

文章编号:1000-2367(2021)04-0001-09

DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2021.04.001

污染环境中具有尺度结构非线性害鼠模型的最优不育控制

王战平, 龚薇

(宁夏大学 数学统计学院, 银川 750021)

摘要:研究了污染环境中依赖个体尺度和迁移项非线性害鼠模型的最优不育控制. 首先, 考虑模型的可分离形式解, 确立了状态系统模型非负解的存在唯一性, 其次利用极值化方法和紧性原理证明最优不育策略的存在性, 接着利用共轭系统技巧导出最优不育控制策略的必要性条件, 最后利用 MATLAB 进行数值模拟, 验证了理论成果的有效性.

关键词:污染环境; 尺度结构; 不育控制; 非线性害鼠模型

中图分类号: O231.2; O175.2

文献标志码: A

随着科学技术的发展, 许多新技术被研发出来运用到工农业生产活动, 与此同时, 大量有毒有害物质排放到大气中, 严重影响了环境质量. 环境污染对人类、动物、植物和微生物造成了极大的危害. 因此, 需要建立模型去解决污染环境中的问题^[1-4].

在我国, 每年有大片的草原面积发生鼠害, 给畜牧业造成巨大损失, 所以对害鼠进行人为干预就非常有必要. 我们知道, 在害鼠数量较多的地区, 常常使用杀虫剂来毒杀害鼠种群, 但事实上, 这种做法只能暂时降低害鼠的数量, 在较短的时间内害鼠种群又会恢复到原来的水平, 并且使用杀虫剂来毒杀害鼠时, 不仅会造成环境污染, 而且大量非目标野生动物(尤其是鹰类种群)的数量会急剧下降. 由于这些野生动物以害鼠的尸体为食, 从而导致二次中毒^[5]. 因此, 对害鼠无污染无公害的有效防治已成为研究重点之一, 研究表明相对于传统的增加物种死亡率而言, 降低物种的繁殖率被认为是一种非常有效的方法, 于是人们开始考虑利用不育技术防治害鼠. 不育控制就是借助某种技术或方法使雄性或(和)雌性绝育, 或阻碍胚胎着床发育, 甚至阻断幼体生长发育以降低生育率, 从而控制种群数量的增长. 文献[6]建立了免疫不育控制下的具有性别结构的单种群模型, 讨论了系统平衡点的局部稳定性. 文献[7]建立了具有竞争性繁殖干扰的不育控制. 以上模型是将生活在同一区域的同一类害鼠视为一个整体, 通过建立常微分不育控制模型, 分析模型平衡态的稳定性, 研究结果为鼠害的防治提供一定的理论依据.

生物种群是由个体组成的, 而个体之间存在着诸如年龄、尺度、基因、性别等结构差异, 为了更准确地刻画种群的演化, 学者们首先研究了具有年龄结构的种群模型, 并取得大量的研究成果^[8-12]. 然而, 生物学家发现个体尺度比年龄结构更能逼真地模拟生物种群的演化过程, 所谓个体尺度, 是指用来描述种群个体的一些特征数量指标. 文献[13-14]建立并分析了周期环境和模拟周期环境尺度结构种群系统的最优收获率. 文献[15]研究了一类周期环境中具有尺度结构的线性害鼠模型的适定性及最优不育控制问题. 文献[16]研究了一类基于个体尺度的种群模型的适定性及最优不育控制策略.

由于害鼠的生存环境和食物的有限性会导致害鼠个体间产生相互竞争, 从而产生额外的死亡及害鼠种群的迁移. 同时, 种群的生命参数不仅会受到环境的影响还会受到种群个体总量的影响. 所以, 在建模时考虑

收稿日期: 2020-04-15; **修回日期:** 2020-06-07.

基金项目: 宁夏自然科学基金(2020AAC03058); 宁夏高等学校科学研究项目(NGY2020010); 宁夏重点研发计划项目(2020BEG03021); 国家自然科学基金(11461053).

作者简介: 王战平(1977-), 男, 宁夏银川人, 宁夏大学教授, 博士, 研究方向为控制理论及其应用, E-mail: wang_zp@nxu.edu.cn.

通信作者: 龚薇, E-mail: g_ww1103@163.com.

害鼠的种内竞争及建立可分离死亡率的模型更为合理. 基于此, 建立并分析如下污染环境中依赖个体尺度和迁移项的非线性害鼠模型.

1 基本模型

本文建立污染环境中一类具有尺度结构和迁移项的非线性害鼠模型

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial[V(x,t)u(x,t)]}{\partial x} = f(x,t) - \mu(x,t,c_0(t))u(x,t) - \\ \delta_1\alpha(x,t,c_0(t))u(x,t) - \Phi(c_0(t),J(t))u(x,t), \\ \frac{dc_0(t)}{dt} = kc_e(t) - gc_0(t) - mc_0(t), t \in [0, T], \\ \frac{dc_e(t)}{dt} = -k_1c_e(t)U(t) + g_1c_0(t)U(t) - hc_e(t) + v_1(t), t \in [0, T], \\ V(0,t)u(0,t) = \int_0^l \beta(x,t,c_0(t),R(t))\omega(x,t)[1 - \delta_2\alpha(x,t,c_0(t))]u(x,t)dx, t \in [0, T], \\ J(t) = \int_0^l b(x)u(x,t)dx, R(t) = \int_0^l \gamma(x)u(x,t)dx, t \in [0, T], \\ 0 \leq c_0(0) \leq 1, 0 \leq c_e(0) \leq 1, \\ U(t) = \int_0^l u(x,t)dx, (x,t) \in Q, \\ u(x,0) = u_0(x), x \in (0, l), \end{cases} \quad (1)$$

其中 $Q = (0, l) \times [0, T]$, 固定常数 l, T 分别表示个体所不能超越的最大尺度和环境变化周期; 状态变量 $u(x, t)$ 表示 t 时刻尺度为 x 的害鼠个体分布密度; $u_0(x)$ 表示种群初始尺度分布; $V(x, t)$ 表示个体尺度增长率, 即 $V(x, t) = \frac{dx}{dt}$; 函数 $f(x, t)$ 表示外界向种群生存环境的迁入率; $\omega(x, t)$ 表示雌性个体比例; $c_0(t)$ 和 $c_e(t)$ 分别表示 t 时刻有机物中污染物的浓度和环境中的污染物的浓度; 控制函数 $\alpha(x, t, c_0(t))$ 表示 t 时刻人类对尺度为 x 的单个害鼠个体所误食的雌性不育剂的平均量; 生命参数 $\beta(x, t, c_0(t), R(t))$ 表示种群个体的平均繁殖率; $\mu(x, t, c_0(t))$ 表示 t 时刻尺度为 x 的种群个体的自然死亡率; $v_1(t)$ 表示 t 时刻外界输入率; $\Phi(c_0(t), J(t))$ 表示依赖于权函数 $b(x)$ 的加权总量 $J(t)$ 的额外死亡率; $\delta_1\alpha(x, t, c_0(t))$ 表示害鼠个体因误食不育剂所导致的额外死亡率; $\delta_2\alpha(x, t, c_0(t))$ 为 t 时刻尺度为 x 的雌性个体的不育率; $U(t)$ 表示 t 时刻种群总规模.

做出如下假设. (H₁) $V: Q \rightarrow \mathbf{R}_+$ 是有界的连续函数, 对任意的 $(x, t) \in Q, \forall V(x, t) > 0, V(l, t) = 0$, 即尺度达到最大后不再生长, 并且 $V(x, t)$ 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件, 存在 Lipschitz 常数为 L_V , 使得对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, l), t \in (0, T), |V(x_1, t) - V(x_2, t)| \leq L_V |x_1 - x_2|$; (H₂) $\beta: Q \rightarrow \mathbf{R}_+$ 为可测函数且存在 $\bar{\beta} > 0$, 使得 $0 \leq \beta(x, t, c_0(t), R(t)) \leq \bar{\beta}, a.e. (x, t) \in Q$; (H₃) $\mu: Q \rightarrow \mathbf{R}_+$ 为可测函数且存在 $\bar{\mu} > 0$, 使得 $0 \leq \mu(x, t, c_0(t)) \leq \bar{\mu}, a.e. (x, t) \in Q$; (H₄) $f \in L^\infty(Q), 0 < b(x) < \bar{b}, 0 < \gamma(x) < \bar{\gamma}, x \in (0, l); 0 \leq u_0(x) \leq \bar{u}, x \in (0, l); (H_5) \omega \in L^\infty(Q), 0 < \omega(x, t) < 1, 0 \leq \delta_i\alpha(x, t, c_0(t)) < 1, (x, t) \in Q, i = 1, 2; (H_6) \Phi: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ 为连续函数, 且对于任意 $J \in \mathbf{R}_+$, 存在 $\bar{\Phi} \in \mathbf{R}_+$, 使得 $\Phi(J) \leq \bar{\Phi}$, 并且对任意 $J_1, J_2 \in [0, r]$, 存在递增函数 $C_\Phi: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$, 使得当 $|J_1| \leq r, |J_2| \leq r$ 时 $|\Phi(J_1) - \Phi(J_2)| \leq C_\Phi(r) |J_1 - J_2|$; (H₇) 控制变量 $\alpha(x, t, c_0(t))$ 属于允许控制集 $\alpha(x, t, c_0(t)) \in \Omega = \{h \in L^\infty(Q); 0 \leq h \leq L, a.e. (x, t) \in Q, \text{其中}, L \text{ 为正常数}\}$; (H₈) $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ 为非负凸函数, 对任意的 $s \in \mathbf{R}, g'$ 存在且有界, 存在常数 $\bar{h} > 0$, 使得 $h: [0, T] \rightarrow (0, \bar{h})$ 为可测函数.

2 状态系统的适定性

定义 1 初值问题 $x'(t) = V(x, t), x(t_0) = x_0$ 的唯一解 $x = \varphi(t; t_0, x_0)$, 称为系统(1) 通过点 (t_0, x_0)

的特征曲线,记作 $\varphi(t; t_0, x_0)$. 特别地,在 $x - t$ 平面上,记通过点 $(0, 0)$ 的特征曲线为 $z(t)$.

注 对任意的 $t \in [0, T]$ 有 $\varphi(t; t_0, x_0) \in [0, l]$. 对 $x - t$ 平面第一象限上任意点 (x, t) , 若 $x \leq z(t)$, 定义 $\tau \triangleq \tau(x, t)$, 则 $\varphi(t; \tau, 0) = x \Leftrightarrow \varphi(t; \tau, x) = 0$, 易知 $\tau = \varphi^{-1}(0; t, x)$.

定义 2 若函数 $u(x, t) \in C([0, T]; L^1_+)$, 沿着每条特征曲线 φ 都绝对连续, 且满足

$$\begin{cases} D_\varphi u(x, t) = f(x, t) - [\mu(x, t, c_0(t)) + V_x(x, t) + \Phi(c_0(t), J(t)) + \delta_1 \alpha(x, t, c_0(t))] u(x, t), (x, t) \in Q, \\ V(0, t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\varphi(t + \varepsilon; t, 0), t + \varepsilon) = \int_0^l \beta(x, t, c_0(t), R(t)) \omega(x, t) [1 - \\ \delta_2 \alpha(x, t, c_0(t))] u(x, t) dx, t \in [0, T], \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x + \varepsilon, \varepsilon) = u_0(x), x \in (0, l), \\ \frac{dc_0(t)}{dt} = kc_e(t) - gc_0(t) - mc_0(t), t \in [0, T], \\ \frac{dc_e(t)}{dt} = -k_1 c_e(t) U(t) + g_1 c_0(t) U(t) - hc_e(t) + v_1(t), t \in [0, T], \\ J(t) = \int_0^l b(x) u(x, t) dx, R(t) = \int_0^l \gamma(x) u(x, t) dx, t \in [0, T], \\ U(t) = \int_0^l u(x, t) dx, (x, t) \in Q, \end{cases}$$

则称 $(u(x, t), c_0(t), c_e(t))$ 为系统(1)的解. 这里 $D_\varphi u(x, t)$ 表示 $u(x, t)$ 沿特征曲线 φ 的方向导数, 即

$$D_\varphi u(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\varphi(t + h; t, x), t + h) - u(x, t)}{h}.$$

定义 3 模型(1)的解空间为 $X = \{(u, c_0, c_e) \in L^\infty(0, T; L^1(0, l)) \times L^\infty(0, T) \times L^\infty(0, T) \mid 0 \leq c_0(t) \leq 1, 0 \leq c_e(t) \leq 1, 0 \leq \int_0^l u(x, t) dx \leq M, \text{a.e. } (x, t) \in (0, l) \times (0, T)\}$.

定义 4 函数 $u(x, t) \in C([0, T]; L^1_+)$ 称为系统(1)的解, 如果 u 满足

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{F(\tau, u(\cdot, \tau))}{V(0, \tau)} + \int_\tau^t G_V(s, u(\cdot, s))(\varphi(s; t, x)) ds, x \leq z(t), \\ u_0(\varphi(0; t, x)) + \int_0^t G_V(s, u(\cdot, s))(\varphi(s; t, x)) ds, x > z(t), \end{cases}$$

其中, 对任意的 $t \in [0, T]$ 及 $\phi \in L^1, F(t, c_0(t), \phi) = \int_0^l \beta(x, t, c_0(t), R(t)) \omega(x, t) [1 - \delta_2 \alpha(x, t, c_0(t))] \phi(x) dx, G_V(t, c_0(t), \phi) = f(x, t) - [\mu(x, t, c_0(t)) + V_x(x, t) + \delta_1 \alpha(x, t, c_0(t)) - \Phi(\int_0^l b(x) \phi(x) dx)] \phi(x)$.

由于系统(1)的第 2 式和第 3 式为常微分方程, 由此得

$$c_0(t) = c_0(0) \exp\{-(g + m)t\} + k \int_0^t c_e(s) \exp\{(s - t)(g + m)\} ds,$$

$$c_e(t) = c_e(0) \exp\{-\int_0^t (k_1 U(\tau) + h) d\tau\} + \int_0^t (g_1 c_0(s) U(s) + v_1(s)) \exp\{\int_t^s (k_1 U(\tau) + h) d\tau\} ds.$$

引理 1 对于系统(1), 如果 $g \leq k \leq g + m, v_1 < h$, 则 $\forall t \in [0, T]$, 有 $0 \leq c_0(t) \leq 1, 0 \leq c_e(t) \leq 1$.

证明 见参考文献[17].

引理 2 假设 $(H_1) \sim (H_7)$ 成立, 系统(1)有唯一的非负解 $(u(x, t), c_0(t), c_e(t))$ 使得

(1) $(u(x, t), c_0(t), c_e(t)) \in L^\infty(Q) \times L^\infty(0, T) \times L^\infty(0, T)$, (2) $0 \leq c_0(t) \leq 1, 0 \leq c_e(t) \leq 1$.

证明 见参考文献[18].

考虑系统(1)的可分离形式解

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) y(t), \tag{2}$$

将(2)代入系统(1), 可得如下关于 $u(x, t)$ 和 $y(t)$ 的两个子系统

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(V(x,t)\bar{u}(x,t))}{\partial x} = \frac{f(x,t)}{y(t)} - [\mu(x,t,c_0(t)) + \delta_1\alpha(x,t,c_0(t))]\bar{u}(x,t), (x,t) \in Q, \\ V(0,t)\bar{u}(0,t) = \int_0^l \beta(x,t,c_0(t),\tilde{R}(t))\omega(x,t)[1 - \delta_2\alpha(x,t,c_0(t))]\bar{u}(x,t)dx, t \in [0,T], \\ \bar{u}(x,0) = u_0(x), x \in (0,l), \\ \tilde{R}(t) = \int_0^l \gamma(x)\bar{u}(x,t)dx, t \in [0,T], \end{cases} \quad (3)$$

$$y'(t) + \Phi(y(t)\tilde{J}(t))y(t) = 0, t \in [0,T], y(0) = 1, \tilde{J}(t) = \int_0^l b(x)\bar{u}(x,t)dx, t \in [0,T]. \quad (4)$$

定义 5 函数对 $(\bar{u}(x,t), y(t))$ (其中 $\bar{u} \in C([0,T]; L^1_+)$, $y \in C([0,T]; \mathbf{R}_+)$), 称为子系统(3)和(4)的解. 如果 $(\bar{u}(x,t), y(t))$ 满足如下的积分形式

$$\bar{u}(x,t) = \begin{cases} \frac{F(\tau, \bar{u}(\cdot, \tau))}{V(0,\tau)} + \int_\tau^t G_V(s, \bar{u}(\cdot, s))(\varphi(s;t,x))ds, x \leq z(t), \\ u_0(\varphi(0;t,x)) + \int_0^t G_V(s, \bar{u}(\cdot, s))(\varphi(s;t,x))ds, x > z(t). \end{cases}$$

$$y(t) = \exp\left\{-\int_0^t \Phi(\tilde{J}(s)y(s))ds\right\},$$

其中, 对于任意的 $t \in [0,T]$ 及 $\phi \in L^1$, $\tilde{J}(s) = \int_0^l b(x)\bar{u}(x,s)dx$, $G_{y,v}(t, c_0(t), \phi)(x) = -\mu(x,t, c_0(t))\phi(x) - V_x(x,t)\phi(x) - \delta_1\alpha(x,t,c_0(t))\phi(x) + \frac{f(x,t)}{y(t)}$.

定理 1 若 $(H_1) \sim (H_7)$ 成立, 则对任意的 $\alpha \in \Omega$, 子系统(3)、(4)具有唯一非负有界解 $(\bar{u}(x,t), y(t))$.

证明 记 $\theta \triangleq \exp\{-\Phi T\} > 0$, 令 $A = \{h \in C[0,T] : \theta \leq h(t) \leq 1\}$. 对任意的 $h \in C[0,T]$ 及 $\lambda > 0$, 定义空间 $C[0,T]$ 上的等价范数 $\|h\|_\lambda = \sup_{t \in [0,T]} e^{-\lambda t} |h(t)|$. 显然, $(C[0,T], \|\cdot\|_\lambda)$ 为 Banach 空间. 由于 A 是 $C[0,T]$ 中的非空闭子集, 因此 $(A, \|\cdot\|_\lambda)$ 也为 Banach 空间.

第 1 步: 由子系统(4)的第一式解得 $y(t) = \exp\{-\int_0^t \Phi(\tilde{J}(s)y(s))ds\} \geq 0$, 即 $y(t) \in A$. 由文献[19], 对任意固定 $y(t) \in A$, 子系统(4)有唯一非负解 $\bar{u}^y(x,t) \in L^\infty(Q)$, 且

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^y(\cdot, t)\|_{L^1} &\leq e^{(\beta+2L_v)t} \|u_0\|_{L^1} + \int_0^t e^{(\beta+2L_v)(t-s)} \left\| \frac{f(\cdot, s)}{y(s)} \right\|_{L^1} ds \leq e^{(\beta+2L_v)t} \|u_0\|_{L^1} + \\ &\int_0^t e^{(\beta+2L_v)(t-s)} \frac{\|f(\cdot, s)\|_{L^1}}{y(s)} ds \leq e^{(\beta+2L_v)T} \left(\|u_0\|_{L^1} + \frac{\|f(\cdot, \cdot)\|_{L^1_Q}}{\theta} \right) \triangleq r_0. \end{aligned} \quad (5)$$

第 2 步: 令 $\tilde{J}^y(t) = \int_0^l b(x)\bar{u}^y(x,t)dx$, 对固定的 \tilde{J}^y , 定义映射 \mathcal{A} , $[\mathcal{A}h](t) = \exp\{-\int_0^t \Phi(\tilde{J}^y(s)h(s))ds\} \geq \theta$, 易知 \mathcal{A} 是从 A 到自身的映射. 由(5)式得

$$|\tilde{J}^y(t)| = \left| \int_0^l b(x)\bar{u}^y(x,t)dx \right| \leq \int_0^l |b(x)| |\bar{u}^y(x,t)| dx \leq \bar{b}r_0 \triangleq r_1, \quad (6)$$

则对任意的 $h_1, h_2 \in A$

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}h_1)(t) - (\mathcal{A}h_2)(t)\|_\lambda &= \sup_{t \in [0,T]} \{e^{-\lambda t} |(\mathcal{A}h_1)(t) - (\mathcal{A}h_2)(t)|\} \leq \sup_{t \in [0,T]} \{e^{-\lambda t} \int_0^t |\Phi(\tilde{J}^y(s)h_1(s)) - \\ &\Phi(\tilde{J}^y(s)h_2(s))| ds\} \leq \sup_{t \in [0,T]} \{e^{-\lambda t} C_\Phi(r_1)r_1 \int_0^t e^{\lambda s} e^{-\lambda s} |h_1(s) - h_2(s)| ds\} \leq \frac{C_\Phi(r_1)r_1}{\lambda} \|h_1 - h_2\|_\lambda, \end{aligned}$$

于是, 当 $\lambda > C_\Phi(r_1)r_1$ 时, \mathcal{A} 是 Banach 空间 $(A, \|\cdot\|_\lambda)$ 上的压缩映射. 故映射 \mathcal{A} 有唯一的不动点, 即存在唯一的 $\bar{y} \in A$, 使得

$$\bar{y}(t) = \exp\left\{-\int_0^t \Phi(\tilde{J}^y(s)\bar{y}(s))ds\right\}. \quad (7)$$

第 3 步, 由文献[19]可知, 对任意的 $y_1, y_2 \in A$, 存在 $M > 0$, 使得对于任意的 $t \in [0,T]$, $\|\bar{u}^{y_1}(\cdot, t) -$

$$\bar{u}^{y_2}(\cdot, t) \|_{L^1} \leq M \int_0^t |y_1(s) - y_2(s)| ds, e^{-\lambda t} \| \bar{u}^{y_1}(\cdot, t) - \bar{u}^{y_2}(\cdot, t) \|_{L^1} \leq \frac{M}{\lambda} \|y_1 - y_2\|_{\lambda}.$$

定义映射 $\mathcal{B}: A \rightarrow A$

$$(\mathcal{B}y)(t) = \bar{y}(t), \forall y \in A, \tag{8}$$

其中 \bar{y} 满足(7)式.由(6)、(7)式知,对任意的 $y_1, y_2 \in A$,

$$\begin{aligned} |(\mathcal{B}y_1)(t) - (\mathcal{B}y_2)(t)| &= |\bar{y}_1(t) - \bar{y}_2(t)| = |\exp\{-\int_0^t \Phi(\tilde{J}^{y_1}(s)\bar{y}_1(s))ds\} - \\ &\exp\{-\int_0^t \Phi(\tilde{J}^{y_2}(s)\bar{y}_2(s))ds\}| \leq |\int_0^t \Phi(\tilde{J}^{y_1}(s)\bar{y}_1(s))ds - \int_0^t \Phi(\tilde{J}^{y_2}(s)\bar{y}_2(s))ds| \leq \\ &C_{\Phi}(r_1)r_1 \int_0^t |\bar{y}_1(s) - \bar{y}_2(s)| ds + C_{\Phi}(r_1) \int_0^t |\tilde{J}^{y_1}(s) - \tilde{J}^{y_2}(s)| ds, \end{aligned} \tag{9}$$

由于 $|\tilde{J}^{y_1}(s) - \tilde{J}^{y_2}(s)| = |\int_0^t b(x)\bar{u}^{y_1}(x, t)dx - \int_0^t b(x)\bar{u}^{y_2}(x, t)dx| \leq \bar{b} \| \bar{u}^{y_1}(\cdot, s) - \bar{u}^{y_2}(\cdot, s) \|_{L^1}$, 则

$$e^{-\lambda t} \int_0^t |\tilde{J}^{y_1}(s) - \tilde{J}^{y_2}(s)| ds \leq \bar{b} e^{-\lambda t} \int_0^t \| \bar{u}^{y_1}(\cdot, s) - \bar{u}^{y_2}(\cdot, s) \|_{L^1} ds \leq \frac{M\bar{b}}{\lambda^2} \|y_1 - y_2\|_{\lambda}, \tag{10}$$

结合(9)和(10)式可得

$$e^{-\lambda t} |\bar{y}_1(t) - \bar{y}_2(t)| \leq \frac{C_{\Phi}(r_1)M\bar{b}}{\lambda^2} \|y_1 - y_2\|_{\lambda} + C_{\Phi}(r_1)r_1 \int_0^t e^{-\lambda s} |\bar{y}_1(s) - \bar{y}_2(s)| ds,$$

于是,由 Gronwall 不等式得

$$e^{-\lambda t} |\bar{y}_1(t) - \bar{y}_2(t)| \leq \frac{C_{\Phi}(r_1)M\bar{b}e^{C_{\Phi}(r_1)r_1T}}{\lambda^2} \|y_1 - y_2\|_{\lambda},$$

选择 $\lambda > 0$ 使得 $\frac{C_{\Phi}(r_1)M\bar{b}e^{C_{\Phi}(r_1)r_1T}}{\lambda^2} < 1$. 则 \mathcal{B} 是 Banach 空间 $(A, \| \cdot \|_{\lambda})$ 上的压缩映射. 从而映射 \mathcal{B} 在 A 上

有唯一不动点. 综上所述,子系统(3)和(4)存在唯一非负有界解 $(\bar{u}^y(x, t), y(t))$.

定理 2 若 $(H_1) \sim (H_7)$ 成立, 则对于任意的 $\alpha \in \Omega$, 系统(1)在 $C([0, T]; L^1_+)$ 上有唯一的非负有界解 $u(x, t)$ 且 $u(x, t) = \bar{u}^y(x, t)y(t)$, 其中 $\bar{u}^y(x, t), y(t)$ 分别是系统(3)和(4)的解. 进一步, 存在常数 $M > 0$, 使得 $|u(x, t)| \leq M$.

证明 见参考文献[13].

定理 3 若 $(H_1) \sim (H_7)$ 成立, 则系统(1)在 $C([0, T]; L^1_+)$ 上的解属于 $L^2[0, T; H^1(0, L)]$ 的解, 即 $u(x, t) \in L^2[0, T; H^1(0, L)]$.

证明 见参考文献[18].

3 最优不育策略的存在性

设 u^{α} 是系统(1)相应于 $\alpha \in \Omega$ 的解, 考虑如下的最优化问题

$$\min_{\alpha \in \Omega} J(\alpha) = \int_0^l g(u^{\alpha}(x, T) - \bar{u}(x))dx + \int_0^T \int_0^l h(t)\alpha(x, t, c_0(t))u^{\alpha}(x, t)dx dt, \tag{11}$$

其中, 函数 $\bar{u} \in L^{\infty}(0, l)$ 是给定的理想分布, 即在不影响农作物生长情况下害鼠的最大量, $g(u^{\alpha}(x, T) - \bar{u}(x))$ 表示在给定时刻害鼠密度与理想分布的接近程度, $h(t)\alpha(x, t, c_0(t))u^{\alpha}(x, t)$ 代表不育控制成本, 包括所投放的不育剂的成本以及治理环境污染费用. 因此, 最优不育控制策略表示在给定时间 T 内, 使害鼠的密度尽可能接近于理想分布, 并且使控制成本尽可能低.

引理 3 若 $(H_1) \sim (H_8)$ 成立, 令 $J^{\alpha}(t) = \int_0^l b(x)u^{\alpha}(x, t)dx, R^{\alpha}(t) = \int_0^l \gamma(x)u^{\alpha}(x, t)dx$, 则 $\{J^{\alpha}(t) : \alpha \in \Omega\}, \{R^{\alpha}(t) : \alpha \in \Omega\}$ 在 $L^2(0, T)$ 中是相对紧的.

证明 首先证明 $\{J^{\alpha}(t) : \alpha \in \Omega\}$ 在 $L^2(0, T)$ 中是相对紧的.

由于 $\frac{dJ^\alpha(t)}{dt} = \int_0^l b(x) \frac{\partial u^\alpha(x,t)}{\partial t} dx$, 由系统(1) 两边同时乘以 $b(x)$, 在 $(0, l)$ 上积分可得

$$\int_0^l b(x) \frac{\partial u^\alpha}{\partial t} dx = \int_0^l b(x) [f - \mu u^\alpha - \Phi(c_0(t), J^\alpha(t)) u^\alpha - \delta_1 a u^\alpha] dx - \int_0^l b(x) \frac{\partial(Vu^\alpha)}{\partial x} dx \triangleq I_1 + I_2.$$

由于 I_1 关于 $\alpha \in \Omega$ 一致有界, 对于 I_2 , 由系统(1) 的第 2 式可得

$$I_2 = - \int_0^l b(x) \frac{\partial(Vu^\alpha)}{\partial x} dx = V(0, t) u^\alpha(0, t) b(0) + \int_0^l b'(x) V(x, t) u^\alpha(x, t) dx = b(0) \int_0^l \beta(x, t, c_0(t), R(t)) \omega(x, t) [1 - \delta_2 \alpha(x, t, c_0(t))] u^\alpha(x, t) dx + \int_0^l b'(x) V(x, t) u^\alpha(x, t) dx,$$

可得 I_2 关于 $\alpha \in \Omega$ 一致有界, 于是, $\frac{dJ^\alpha(t)}{dt}$ 关于 $\alpha \in \Omega$ 一致有界.

当 $t < 0$ 或 $t > T$ 时, 令 $J^\alpha(t) = 0$, 将 $J^\alpha(t)$ 延拓到 $(-\infty, +\infty)$ 上, 则 $J^\alpha(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

(1) $J^\alpha(t)$ 关于 $\alpha \in \Omega$ 的一致有界性. 由于 $J^\alpha(t) = \int_0^l b(x) u^\alpha(x, t) dx$, 则由假设 (H_4) 及定理 2 知, $J^\alpha(t)$ 关于 $\alpha \in \Omega$ 一致有界.

(2) 证明 $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^T [J^\alpha(s+t) - J^\alpha(s)]^2 ds = 0$. 由于 $\int_0^T [J^\alpha(s+t) - J^\alpha(s)]^2 ds = \int_0^T \left[\int_s^{s+t} \frac{dJ^\alpha(r)}{dr} dr \right]^2 ds \leq |t| \int_0^T \left[\int_s^{s+t} \left(\frac{dJ^\alpha(r)}{dr} \right)^2 dr \right] ds \leq |t| T \int_0^T \left(\frac{dJ^\alpha(r)}{dr} \right)^2 dr$, 且 $\frac{dJ^\alpha(t)}{dt}$ 关于 $\alpha \in \Omega$ 一致有界, 则 $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^T [J^\alpha(s+t) - J^\alpha(s)]^2 ds = 0$.

(3) 显然 $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{|s| > a} [J^\alpha(s)]^2 ds = 0$.

综上所述, 由 Fréchet-Kolmogorow 准则可知, $\{J^\alpha(t) : \alpha \in \Omega\}$ 在 $L^2(0, T)$ 中是相对紧的.

同理可证, $\{R^\alpha(t) : \alpha \in \Omega\}$ 在 $L^2(0, T)$ 中是相对紧的. 引理证毕.

定理 4 若假设 $(H_1) \sim (H_8)$ 成立, 则不育控制问题(3)、(4)、(11) 至少存在一个最优解 $\alpha^* \in \Omega$.

证明 令 $d = \min_{\alpha \in \Omega} J(\alpha)$, 由定理 2 可知, $0 \leq d < +\infty$.

设 $\{\alpha_n : n \geq 1\}$ 为 $J(\alpha)$ 中的极小化序列, 使得 $d \leq J(\alpha_n) < d + \frac{1}{n}$.

由于 $\{u^{\alpha_n}\}$ 关于 $\alpha_n \in \Omega$ 一致有界, 故存在子序列(仍记为 $\{\alpha_n\}$), 使得当 $n \rightarrow +\infty$ 时, u^{α_n} 在 $L^2(Q)$ 中弱收敛于 u^* , 同时, 存在子序列 $\{c_0^n\}, \{c_e^n\}$ 满足在 $[0, T]$ 中分别弱收敛于 c_0^* ($n \rightarrow \infty$), 弱收敛于 c_e^* ($n \rightarrow \infty$).

由引理 3 知, 存在子序列(仍记为 $\{\alpha_n\}$), 有 $J^{\alpha_n} \rightarrow J^*$, $R^{\alpha_n} \rightarrow R^*$, ($n \rightarrow \infty$), 对 $[0, T]$ 中几乎所有的 t , 有 $J^{\alpha_n}(t) \rightarrow J^*(t)$, $R^{\alpha_n}(t) \rightarrow R^*(t)$. 于是有 $J^*(t) = \int_0^l b(x) u^*(x, t) dx$, $R^*(t) = \int_0^l \gamma(x) u^*(x, t) dx$.

对序列 $\{u^{\alpha_n}\}, \{c_0^n\}, \{c_e^n\}$ 应用 Mazur 定理, 存在 $\{u^{\alpha_n}\}, \{\bar{c}_0^n\}, \{\bar{c}_e^n\}$ 的有限凸组合,

$$\begin{aligned} \bar{u}_n &= \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n u^{\alpha_i}, \bar{c}_0^n(t) = \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n c_0^i(t), \bar{c}_e^n(t) = \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n c_e^i(t), \\ \lambda_i^n &\geq 0, \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n = 1, k_n \geq n+1, \end{aligned} \quad (12)$$

使得当 $n \rightarrow \infty$, $\{\bar{u}_n\}$ 在 $L^2(Q)$ 中收敛于 u^* , $\{\bar{c}_0^n\}$ 在 $[0, T]$ 中收敛于 c_0^* , $\{\bar{c}_e^n\}$ 在 $[0, T]$ 中收敛于 c_e^* .

定义控制函数序列

$$\bar{\alpha}_n(x, t, c_0(t)) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \alpha_i(x, t, c_0(t)) u^{\alpha_i}(x, t)}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n u^{\alpha_i}(x, t)}, & \text{若 } \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n u^{\alpha_i}(x, t) \neq 0; \\ \alpha, & \text{若 } \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n u^{\alpha_i}(x, t) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

显然 $\tilde{\alpha}_n \in \Omega$, 且 $\tilde{u}_n(x, t) = u^{\tilde{\alpha}_n}(x, t)$, a.e. $(x, t) \in Q$.

利用 $L^2(Q)$ 中有界序列的弱紧性知: 存在 $\{\tilde{\alpha}_n\}$ 的子序列(仍记为 $\{\tilde{\alpha}_n\}$), 使得

$$\tilde{\alpha}_n \text{ 在 } L^2(Q) \text{ 中弱收敛于 } \alpha^*.$$

下面证明 $u^*(x, t) = u^{\alpha^*}(x, t)$, a.e. $(x, t) \in Q$.

根据(13)式及系统(1)可得

$$\left\{ \begin{aligned} & D_\varphi \tilde{u}_n(x, t) = f(x, t) - [\mu(x, t, c_0(t)) + V_x(x, t) + \delta_1 \tilde{\alpha}_n(x, t, c_0(t))] \tilde{u}_n(x, t) - \\ & \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \Phi(c_0(t), J^{\alpha_i}(t)) u^{\alpha_i}(x, t), \\ & \frac{d\tilde{c}_0^n(t)}{dt} = k\tilde{c}_e^n(t) - g\tilde{c}_0^n(t) - m\tilde{c}_0^n(t), t \in [0, T], \\ & \frac{d\tilde{c}_e^n(t)}{dt} = - \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n k_1 c_e^i(t) \tilde{U}_n(t) + \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n g_1 c_0^i(t) \tilde{U}_n(t) - h\tilde{c}_e^n(t) + v(t), t \in [0, T], \\ & V(0, t) \tilde{u}_n(0, t) = \int_0^l \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \beta(x, t, c_0(t), R^{\alpha_i}(t)) \omega(x, t) [1 - \delta_2 \tilde{\alpha}_n(x, t, c_0(t))] u^{\alpha_i}(x, t) dx, t \in [0, T], \\ & J^{\alpha_i}(t) = \int_0^l b(x) u^{\alpha_i}(x, t) dx, R^{\alpha_i}(t) = \int_0^l \gamma(x) u^{\alpha_i}(x, t) dx, t \in [0, T], \\ & 0 \leq \tilde{c}_0^n(t) \leq 1, 0 \leq \tilde{c}_e^n(t) \leq 1, t \in [0, T], \\ & \tilde{U}_n(t) = \int_0^l \tilde{u}_n(x, t) dx, (x, t) \in Q, \\ & \tilde{u}_n(x, 0) = \tilde{u}_0(x), x \in (0, l), \end{aligned} \right. \tag{14}$$

当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $J^{\alpha_i}(t) \rightarrow J^*(t), R^{\alpha_i}(t) \rightarrow R^*(t)$. 由于 Φ 的连续性可知,

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \Phi(c_0(t), J^{\alpha_i}(t)) u^{\alpha_i}(x, t) \rightarrow \Phi(c_0(t), J^*(t)) u^*(x, t), \\ & \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \beta(x, t, c_0(t), R^{\alpha_i}(t)) u^{\alpha_i}(x, t) \rightarrow \beta(x, t, c_0(t), R^*(t)) u^*(x, t), \\ & \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n c_0^i(t) P^{u_i}(t) \rightarrow c_0^*(t) P^*(t), \\ & \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n c_e^i(t) P^{u_i}(t) \rightarrow c_e^*(t) P^*(t), \end{aligned} \right.$$

当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 对系统(14)取极限可得

$$u^*(x, t) = u^{\alpha^*}(x, t), J^*(t) = J^{\alpha^*}(t), R^*(t) = R^{\alpha^*}(t), a.e. (x, t) \in Q.$$

接下来, 证明 $\alpha^* \in \Omega$ 为最优不育控制.

一方面, 对任意 $\alpha_i \in \Omega, d \leq \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n J(\alpha_i) < d + \frac{1}{n}$, 故 $\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n J(\alpha_i) \rightarrow d (n \rightarrow \infty)$, 另一方面, 由(12)、

(13)式及假设(H₈)可知

$$\begin{aligned} \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n J(\alpha_i) &= \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \int_0^l g(u^{\alpha_i}(x, t) - \bar{u}(x)) dx + \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \int_0^T \int_0^l h(t) \alpha_i(x, t, c_0(t)) u^{\alpha_i}(x, t) dx dt \geq \\ & \int_0^l g \left(\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n u^{\alpha_i}(x, t) - \bar{u}(x) \right) dx + \int_0^T \int_0^l h(t) \frac{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n \alpha_i(x, t, c_0(t)) u^{\alpha_i}(x, t)}{\sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n u^{\alpha_i}(x, t)} \sum_{i=n+1}^{k_n} \lambda_i^n u^{\alpha_i}(x, t) dx dt = \\ & \int_0^l g(\tilde{u}_n(x, t) - \bar{u}(x)) dx + \int_0^T \int_0^l h(t) \tilde{\alpha}_n(x, t, c_0(t)) \tilde{u}_n(x, t) dx dt \rightarrow \int_0^l g(u^*(x, t) - \end{aligned}$$

$$\bar{u}(x))dx + \int_0^T \int_0^l h(t)\alpha^*(x,t,c_0(t))u^*(x,t)dxdt = J(\alpha^*),$$

所以, $J(\alpha^*) = d = \min_{\alpha \in \Omega} J(\alpha)$, 这说明 $\alpha^*(x,t)$ 是控制问题(1)、(11) 的最优不育控制策略.

4 数值模拟

例 考虑具有如下参数的最优不育问题

$$\begin{cases} \beta(x,t,c_0(t),R(t)) = 5x^2(1-x)(1+\sin \pi t), \mu(x,t,c_0(t)) = e^{-5x}(1-x)^{-1.4}(2+\cos \pi t), \\ V(x,t) = 2-x^2, u_0(x) = 2(1-x)^2, f(x,t) = (1+x)\sin \pi t, \\ h(t) = 0.1e^{-5t}(1-t), \Phi(c_0(t),J(t)) = 0, g(u(x,t) - \bar{u}(x)) = |u(x,t) - \bar{u}(x)|, \\ \omega(x,t) = 0.5, c_0(t) = 0.001, c_e(t) = 0.003, \delta_1 = \delta_2 = 0.02, T = 1, l = 1, L = 4, \end{cases} \quad (15)$$

图 1 刻画了生命参数即出生率、死亡率和增长率的变化规律;图 2 可以看出在某时刻之后种群个体总量 $P(t)$ 呈周期性变化,对害鼠种群投放雌性不育剂可降低害鼠的总量,从而达到控制害鼠的目的,与理论分析得到的结果是一致的.

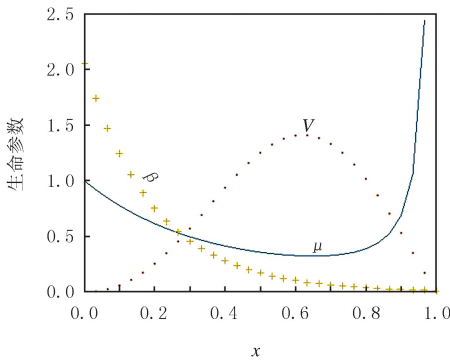


图1 生命参数随尺度x的变化曲线
Fig.1 The curve of life parameters

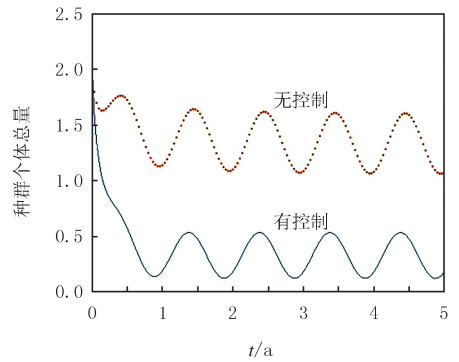


图2 种群个体总量随时间的变化曲线
Fig.2 The total individual population

参 考 文 献

[1] HALLAM T G, CLARK C E, LASSIDER R R. Effects of toxicants on population: a qualitative approach I. Equilibrium environmental exposure[J]. *Ecol Modell*, 1983, 8: 291-304.

[2] LUO Z X, HE Z R. Optimal control for age-dependent population hybrid system in a polluted environment[J]. *Math Anal Appl*, 2014, 228(1): 68-76.

[3] 俞晓菊, 王战平. 带环境污染的与年龄相关的非线性种群动力系统的最优控制[J]. *数学的实践与认识*, 2017, 47(5): 208-218.

[4] YUN X J, WANG Z P. Optimal control for nonlinear age-dependent population system in a polluted environment[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2017, 47(5): 208-218.

[5] SONG G H. Dynamics of a stochastic population model with predation effects in polluted environments[J]. *Advances in Difference Equations*, 2021, 2021(1): 36-59.

[6] OGADA D L, KEESING F, VIRANI M Z. Dropping dead: causes and consequences of vulture population declines worldwide[J]. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 2012, 1249: 57-71.

[7] 李秋英, 张凤琴, 刘汉武. 不育控制下的具有性别结构的单种群模型[J]. *数学的实践与认识*, 2009, 39(19): 145-151.

[8] LI Q Y, ZHANG F Q, LIU H W. Model of single-species population with sex-structure under contraception control[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2009, 39(19): 145-151.

[9] 吕江, 张凤琴, 刘汉武, 等. 具有竞争性繁殖干扰的不育控制害鼠种群模型[J]. *工程数学学报*, 2013, 30(2): 263-270.

[10] LYU J, ZHANG F Q, LIU H W, et al. Dynamic model of bandicoot population with competitive reproductive interference under virus-vec-tored immunocontraception control[J]. *Engineering Mathematics Journal*, 2013, 30(2): 263-270.

[11] ANITA S. Analysis and control of age-dependent population dynamics[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[12] SHI C M. The convergence and stability of full discretization scheme for stochastic age-structured population models[J]. *Applied Mathe-*

- atics and Computation,2021.DOI:10.1016/j.amc.2020.125867.
- [10] HE Z R.Optimal harvesting of population systems with age structure and constraints[J].Acta Mathematica Scientia,2010,30A(2):1037-1048.
- [11] WEI Y Y,SONG B J,YUAN S L.Dynamics of a ratio-dependent population model for Green Sea Turtle with age structure[J].Journal of Theoretical Biology,2021,516:14-18.
- [12] ALEXANDRU H.Coexistence, Extinction, and Optimal Harvesting in Discrete-Time Stochastic Population Models[J].Journal of Nonlinear Science,2020,31(1):332-337.
- [13] 何泽荣,刘荣,刘丽丽.依赖个体尺度结构的种群资源开发模型理论分析[J].系统科学与数学,2012,32(9):1109-1120.
HE Z R,LIU R,LIU L L.Theoretic analysis for a nonlinear size-structured population resources model[J].Journal of System Science and Mathematical Sciences,2012,32(9):1109-1120.
- [14] 何泽荣,刘荣,刘丽丽.模拟周期环境和尺度结构的种群系统的最优收获率[J].数学物理学报,2014,34(3):684-690.
HE Z R,LIU R,LIU L L.Optimal harvest rate for a population system modeling period environment and body size[J].Acta Mathematica Scientia, Series A,2014,34(3):684-690.
- [15] 王卉荣,刘荣.周期环境中具有尺度结构的害鼠模型的最优不育控制[J].数学实践与认识,2016,46(6):193-203.
WANG H R,LIU R.Optimal contraception of a size-structure population model in a periodic environment[J].Mathematics in Practice and Theory,2016,46(6):193-203.
- [16] 冯变英,李秋英.一类基于个体尺度的种群模型的适应性及最优不育控制策略[J].系统科学与数学,2016,36(2):278-288.
FENG B Y,LI Q Y.Optional contraception control for a size-structured population model[J].Journal of System Science and Mathematical Sciences,2016,36(2):278-288.
- [17] ZHAO Y,YUAN S L,ZHANG Q M.Numerical solution of a fuzzy stochastic single-species age-structure model in a polluted environment [J].Applied Mathematics and Computation,2015,260:385-396.
- [18] 曹雪靓,雒志学.污染环境下森林发展系统的最优控制[J].山东大学学报(理学版),2018,53(7):15-20.
CAO X J,LUO Z X.Optimal control of forest evolution system in polluted environment[J].Journal of Shangdong University(Natural Science),2018,53(7):15-20.
- [19] KATO N.Optional harvesting for a nonlinear size-structured population dynamic[J].Math Anal Appl,2008,324:1388-1398.

Optimal contraception control for a nonlinear vermin population model with size-structure in a polluted environments

Wang Zhanping, Gong Wei

(School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: This paper studies the optimal contraception control of a non-linear vermin population model that depends on size-structure and migration terms in a polluted environment. First, we obtain the existence of a unique non-negative solution by considering the separable solution of the model. Secondly, the existence of an optimal control strategy is proved via compactness and extremal sequence. Then, the necessary conditions of optimal contraception control is established by the use of tangent-normal cone technique and adjoint system. Finally, the numerical simulation is carried out by using Matlab to verify the effectiveness of the theoretical results.

Keywords: polluted environments; size-structure; contraception control; nonlinear vermin population

[责任编辑 陈留院 赵晓华]