\epsilon)w > 0$ 且令 $w < \frac{1-\frac{\epsilon}{2}}{2j+\epsilon}$, 可以得出 $N^{j+1-\frac{2j+\epsilon}{2}-(2j+\epsilon)w} \rightarrow +\infty$, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 可以得出 $w < \frac{1}{2j}$. 上面的计算意味着

$$\left\| \int_0^t W(t-\tau) [\partial_x^{j+1}(W(\tau)\phi_N)^2 + \partial_x^{j-1}(W(\tau)\phi_{N_x})^2] d\tau \right\|_{H^s} \rightarrow +\infty. \tag{29}$$

这相当于一个二阶导数在原点处随着 $N \rightarrow \infty$ 在 ϕ_N 方向是无界的. 然而 $\|\phi_N\|_{H^{(s, w)}} \leq 2$ 与流映射是 C^2 的相矛盾.

完成了定理 2 的证明.

致谢: 这篇论文是在我的导师闫威副教授的悉心指导下完成的, 在此表示深深的感谢!

参 考 文 献

[1] Kenig C E, Ponce G, Vega L. Higher-order nonlinear dispersive equations[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 122: 157-166.

[2] Wang H, Cui S. Well-posedness of the Cauchy problem of a water wave equation with low regularity initial data[J]. mathematical Computer Modelling, 2007, 45: 1118-1132.

[3] Pilod D. On the Cauchy problem for higher-order nonlinear dispersive equations[J]. J Diff Eqns, 2008, 245: 2055-2077.

[4] Kato T. Well-posedness for the fifth order KdV equation[J]. Funkcial Ekvac, 2012, 55: 17-53.

[5] Guo Z H, Kwak C, Kwon S. Rough solutions of the fifth-order KdV equations[J]. J Funct Anal, 2013, 265: 2791-2829.

[6] Kenig C E, Pilod D. Well-posedness for the fifth-order KdV equation in the energy space[J]. Tran Amer math Soc, 2015, 367: 2551-2612.

[7] Bourgain J. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, part II: The KdV equation[J]. Geom Funct Anal, 1993, 3: 209-262.

[8] Herr S. Well-posedness for equations of Benjamin-Ono type[J]. Illinois J Math, 2007, 51: 951-976.

[9] 王红军, 闫威. 高阶修正 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2014, 42(3): 1-4.

[10] Molinet L, Saut J C, Tzvetkov N. Ill-posedness issues for the Benjamin-Ono and related equations[J]. SIAM J Math Anal, 2001, 33: 982-988.

[11] Li Y, Yan W, Yang X. Well-posedness of a higher order modified Camassa-Holm equation in spaces of low regularity[J]. J Evol Eqns, 2010, 10: 465-486.

[12] Yan W, Li Y, Li S. Sharp well-posedness and ill-posedness of a higher-order modified Camassa-Holm equation[J]. Diff Int Eqns, 2012, 25: 1053-1074.

- [6] Liu Ling, Shen Bingliang. Radford's biproducts and Yetter-Drinfeld modules for monoidal Hom-Hopf algebras[J]. J Math Phys, 2014, 55: 031701.
- [7] Hartwig J T, Larsson D, Silvestrov S D. Deformations of Lie algebras using σ -derivations[J]. J Algebra, 2006, 295: 314-361.
- [8] Ma Tianshui, Li Haiying, Yang Tao. Cobraided smash product Hom-Hopf algebras[J]. Colloq Math, 2014, 134(1): 75-92.
- [9] Makhlof A, Panaite F. Hom-L-R-smash products, Hom-diagonal crossed products and the Drinfeld double of a Hom-Hopf algebra[J]. J Algebra, 2015, 441: 314-343.
- [10] Yau D. Hom-quantum groups I: Quasitriangular Hom-bialgebras[J]. J Phys A, 2012, 45(6): 065203.
- [11] Yau D. The Hom-Yang-Baxter equation and Hom-Lie algebras[J]. J Math Phys, 2011, 52: 053502.
- [12] Li Haiying, Ma Tianshui. A construction of Hom-Yetter-Drinfeld category[J]. Colloq Math, 2014, 137(1): 43-65.
- [13] Caenepeel S, Goyvaerts I. Monoidal Hom-Hopf algebras[J]. Comm Algebra, 2011, 39(6): 2216-2240.
- [14] Graziani G, Makhlof A, Menini C, et al. BiHom-associative algebras, BiHom-Lie algebras and BiHom-bialgebras[J]. SIGMA Symmetry Integrability Geom Methods Appl, 2015, 11: 086.
- [15] Radford D E. Hopf Algebras[M]. New Jersey: World Scientific, 2012.

Radford Biproduct Monoidal BiHom-Hopf Algebra

ZHENG Huihui¹, WANG Yongzhong², MA Tianshui¹

(1. School of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China;

2. School of Mathematics and Information Science, Xinxiang University, Xinxiang 453003, China)

Abstract: Firstly, we introduce the notions of a smash product monoidal BiHom-algebra $(B \# H, \alpha_B \otimes \alpha_H, \beta_B \otimes \beta_H)$ and a smash coproduct monoidal BiHom-coalgebra $(B \times H, \alpha_B \otimes \alpha_H, \beta_B \otimes \beta_H)$. Furthermore, we get sufficient and necessary conditions for $(B \# H, \alpha_B \otimes \alpha_H, \beta_B \otimes \beta_H)$ and $(B \times H, \alpha_B \otimes \alpha_H, \beta_B \otimes \beta_H)$ to be a monoidal BiHom-bialgebra.

Keywords: Radford biproduct; Monoidal BiHom-Hopf algebra; Hopf algebra

(上接第 23 页)

The Cauchy Problem for the Higher-Order Dispersive Equation

JIANG Minjie, LIU Limin

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: In this paper, we consider the Cauchy problem for the higher-order dispersive equation $u_t + \partial_x^{2j+1} u = \partial_x^{j+1} (u^2) + \partial_x^{-1} (u_x^2)$, $j \geq 2$, $j \in \mathbf{N}$, $x, t \in \mathbf{R}$. By using the modified Fourier restriction norm method and Strichartz estimate and the modified Bourgain space, we prove that the problem is locally well-posed in modified Sobolev space $H^{(s, \frac{1}{2j})}$ with $s > -\frac{j}{2} + \frac{3}{4}$. By using the iteration technique, we also prove that the flow map is not C^2 at the origin if we assume that the problem is well-posed in $H^{(s, w)}$ with $0 < w < \frac{1}{2j}$ for any $s \in \mathbf{R}$.

Keywords: Cauchy problem; local well-posedness; modified Sobolev spaces