

# 一类具多比例时滞广义细胞神经网络的全局指数稳定性

刘学婷, 周立群

(天津师范大学 数学科学学院, 天津 300387)

**摘要:**对一类具多比例时滞广义细胞神经网络的全局指数稳定性进行研究. 首先用 Brouwer 不动点定理证明了该系统平衡点的存在唯一性, 再通过建立时滞微分不等式, 获得了保证该系统平衡点全局指数稳定的时滞独立的充分条件. 最后, 给出了一个数值算例验证所得结果的正确性和有效性.

**关键词:**广义细胞神经网络; 全局指数稳定性; 比例时滞; Lyapunov 泛函; 时滞微分不等式

**中图分类号:** O175.1

**文献标志码:** A

Chua 和 Yang<sup>[1]</sup> 在 1988 年提出细胞神经网络, 基于细胞神经网络在模式识别、联想记忆、图像处理和最优化等领域有着广泛的作用, 并且在网络运行过程中, 由信息在传输和转移过程中不可避免的会产生时滞现象, 所以研究具时滞细胞神经网络的动态行为成了许多学者的研究热点之一<sup>[2-4]</sup>. 文献[2-3]对 S-分布时滞随机细胞神经网络和 BAM 神经网络的稳定性及同步性进行了研究. 文献[4]对一类具时滞细胞神经网络的全局一致稳定性进行了研究. 1996 年, 文献[5]提出了一类可提供单元(细胞)高阶动力学线性动态部分及与应用有关的任意静态非线性的细胞神经网络——广义细胞神经网络, 广义细胞神经网络将细胞神经网络中的线性求和及多变量非线性用非线性代替, 便于用硬件实现. 所以研究具时滞广义细胞神经网络的动力学性质对细胞神经网络的理论应用有重要的意义. 目前关于时滞广义细胞神经网络的研究已经取得许多成果<sup>[6-12]</sup>. 文献[6]利用度理论建立了一类广义时滞细胞神经网络的平衡点存在唯一及该系统全局指数稳定的充分条件, 文献[7-8]通过构造合适的 Lyapunov 泛函和一些不等式分析技巧, 分别得到了具常时滞和变时滞的广义细胞神经网络的指数稳定的充分条件, 文献[9]利用 Itô 公式, Hölder 不等式和 M-矩阵等得到了保证随机时滞反应扩散广义细胞神经网络的均方指数稳定的充分条件, 文献[10]通过构造合适的 Lyapunov 泛函和应用 Brouwer 不动点定理研究了高阶 S-分布时滞广义细胞神经网络的全局指数稳定性, 文献[11]应用 Lyapunov 泛函法和应用 Brouwer 不动点原理得到了保证高阶变时滞广义细胞神经网络的全局指数周期性的充分条件, 文献[12]通过构造 Lyapunov 泛函, 运用 Itô 公式和稳定性理论, 得到了保证不确定随机时滞反应扩散广义细胞神经网络的有限时间鲁棒稳定性的时滞依赖的充分条件.

比例时滞是一种无界的时变时滞. 在神经网络的实现过程中, 可根据网络的拓扑结构和材料的选取, 能确定网络的比例时滞因子  $q(0 < q < 1)$  的大小. 再根据网络所能够允许的最大时滞, 由时滞函数  $\tau(t) = (1 - q)t$  从而可以确定网络的最大的运行时间. 因此, 研究具比例时滞细胞神经网络具有更广阔的应用背景. 目前对具比例时滞细胞神经网络的研究已经有一些成果<sup>[13-16]</sup>. 文献[13]应用非线性测度理论及构造适合的 Lyapunov 泛函, 对一类具多比例延时的细胞神经网络的指数稳定性进行了研究, 文献[14]应用 Lyapunov 泛函法和 Brouwer 不动点定理, 得到了保证多比例时滞细胞神经网络的全局一致渐近稳定性的充分条件, 文献[15]在构造 Lyapunov 泛函的基础之上, 结合矩阵理论, 研究了一类具多比例时滞细胞神经网络的全局

收稿日期:2015-07-04; 修回日期:2016-06-15.

基金项目:国家自然科学基金(61374009)

第1作者简介:刘学婷(1990-), 女, 天津人, 天津师范大学硕士研究生, 研究方向为神经网络理论与应用, E-mail: 597072051@qq.com.

通信作者:周立群(1972-), 女, 吉林德惠人, 天津师范大学教授, 博士, 研究方向为神经网络理论及应用, E-mail: zhouliqun20000@163.com.

渐近稳定性,文献[16-17]应用 Lyapunov 泛函法及矩阵理论,得到了确保比例时滞细胞神经网络全局渐近稳定和指数稳定的充分条件,文献[18]通过应用 Brouwer 不动点定理及建立一拟 Halanay 不等式得到了确保具比例时滞杂交双向联想记忆神经网络的全局指数稳定的时滞独立的充分条件.目前,对具比例时滞广义细胞神经网络的动力学性质的研究还未见到,本文在文献[18]的启发下,对一类具多比例时滞广义细胞神经网络的全局指数稳定性进行研究.

## 1 模型描述与预备知识

本文考虑如下具多比例时滞广义细胞神经网络

$$\begin{cases} C_i \frac{dx_i(t)}{dt} = -\frac{1}{R_i} g_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(q_j t)) + I_i, \\ x_i(s) = x_{i0}, s \in [q, 1], \end{cases} \quad (1)$$

其中

$$g_i(x_i(t)) = \begin{cases} l(x_i(t) - 1) + 1, x_i(t) \geq 1, \\ x_i(t), |x_i(t)| < 1, \\ l(x_i(t) + 1) - 1, x_i(t) \leq -1, \end{cases} \quad (2)$$

$t \geq 1, i = 1, 2, \dots, n$ .  $x_i(t)$  是第  $i$  个神经元在  $t$  时刻的状态变量,  $C_i > 0$  和  $R_i > 0$  分别为第  $i$  个神经元的电容常数和电阻常数,  $a_{ij}$  和  $b_{ij}$  分别为神经元在时刻  $t$  与  $q_j t$  的连接权重,  $f_j(x_j(t))$  和  $f_j(x_j(q_j t))$  分别表示第  $j$  个神经元在  $t$  和  $q_j t$  时刻的输出函数,  $q_j$  为比例时滞因子, 满足  $0 < q_j \leq 1, q_j t = t - (1 - q_j)t$ , 其中  $(1 - q_j)t$  是比例时滞函数, 且当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $(1 - q_j)t \rightarrow +\infty$ .  $q = \min_{1 \leq j \leq n} \{q_j\}$ ,  $I_i$  为外部偏置输入,  $x_{i0}$  表示  $x_i(s)$  在  $s \in [q, 1]$  时的初值, 且为常数, 在本文的讨论中取  $C_i = 1$ .

假设  $f_j(\cdot)$  满足如下条件:

(H)  $f_j(\cdot)$  满足 Lipschitz 连续条件, 且有界, 即存在常数  $L_j > 0, A_j > 0$ , 使得

$$|f_j(u) - f_j(v)| \leq L_j |u - v|, |f_j(u)| \leq A_j < +\infty, \forall u, v \in \mathbf{R}.$$

令  $u_i(t) = x_i(e^t)$ , 则系统(1)可等价变换成如下具不等常时滞变系数广义细胞神经网络系统<sup>[17]</sup>

$$\begin{cases} \frac{du_i(t)}{dt} = e^t \left\{ -\frac{1}{R_i} g_i(u_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(u_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(u_j(t - \tau_j)) + I_i \right\}, \\ u_i(s) = \varphi_i(s), s \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$g_i(u_i(t)) = \begin{cases} l(u_i(t) - 1) + 1, u_i(t) \geq 1 \\ u_i(t), |u_i(t)| < 1 \\ l(u_i(t) + 1) - 1, u_i(t) \leq -1, \end{cases} \quad (4)$$

$$t \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \text{ 这里 } \tau_j = -\lg q_j \geq 0, \tau = \max_{1 \leq j \leq n} \{\tau_j\}.$$

注1 易证系统(1)与(3)有相同的平衡点, 故要证系统(1)的平衡点的稳定性, 只要讨论(3)的平衡点的稳定性即可.

## 2 主要结果

定理1 若假设(H)成立, 且满足

$$a_i > \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) L_j, \quad (5)$$

其中  $a_i = \min \left\{ \frac{1}{R_i}, \frac{l}{R_i} \right\}, i = 1, 2, \dots, n$ . 则系统(1)的平衡点存在且唯一.

证明 记系统(1)的平衡点为  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ , 且满足

$$g_i(x_i^*) = R_i \left[ \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) f_j(x_j^*) + I_i \right], \tag{6}$$

则由(2)式可得.

情形 1 当  $x_i(t) \geq 1$  时,系统(1)的平衡点应满足

$$0 = -\frac{1}{R_i} (l(x_i^* - 1) + 1) + \sum_{j=1}^n [a_{ij} f_j(x_j^*) + b_{ij} f_j(x_j^*)] + I_i,$$

由此可得

$$x_i^* = 1 + \frac{R_i}{l} \left[ \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) f_j(x_j^*) + I_i \right] - \frac{1}{l}. \tag{7}$$

由假设(H)可得

$$|x_i^*| \leq 1 + \frac{R_i}{l} \left[ \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) A_j \right] + \frac{1}{l} \leq r_1, \tag{8}$$

其中  $r_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ 1 + \frac{R_i}{l} \left[ \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) A_j \right] + \frac{1}{l} \right\}$ .

情形 2 当  $x_i(t) \leq -1$  时,系统(1)的平衡点应满足

$$0 = -\frac{1}{R_i} (l(x_i^* + 1) - 1) + \sum_{j=1}^n [a_{ij} f_j(x_j^*) + b_{ij} f_j(x_j^*)] + I_i,$$

由此可得

$$x_i^* = -1 + \frac{R_i}{l} \left[ \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) f_j(x_j^*) + I_i \right] + \frac{1}{l}. \tag{9}$$

由假设(H)可得

$$|x_i^*| \leq 1 + \frac{R_i}{l} \left[ \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) A_j \right] + \frac{1}{l} \leq r_1. \tag{10}$$

情形 3 当  $|x_i(t)| < 1$  时,系统(1)的平衡点应满足

$$0 = -\frac{1}{R_i} x_i^* + \sum_{j=1}^n [a_{ij} f_j(x_j^*) + b_{ij} f_j(x_j^*)] + I_i,$$

由此可得

$$x_i^* = R_i \left[ \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) f_j(x_j^*) + I_i \right]. \tag{11}$$

由假设(H)可得

$$|x_i^*| \leq R_i \left[ \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) A_j \right] \leq r_2, \tag{12}$$

其中  $r_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ R_i \left[ \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) A_j \right] \right\}$ .

取  $r = \max\{r_1, r_2\}$ , 根据(5)式定义映射

$$G_i(\theta) = R_i \left[ \sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij}) f_j(x_j) + I_i \right],$$

其中  $G(\theta) = (G_1(\theta), G_2(\theta), \dots, G_n(\theta))^T, \theta = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ , 从而有

$$\theta \in [-r, r]^n, G(\theta) \in [-r, r]^n,$$

由  $f_j(\cdot)$  的连续性, 可知映射  $G: [-r, r]^n \rightarrow [-r, r]^n$  是连续的, 根据 Brouwer 定理可知, 映射  $G$  至少存在一个不动点  $x^* \in [-r, r]^n$ , 且为系统(1)的平衡点.

下证平衡点唯一性. 假设系统(1)存在另外一个平衡点  $x^{**}$ , 且  $x_i^* \neq x_i^{**}, i = 1, 2, \dots, n$ . 则必存在  $x^*$  和  $x^{**}$  的某分量  $x_d^*$  和  $x_d^{**}$ , 使得  $x_d^* \neq x_d^{**}$ , 而其余分量相等. 由(11)式有

$$|x_d^* - x_d^{**}| \leq R_d \left[ \sum_{j=1}^n (|a_{dj}| + |b_{dj}|) (f_j(x_j^*) - f_j(x_j^{**})) \right] \leq$$

$$R_d \left[ \sum_{j=1}^n (|a_{dj}| + |b_{dj}|) L_j |x_j^* - x_j^{**}| \right] = R_d (|a_{dd}| + |b_{dd}|) L_d |x_d^* - x_d^{**}| < a_d^{-1} (|a_{dd}| + |b_{dd}|) L_d |x_d^* - x_d^{**}|,$$

所以  $|x_d^* - x_d^{**}| \leq 0$ , 即  $x_d^* = x_d^{**}$ , 矛盾.

同理由(7)式和(9)式有

$$|x_d^* - x_d^{**}| \leq \frac{R_d}{l} \left[ \sum_{j=1}^n (|a_{dj}| + |b_{dj}|) (f_j(x_j^*) - f_j(x_j^{**})) \right] < a_d^{-1} (|a_{dd}| + |b_{dd}|) L_d |x_d^* - x_d^{**}|,$$

所以  $|x_d^* - x_d^{**}| \leq 0$ , 即  $x_d^* = x_d^{**}$ , 矛盾.

综上所述, 系统(1)的平衡点  $x^*$  是唯一的.

设

$$K = \max_{1 \leq i \leq n} \{ \sup_{-1 \leq t \leq 0} |u_i(t) - u_i^*| \} > 0, \tag{13}$$

这里  $K$  是常数.

**定理 2** 若假设(H)与(5)式成立, 且存在常数  $\bar{K} > 0, \eta > 0$ , 使得当  $t \in [1, +\infty)$  时, 有下式成立

$$|x_i(t) - x_i^*| \leq \bar{K} t^{-\eta}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{14}$$

则系统(1)的平衡点  $x^*$  是全局指数稳定性的.

**证明** 由于系统(1)与(3)等价, 且有相同的平衡点, 结合定理1可知, 系统(3)的平衡点存在且唯一. 下面证明系统(1)的平衡点  $x^*$  的全局指数稳定性.

由假设(H), 对  $t > 0, i = 1, 2, \dots, n$ , 有

$$D^+ |u_i(t) - u_i^*| \leq e^t \left\{ -\frac{1}{R_i} |g_i(u_i(t)) - g_i(u_i^*)| + \sum_{j=1}^n |a_{ij}| L_j |u_j(t) - u_j^*| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |u_j(t - \tau_j) - u_j^*| \right\}, \tag{15}$$

这里  $D^+$  表示右上 Dini 导数.

当  $u_i(t) \geq 1, u_i(t) \leq -1$  时, 由(15)式可得

$$D^+ |u_i(t) - u_i^*| \leq e^t \left\{ -\frac{l}{R_i} |u_i(t) - u_i^*| + \sum_{j=1}^n |a_{ij}| L_j |u_j(t) - u_j^*| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |u_j(t - \tau_j) - u_j^*| \right\}. \tag{16}$$

当  $|u_i(t)| < 1$  时, 由(15)式可得

$$D^+ |u_i(t) - u_i^*| \leq e^t \left\{ -\frac{1}{R_i} |u_i(t) - u_i^*| + \sum_{j=1}^n |a_{ij}| L_j |u_j(t) - u_j^*| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |u_j(t - \tau_j) - u_j^*| \right\}. \tag{17}$$

由(16)与(17)式可得

$$D^+ |u_i(t) - u_i^*| \leq e^t \left\{ -a_i |u_i(t) - u_i^*| + \sum_{j=1}^n |a_{ij}| L_j |u_j(t) - u_j^*| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j |u_j(t - \tau_j) - u_j^*| \right\}. \tag{18}$$

定义函数  $\Phi_i(\cdot)$  如下

$$\Phi_i(u_i) = a_i - u_i - \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) L_j e^{u_i \tau_j}, \tag{19}$$

其中  $u_i \in [0, +\infty), i = 1, 2, \dots, n$ .

由(5)式可知

$$a_i - \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)L_j \geq \xi, \tag{20}$$

其中  $\xi = \min_{1 \leq i \leq n} \{a_i - \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)L_j\} > 0$ .

结合(19)和(20)式可知,  $\Phi_i(0) \geq \xi$ , 又因  $\Phi_i(u_i)$  为连续函数, 且  $\Phi_i(u_i) \rightarrow -\infty$  当  $u_i \rightarrow +\infty$ , 因此存在连续常数  $\bar{u}_i \in (0, +\infty)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 使得

$$\Phi_i(\bar{u}_i) = a_i - \bar{u}_i - \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)L_j e^{\bar{u}_i \tau_j} = 0$$

成立. 取  $0 < \eta < \min_{1 \leq i \leq n} \{\bar{u}_i\}$ , 有

$$\Phi_i(\eta) = a_i - \eta - \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|)L_j e^{\eta \tau_j} > 0. \tag{21}$$

定义函数  $U_i(\cdot)$  为

$$U_i(t) = e^{\eta t} |u_i(t) - u_i^*|, t \in [-\tau, +\infty). \tag{22}$$

根据(18)和(22)式, 对  $t > 0$ ,  $U_i(t)$  求导有

$$\begin{aligned} D^+ U_i(t) &= \eta e^{\eta t} |u_i(t) - u_i^*| + e^{\eta t} D^+ |u_i(t) - u_i^*| \leq \eta e^{\eta t} |u_i(t) - u_i^*| + e^t \left\{ -a_i e^{\eta t} |u_i(t) - u_i^*| + \sum_{j=1}^n |a_{ij}| L_j e^{\eta t} |u_j(t) - u_j^*| + \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j e^{\eta t} |u_j(t - \tau_j) - u_j^*| \right\} = \\ & \eta U_i(t) - a_i e^t U_i(t) + e^t \sum_{j=1}^n |a_{ij}| L_j U_j(t) + e^t \sum_{j=1}^n |b_{ij}| L_j U_j(t - \tau_j) e^{\eta \tau_j} \leq \\ & -(a_i e^t - \eta) U_i(t) + e^t \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) L_j e^{\eta \tau_j} \sup_{s \in [t-\tau, t]} U_j(s) \leq \\ & -(a_i - \eta) e^t U_i(t) + e^t \sum_{j=1}^n (|a_{ij}| + |b_{ij}|) L_j e^{\eta \tau_j} \sup_{s \in [t-\tau, t]} U_j(s). \end{aligned} \tag{23}$$

由(22)式及  $K$  定义可知

$$U_i(t) \leq K, t \in [-\tau, 0]. \tag{24}$$

现断言

$$U_i(t) \leq K, t \in (0, +\infty). \tag{25}$$

先证对于  $d > 1$ , 有

$$U_i(t) < dK \tag{26}$$

成立.

假设(24)不成立, 则存在  $U_i(\cdot)$  的某个分量  $U_k(\cdot)$  和  $t_1 > 0$ , 使得

$$U_k(t) < dK, t \in [-\tau, t_1], U_k(t_1) = dK, \dot{U}_k(t) \geq 0, t \in [-\tau, t_1]. \tag{27}$$

而

$$U_i(t) < dK, i \neq k. \tag{28}$$

将(27)和(28)式代入(23)式可得

$$0 \leq D^+ U_k(t_1) \leq - \left[ (a_k - \eta) - \sum_{j=1}^n (|a_{kj}| + |b_{kj}|) L_j e^{\eta \tau_j} \right] dK e^{t_1} < 0.$$

由此可以得出  $0 \leq D^+ U_k(t_1) < 0$  矛盾, 从而可知(25)式成立. 将(22)式代入(25)式, 可得

$$|u_i(t) - u_i^*| \leq K e^{-\eta t}, t \geq 0, i = 1, 2, \dots, n. \tag{29}$$

系统(1)与系统(3)有相同的平衡点,  $x^* = u^*$ , 即  $x_i^* = u_i^*, i = 1, 2, \dots, n$ , 将变换  $u_i(t) = x_i(e^t)$  及(13)式带入(29)式, 则有

$$|x_i(e^t) - x_i^*| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |x_i(e^s) - x_i^*| \right\} e^{-\eta t}, t \geq 0. \tag{30}$$

令  $e^t = \lambda, t \geq 0$ , 则  $t = \lg \lambda, \lambda \geq 1$ . 令  $e^s = \zeta, s \in [-\tau, 0]$ , 则  $s = \lg \zeta, \zeta \in [q, 1]$ , 其中  $q = \min_{1 \leq j \leq n} \{q_j\}$ .

由(30)式有

$$|x_i(\lambda) - x_i^*| \leq \max\{\sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{q \leq \zeta \leq 1} |x_i(\zeta) - x_i^*|\} e^{-\eta \lg \lambda}, \lambda \geq 1. \tag{31}$$

再令  $\lambda = t$ , 则有

$$|x_i(t) - x_i^*| \leq \bar{K} e^{-\eta \lg t} \leq \bar{K} t^{-\eta}, t \geq 1, i = 1, 2, \dots, n,$$

其中  $\bar{K} = \max\{\sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{q \leq \zeta \leq 1} |x_i(\zeta) - x_i^*|\}$ . 因此系统(1)的平衡点  $x^*$  是全局指数稳定的.

### 3 数值算例

例1 考虑如下具多比例时滞广义细胞神经网络模型

$$\begin{cases} C_1 \frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1} g_1(x_1(t)) + \sum_{j=1}^2 a_{1j} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^2 b_{1j} f_j(x_j(q_j t)) + I_1, \\ C_2 \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{R_2} g_2(x_2(t)) + \sum_{j=1}^2 a_{2j} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^2 b_{2j} f_j(x_j(q_j t)) + I_2, \end{cases} \tag{32}$$

$$\text{其中 } g_i(x_i(t)) = \begin{cases} 3(x_i(t) - 1) + 1, x_i(t) \geq 1, \\ x_i(t), |x_i(t)| < 1, 0 < q_j \leq 1, i = 1, 2, j = 1, 2, t \geq 1, \\ 3(x_i(t) + 1) - 1, x_i(t) \leq -1. \end{cases}$$

取  $C_1 = 1, C_2 = 1, R = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 \\ 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 输出函数  $f_j(x_j(t)) = \sin(x_j(t)), j = 1, 2$ , 则 Lipschitz 常数  $L_j = 1, j = 1, 2, l = 3, a_i = \min\{\frac{1}{R_i}, \frac{l}{R_i}\}, i = 1, 2$ . 经计算可得

$$a_1 - \sum_{j=1}^2 (|a_{1j}| + |b_{1j}|) L_j = 5 - (0.1 + 0.4 + 0.5 + 0.4) = 3.6 > 0,$$

$$a_2 - \sum_{j=1}^2 (|a_{2j}| + |b_{2j}|) L_j = 10 - (0.3 + 0.6 + 0.2 + 0.3) = 8.6 > 0.$$

满足定理2中的条件, 因此(32)式有唯一全局指数稳定的平衡点. 用 MATLAB 计算平衡点为  $(0.5625, 0.1558)^T$ . 全局指数稳定性见图1, 取不同初始值  $(1.5, 1.3)^T, (-1.5, -1.3)^T$  的时间响应曲线见图2.

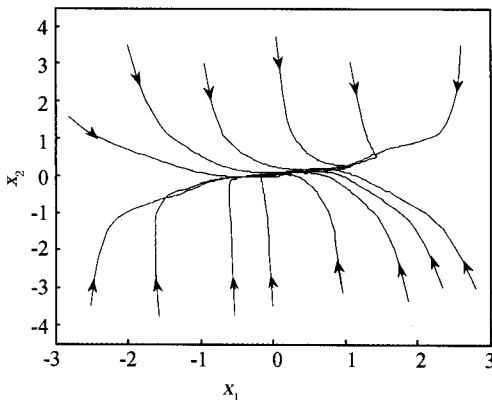


图1 系统(32)的全局渐近稳定性

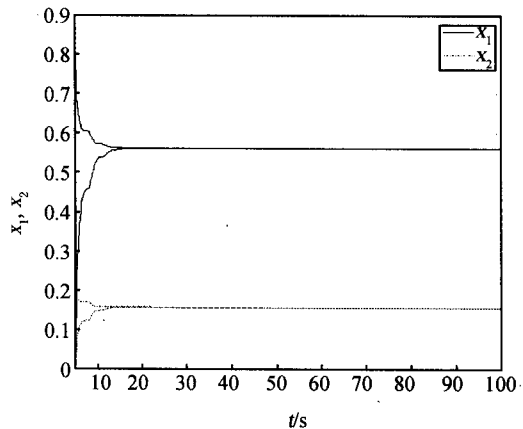


图2 系统(32)的解在不同初始值的时间响应曲线

例2 考虑如下具多比例时滞广义细胞神经网络模型(除时滞项外, 模型中的其他系数与文献[12]均相同),

$$\begin{cases} C_1 \frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1} g_1(x_1(t)) + \sum_{j=1}^2 a_{1j} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^2 b_{1j} f_j(x_j(q_j t)) + I_1, \\ C_2 \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{R_2} g_2(x_2(t)) + \sum_{j=1}^2 a_{2j} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^2 b_{2j} f_j(x_j(q_j t)) + I_2, \end{cases} \tag{33}$$

$$\text{其中 } g_i(x_i(t)) = \begin{cases} 2(x_i(t) - 1) + 1, & x_i(t) \geq 1, \\ x_i(t), & |x_i(t)| < 1, 0 < q_j \leq 1, i = 1, 2, j = 1, 2, t \geq 1, \\ 2(x_i(t) + 1) - 1, & x_i(t) \leq -1. \end{cases}$$

取  $C_1 = 1, C_2 = 1, R = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.2 \\ -0.3 & 0.2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.3 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 输出函数  $f_j(x_j(t)) = \sin(x_j(t)), j = 1, 2$ , 则 Lipschitz 常数为  $L_j = 1, j = 1, 2, l = 2, a_i = \min\{\frac{1}{R_i}, \frac{l}{R_i}\}, i = 1, 2$ . 经计算可得

$$a_1 - \sum_{j=1}^2 (|a_{1j}| + |b_{1j}|) L_j = 10 - (0.5 + 0.4 + 0.2 + 0.3) = 8.6 > 0,$$

$$a_2 - \sum_{j=1}^2 (|a_{2j}| + |b_{2j}|) L_j = 10 - (0.3 + 0.2 + 0.2 + 0.3) = 9 > 0.$$

满足定理 2 中的条件, 因此 (33) 式有唯一全局指数稳定的平衡点. 用 MATLAB 计算平衡点为  $(0.6634, 0.1247)^T$ . 全局指数稳定性见图 3, 取不同初始值  $(1.6, 1.2)^T, (-1.4, -1.2)^T$  的时间响应曲线见图 4.

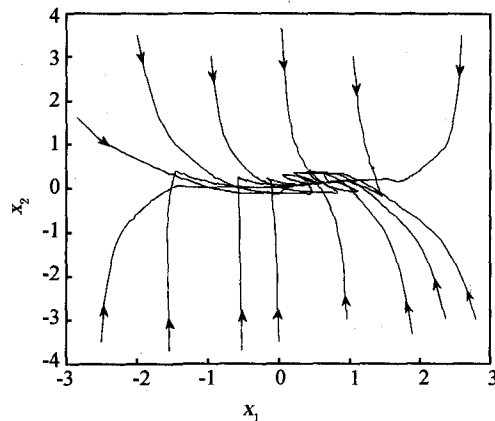


图3 系统(33)的全局渐近稳定性

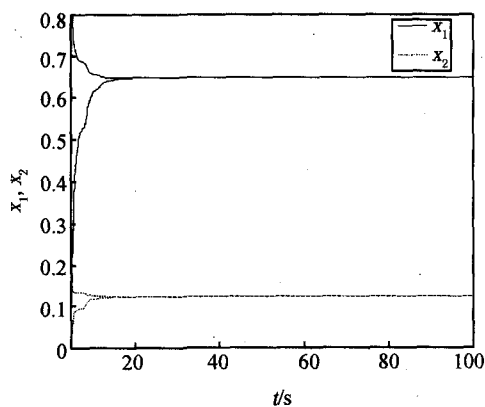


图4 系统(33)的解在不同初始值的时间响应曲线

**注 2** 通过简单的计算和 MATLAB 的仿真图 3 和图 4 可以知道, 本文中的定理 2 同样可以验证文献 [12] 中例子的稳定性, 本文的结果适用范围更广. 文献 [12] 的结论是通过 LMI 方法得到的, 推导过程比较复杂, 而本文的方法简单易懂, 且通过算例也容易验证.

参 考 文 献

[1] Chua O, Yang L. Cellular neural network: theory and applications[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1988, 35(10): 1257-1290.

- [2] 张伟伟,王林山. S-分布时滞随机区间细胞神经网络的全局指数鲁棒稳定性[J]. 山东大学学报(理学版), 2012, 47(3): 87-92.
- [3] 马奎林,王林山. S-分布时滞随机 BAM 神经网络的指数同步性[J]. 山东大学学报(理学版), 2014, 49(3): 73-78.
- [4] 常青,周立群. 一类具时滞细胞神经网络的全局一致渐近稳定性[J]. 山东大学学报(理学版), 2012, 47(8): 42-49.
- [5] Espejo S, Carmona R, Castro R D, et al. A VLSI-oriented continuous-time CNN model[J]. International Journal of Circuit Theory and Applications, 1996, 24(3): 341-356.
- [6] 沈 轶,廖晓昕. 广义的细胞神经网络的动态分析[J]. 电子学报, 1999, 27(10): 62-64.
- [7] 文 武. 具有时滞的广义细胞神经网络的稳定性分析[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2004, 27(4): 364-367.
- [8] 周 伦. 变时滞广义神经网络的指数稳定性[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(8): 1094-1096.
- [9] 周凤燕. 随机时滞反应扩散广义细胞神经网络的均值指数稳定性[J]. 数学的实践与认识, 2012, 42(3): 168-179.
- [10] 马成荣. 高阶 S-分布时滞广义细胞神经网络全局指数稳定性[J]. 生物数学学报, 2011, 26(3): 459-468.
- [11] 周立群,翁良燕. 高阶变时滞广义细胞神经网络的全局指数周期性[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(14): 271-279.
- [12] 罗 兰,刘正龙. 不确定随机时滞反应扩散广义细胞神经网络的有限时间鲁棒稳定性[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2014, 37(2): 208-215.
- [13] 张迎迎,周立群. 一类具多比例延时的细胞神经网络的指数稳定性[J]. 电子学报, 2012, 40(6): 1159-1163.
- [14] 周立群. 多比例时滞细胞神经网络的全局一致渐进稳定性[J]. 电子科技大学学报, 2013, 42(4): 625-629.
- [15] 周立群,刘纪茹. 一类具比例时滞细胞神经网络的全局渐近稳定性[J]. 工程数学学报, 2013, 30(5): 673-682.
- [16] ZHOU Liqun. Global asymptotic stability of cellular neural networks with proportional delays[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 77(1): 41-47.
- [17] ZHOU Liqun. Delay-Dependent exponential stability of cellular neural networks with multi-proportional delays[J]. Neural Processing Letters, 2013, 38(3): 347-359.
- [18] 周立群. 具比例时滞杂交双向联想记忆神经网络的全局指数稳定性[J]. 电子学报, 2014, 42(1): 96-101.

## Global Exponential Stability for a Class of Generalized Cellular Neural Networks with Multi-proportional Delays

LIU Xueting, ZHOU Liqun

(School of Mathematic Science, Tianjin Normal University, Tianjin 300387, China)

**Abstract:** A class of generalized cellular neural networks with multi-proportional delays is studied. At first, the existence and uniqueness of equilibrium of the system are certified by the Brouwer fixed point theorem. Then by establishing a delayed differential inequality, a delay-independent sufficient condition is obtained for guaranteeing the global exponential stability of equilibrium of the system. Finally, we used an example and its simulation to demonstrate the correctness and effectiveness of the results.

**Keywords:** generalized cellular neural networks; global exponential stability; proportional delay; Lyapunov functional; delayed differential inequality