

垂直激波加速中粒子动量变化的数值模拟研究

孔凡婧^{1,2}, 秦刚³

(1.中国科学院 国家空间科学中心,北京 100190;2.中国科学院大学 地球科学学院,北京 100049;
3.哈尔滨工业大学(深圳)理学院,广东 深圳 518055)

摘要:利用测试粒子数值模拟的方法统计研究了电子在垂直激波附近每次穿越过程中的动量增量随粒子速度的变化规律.模拟采用的磁场模型是由均匀的背景磁场和“slab+2D”形式的三维湍流磁场叠加构成的.数值结果表明,粒子穿越激波面前后的相对动量变化和粒子动量的相对变化率均随速度的增加而减小,当速度大于 2×10^8 m/s 时,粒子动量的相对变化率随速度呈现更加显著的衰减趋势,明显反映出相对论参数 $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ 所引起的物理效应.模拟结果在较大的湍流强度范围内都与理论给出的变化关系较为一致.

关键词:垂直激波;电子加速;动量变化;测试粒子模拟

中图分类号:P353

文献标志码:A

近几十年,随着科学技术的进步和探测卫星的不断升空,人们已经认识到行星际空间存在着大量的高能粒子.在等离子体天体物理领域,无碰撞激波是高能粒子加速的重要场所^[1].目前,观测研究表明,日球层环境中绝大多数高能粒子的产生都与日球层激波(例如日冕激波,日冕物质抛射驱动产生的行星际激波等)有着紧密的联系.在 20 世纪七八十年代,Axford、Krymsky、Bell 以及 Blandford 和 Ostriker 提出了著名的扩散激波加速(diffusive shock acceleration,简称 DSA)理论^[2-5],该理论给出了稳态下激波下游加速粒子的幂律谱分布,很好地解释了观测到的宇宙线能谱分布特征.

激波加速粒子主要有两种不同的物理机制:一阶费米加速和激波漂移加速.一阶费米加速(first-order Fermi)是指在磁场湍流作用下,粒子发生投掷角散射并在激波上下游之间来回穿越以不断获得能量的过程.激波漂移加速(shock drift acceleration)则是指粒子穿越激波面时,由于沿激波切向方向的磁场分量不为零且存在跃变,粒子产生沿对流电场方向的漂移运动所引起的加速.当磁场中存在湍流时,运动粒子间的散射是随机和频繁的,因此粒子的漂移加速通常也被认为是扩散的.Jokipii^[6]将漂移项包含在扩散激波加速理论中,得到了与 Bell^[4]一致的幂律谱形式的分布函数.根据标准的动能理论^[7]和粒子的加速时间^[8-9],Jokipii^[10]指出粒子加速的速率随着激波角度的增加而增加.Drury^[9]通过理论求解含时间变化的对流扩散方程,发现粒子完成一次穿越过程(指粒子进入激波下游,然后回到激波上游接着再次进入激波下游)之后,粒子动量的平均增加量为

$$\Delta p = \frac{4}{3} \frac{U_1 - U_2}{v} p, \quad (1)$$

将(1)式两边分别除以动量 p ,可得粒子每次穿越激波面时的相对动量变化

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{4}{3} \frac{U_1 - U_2}{v}, \quad (2)$$

(2)式揭示了粒子发生穿越时的相对动量变化 $\Delta p/p$ 是由激波上下游的等离子体速度差($U_1 - U_2$)和粒子速度(v)共同决定的.这对从微观上理解扩散加速至关重要.理论上,以上结果对不同位型的激波都是适用的.

收稿日期:2018-03-22;修回日期:2019-01-12.

基金项目:国家自然科学基金(NNSFC 41574172)

作者简介(通信作者):孔凡婧(1988—),女,河南新乡人,中国科学院国家空间科学中心博士研究生,主要从事空间物理方向的研究,E-mail: kongfanjing@hit.edu.cn.

然而,当前有关激波加速粒子的数值模拟还未对粒子速度与粒子动量增量的关系做细致的研究.一般而言,相比于平行激波和斜激波,垂直激波($\theta_{\text{bn}} = 90^\circ$)由于漂移加速机制的主导作用,可以在短时间内将粒子加速到很高的能量,因此,这种现象在观测中难以捕捉到,而数值模拟则有利于进行与粒子动量增量相关的物理量的分析.

在本文中,采用测试粒子模拟的方法,研究了电子在垂直激波附近每次穿越过程中动量增量的变化规律.通过对大量粒子穿越垂直激波前后的动量增量的统计分析,得到在不同湍流强度下粒子穿越激波面前后的相对动量变化以及粒子动量的相对变化率与粒子速度之间的关系,并与相应的理论结果进行了详细对比.需要说明的是,这里考虑电子的加速是因为电子的质量比质子的质量轻 1 000 多倍,相同能量的电子的回旋半径更小,使得它们更容易在激波面附近反复穿越从而得到加速.本文的结构如下,第 1 部分介绍数值计算模型,第 2 部分是模拟结果与讨论,最后一部分是本文的结论.

1 数值计算模型

通过求解测试粒子在给定电磁场下的运动方程,得到每个测试粒子的运动轨迹.此方法类似于 Decker 和 Vlahos^[11]研究激波加速粒子时所用的数值模型,但不同于他们的 slab 湍流模式的扰动磁场,使用的是所谓的“slab+2D”三维湍流磁场(见下文磁场模型).带电量为 q 的电子的运动方程为:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q[\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)]. \quad (3)$$

其中, \vec{p} 和 \vec{v} 分别是电子的动量和速度, t 是时间.该运动方程是在激波直角参考系下计算的,激波面位于 $z = 0$ 的位置,对流电场 $\vec{E} = -\vec{U} \times \vec{B}$, 其中 \vec{U} 是等离子体的流动速度.

描述求解该方程所用的数值格式.等离子体沿着正 z 方向从激波上游流向下游,上、下游速度分别为 U_1 和 U_2 ,在激波过渡层内等离子体速度满足下面的渐变关系

$$U(z) = \frac{U_1}{2s} \left\{ (s+1) + (s-1) \tanh \left[\tan \left(-\frac{\pi z}{L_{\text{diff}}} \right) \right] \right\}, \quad (4)$$

其中,激波压缩比 $s = U_1/U_2$, L_{diff} 是激波过渡层的厚度.在模拟中设 $L_{\text{diff}} = 10^{-1}$ AU,该厚度与粒子的回旋半径相比足够小,以至于激波过渡层不会显著地影响粒子的运动轨迹.

模拟中采用的总磁场为

$$\vec{B}(x', y', z') = \vec{B}_0 + \vec{b}(x', y', z'), \quad (5)$$

其中, \vec{B}_0 是均匀的背景磁场, \vec{b} 是叠加在背景场上的零平均的扰动场,且扰动场垂直于背景磁场.对于扰动场,采用的是“slab+2D”模式的湍流场^[12-16]

$$\vec{b}(x', y', z') = \vec{b}^{\text{slab}}(z') + \vec{b}^{2D}(x', y'). \quad (6)$$

湍流场的生成是通过快速傅里叶变换在局部的磁场直角坐标系下完成的.对于电子的加速而言,假设 slab 湍流分量的湍流谱是由惯性区和耗散区组成的,初始能量较低电子主要在湍流谱的耗散区发生共振,随着电子能量的增加,高能电子在惯性区共振.耗散区的谱指数为 -2.7 ,惯性区采用 Kolmogorov 的湍流谱,谱指数为 $-5/3$.惯性区和耗散区的拐点对应的波数取为 $k_b = 10^{-5}$ m,对应着在磁场 5 nT 时 21.6 keV 的共振频率.对于 2D 湍流分量仅考虑惯性区,也采用谱指数为 $-5/3$ 的 Kolmogorov 的湍流谱.磁场湍流 slab 分量的波矢沿背景磁场方向,波数 $k_{z'}/j/L_{z'}$, ($j = 1, 2, \dots, N_{z'}/2 - 1$).对于 2D 湍流分量,波矢垂直背景磁场方向,波数 $(k_{x'}, k_{y'}) = (i, j)/L_{x'}$, ($i, j = 1, 2, \dots, N_{x'}/2 - 1$).生成湍流磁场的周期性盒子大小 $L_{z'} = 50 \lambda$, $L_{x'} = L_{y'} = 10 \lambda$, 网格点划分 $N_{z'} = 2^{22}$, $N_{x'} = N_{y'} = 4096$.这里 λ 是 slab 分量的湍流相关长度,在模拟中采用 1 AU 附近的值 $\lambda = 0.02$ AU, 2D 湍流分量的相关长度设为 $\lambda_{2D} = \lambda/2.6$.slab 湍流分量和 2D 分量的能谱密度之比为 $E_{\text{slab}} : E_{2D} = 20 : 80$.更多关于磁场湍流模型的介绍,请参看 Qin 等人的工作^[17-18].另外,采用四阶龙格库塔方法求解方程,进行自适应时间步长调整,精度为 10^{-9} .

除上面介绍的关于磁场湍流模型的参数外,模拟中需要的其他主要参数设置如下:背景磁场为 1 AU 附近的磁场值 $B_0 = 5$ nT,激波压缩比 $s = 4$,上游等离子体速度 $U_1 = 400$ km/s,激波上游阿尔芬马赫数 $M_{A1} =$

8.我们考虑了 4 种不同的湍流强度,即 $(b/B_0)^2 = 0.001, 0.01, 0.1, 1.0$.电子的初始能量 $E_0 = 1$ keV.初始时刻 $t = 0$ 时,在距离激波面 10 倍粒子回旋半径的激波上游各向同性的投入 6 000 个电子,加速 30 min.在模拟过程中,记录下每个粒子每次穿越激波面前后时刻粒子的动量.这里粒子经历一次穿越定义为粒子进入激波下游后,反弹回激波上游,然后再次进入激波下游的过程.

2 模拟结果与讨论

在给定的湍流强度下,将粒子加速到设定的模拟加速时间后,得到每个粒子每次穿越过程前后的动量 p_1 和 p_2 ,以及对应的时刻 t_1 和 t_2 .定义粒子动量的增量 $\Delta p = p_2 - p_1$,时间间隔 $\Delta t = t_2 - t_1$,从而得到相对动量变化 $\Delta p/p = (p_2 - p_1)/p_1$.另外,还将粒子相对动量变化除以相应的时间间隔,进一步得到粒子动量的相对变化率 $\Delta p/(p\Delta t) = (p_2 - p_1)/p_1/(t_2 - t_1)$.根据粒子动量的变化范围,一共划分出 20 个动量通道,每个动量通道的中心动量对应着速度 v .然后,通过统计投入的这些粒子每次穿越前的动量 p 所落在的通道里的 $\Delta p/p$ 和 $(\Delta p/\Delta t)p^{-1}$,并对其进行求和平均,最终从数值模拟的角度给出 $\Delta p/p - v$ 和 $(\Delta p/\Delta t)p^{-1} - v$ 的定量关系.

图 1 的(a)、(b)、(c)和(d)中的黑色三角实线分别呈现了垂直激波湍流强度 $(b/B_0)^2 = 0.001, 0.01, 0.1, 1.0$ 时粒子相对动量变化 $\Delta p/p$ 随粒子速度变化的模拟结果.从图 1 中可以看出,在这 4 种不同湍流强度下, $\Delta p/p$ 均随粒子速度的增加而减小,即运动速度越高,粒子的动量增量相对其动量的变化就越小.这里粒子速度与其相对动量变化之间的反相关性,与图 1 中红黑色虚线所对应的(2)式的变化关系有很好的一致性.具体来说,对于图 1 中两条纵垂线之间的中速度段 $[3.26 \times 10^7 \text{ m/s}, 1.81 \times 10^8 \text{ m/s}]$,数值模拟结果(黑色实线)和理论结果(黑红色虚线)符合的非常好;对于低速度段 $v < 3.26 \times 10^7 \text{ m/s}$,模拟值相比于理论值明显偏低,很有可能是初始注入粒子能量的影响所造成的;而对于高速度段 $v > 1.81 \times 10^8 \text{ m/s}$,模拟值呈现堆积现象,这主要是相对论效应的结果,在接下来对粒子动量的相对变化率的研究中表现得更为突出.

接下来,讨论粒子动量的相对变化率 $(\Delta p/\Delta t)p^{-1}$ 随粒子速度的普遍变化规律,并将之与数值模拟结果进行对比.理论上讲,粒子每次穿越垂直激波所经历的时间应该对应着粒子回旋周期的尺度:

$$T_{\text{gyro}} = 2\pi m/qB.$$

粒子每次穿越激波面时,在上游感受到上游的磁场,而在下游感受着下游的磁场.为简化起见,磁场可以取为上下游磁场的平均值

$$B = \frac{1}{2}(B_1 + B_2) = 5/2B_1.$$

将(2)式除以回旋周期 T_{gyro} ,得到

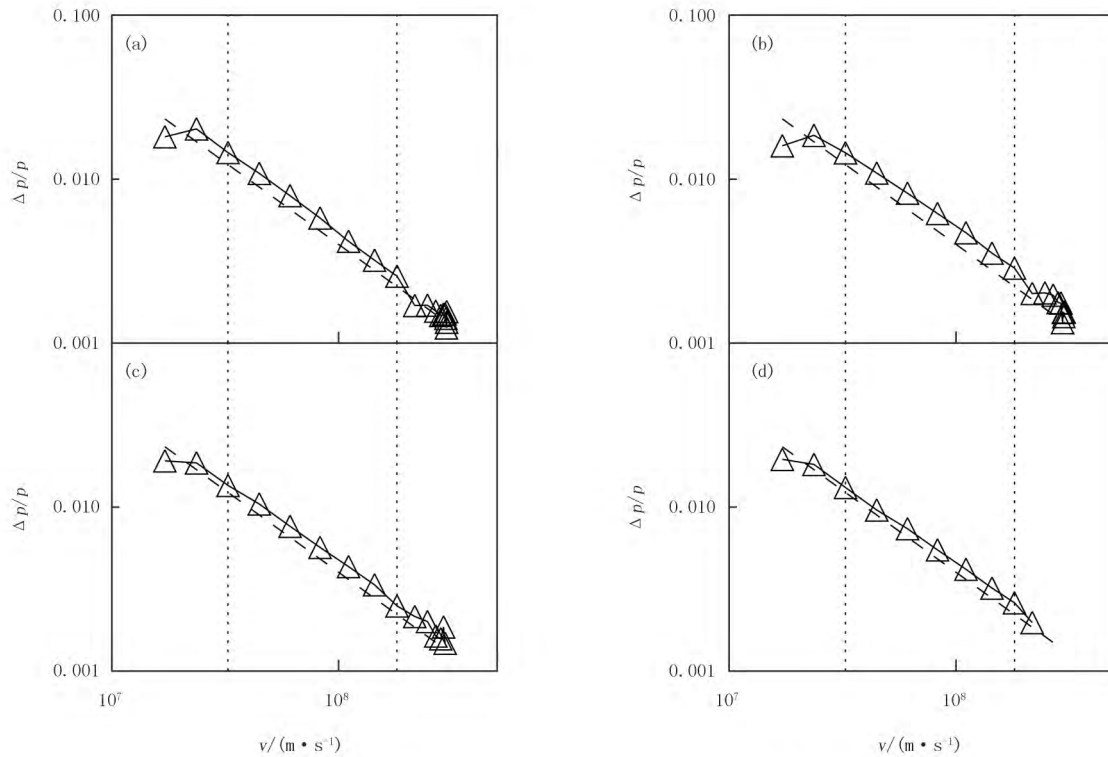
$$\frac{\Delta p}{p\Delta t} = \frac{\Delta p}{pT_{\text{gyro}}} = \frac{5(U_1 - U_2)qB_1}{3\pi p}, \quad (7)$$

其中,粒子的动量 $p = \gamma m_0 v$, γ 是洛仑兹参数, m_0 是电子的静止质量, v 是电子的速度.这样,可以从理论的角度给出粒子动量的相对变化率随粒子速度的变化关系.另外,在测试粒子模拟过程中,进一步记录了粒子每次穿越的时间 Δt ,从而得到了 $(\Delta p/\Delta t)p^{-1}$ 随 v 变化的数值解.

如图 2 所示,(a)、(b)、(c)和(d)中的黑色三角实线分别对应垂直激波湍流强度 $(b/B_0)^2 = 0.001, 0.01, 0.1, 1.0$ 时粒子动量的相对变化率 $\Delta p/(p\Delta t)$ 随粒子速度变化的模拟结果.这里图 2 中的红黑色虚线对应着(7)式给出的理论结果.可以看出:对于图 2 中两条纵垂线之间的中速度段 $[3.26 \times 10^7 \text{ m/s}, 1.81 \times 10^8 \text{ m/s}]$,粒子动量的相对变化率在对数坐标系下随粒子速度的增加而线性地降低.整体上看,当电子速度大于 $3.26 \times 10^7 \text{ m/s}$ 时,数值模拟结果(黑色实线)与(7)式对应的理论结果(红黑色虚线)符合的很好.另外,值得注意的是:在(a)、(b)和(c)3 图中,当电子速度大于 $2 \times 10^8 \text{ m/s}$ 时,粒子动量的相对变化率随粒子速度的增加而迅速衰减,明显反映出相对论参数 $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 所引起的物理效应.(d)图没有显示出这种特征的可能原因是,对于垂直激波,当磁场湍流强度很大时,局部的激波角度可以显著地偏离 90° ,使得激波对粒子的加速效率降低,这样粒子就不能被加速到非常高的能量,最终造成了(d)图中高速度段模拟结果的缺失.

为进一步分析数值模拟结果与理论推导的相关性,对于图 1 和图 2(a)~(d)4 种湍流强度下两条纵垂线

之间的中速度段,通过线性拟合求出了在对数坐标系下相应斜率的理论值和模拟值.从公式(2)和(7)可以直接得到,对数坐标下 $\Delta p/p$ 和 $(\Delta p/\Delta t)p^{-1}$ 随粒子速度 v 的变化斜率 k_{theo} 分别为 -1 和 -1.115 .表 1 列出了得到的两种斜率的模拟值 k_{simu} 以及模拟值与理论值的比值 $k_{\text{simu}}/k_{\text{theo}}$.可以看出,对于不同的湍流强度,粒子的相对动量变化及其动量的相对变化率所对应的斜率比值 $k_{\text{simu}}/k_{\text{theo}}$ 都非常接近 -1.0 .这一结果不仅显示出在较大湍流强度范围内测试粒子模拟结果与理论结果的一致性,还揭示本文推导的公式(7)可以从理论上很好地描述粒子动量的相对变化率随粒子速度的变化规律.



黑色三角实线、黑色虚线分别对应着模拟结果和通过公式(2)得到的理论结果.

图 1 4 种不同湍流强度 $(b/B_0)^2=0.001, 0.01, 0.1, 1.0$ 下(依次对应 (a), (b), (c), (d)), 粒子的相对动量变化 $\Delta p/p$ 随粒子速度 v 的变化关系

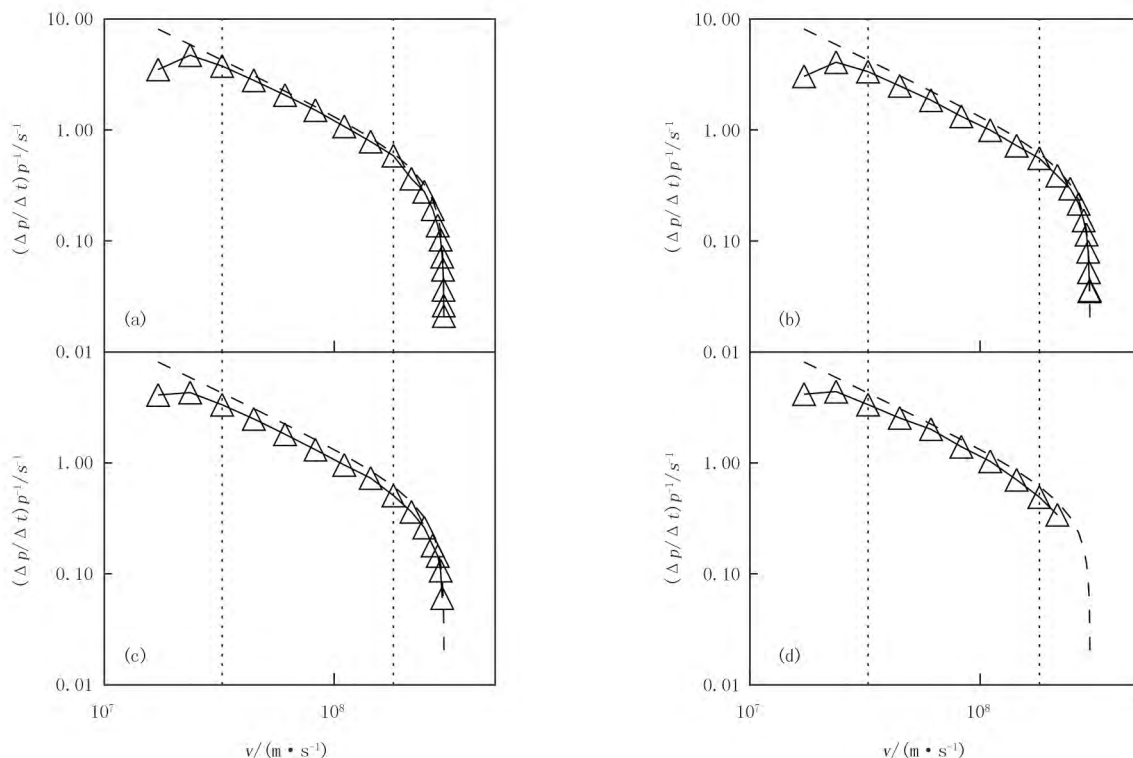
The black triangle lines and black dashed lines represent the simulation results and theoretical results obtained by eq. 2, respectively.

Fig. 1 Relative variation of particle momentum, $\Delta p/p$, as a function of particle velocity, v , for different turbulence levels, $(b/B_0)^2=0.001, 0.01, 0.1$ and 1.0 (denoted by (a), (b), (c) and (d))

表 1 不同湍流强度下粒子的相对动量变化 $\Delta p/p$ 穿越激波面时和动量的相对变化率 $(\Delta p/\Delta t)p^{-1}$ 在对数坐标系下随粒子速度 v 的变化斜率的模拟值 k_{simu} 和模拟值与理论值的比值 $k_{\text{simu}}/k_{\text{theo}}$

Tab.1 The slope k_{simu} of relative variation of particle momentum, $\Delta p/p$, and the rate of particle momentum relative change, $(\Delta p/\Delta t)p^{-1}$, as a function of particle velocity, v , in log-log space obtained from the simulations under different turbulence levels, and the ratio $k_{\text{simu}}/k_{\text{theo}}$ between the simulation values and theoretical values

$(b/B_0)^2$	$\Delta p/p$		$(\Delta p/\Delta t)p^{-1}$	
	k_{simu}	$k_{\text{simu}}/k_{\text{theo}}$	k_{simu}	$k_{\text{simu}}/k_{\text{theo}}$
0.001	-1.026	1.026	-1.084	0.972
0.01	-0.948	0.948	-1.050	0.942
0.1	-0.978	0.978	-1.079	0.968
1.0	-0.944	0.944	-1.107	0.993



黑色三角实线、黑色虚线分别对应着模拟结果和通过公式 (7) 对应的理论结果。
 图 2 4 种不同湍流强度 $(b/B_0)^2=0.001, 0.01, 0.1, 1.0$ 下 (依次对应 (a), (b), (c), (d)), 粒子动量的相对变化率 $(\Delta p/\Delta t)p^{-1}$ 随粒子速度 v 的变化

The black triangle lines and black dashed lines represent the simulation results and theoretical results obtained by eq. 7, respectively.

Fig. 2 The rate of particle momentum relative change, $(\Delta p/\Delta t)p^{-1}$, as a function of particle velocity, v , for different turbulence levels (denoted by (a), (b), (c) and (d))

3 结 论

以垂直激波对电子的加速为例,研究了不同湍流强度下粒子穿越激波面过程中的相对动量变化 $\Delta p/p$ 以及粒子动量的相对变化率 $(\Delta p/\Delta t)p^{-1}$ 随粒子速度的变化关系.结果表明,数值模拟得到的 $\Delta p/p$ 和 $(\Delta p/\Delta t)p^{-1}$ 在对数坐标系下均随粒子速度增加而线性的减小,在速度小于 2×10^8 m/s 时,二者随粒子速度的变化规律分别和(2)式与本文考虑粒子回旋周期后推导出的(7)式对应的理论结果符合的很好.在速度大于 2×10^8 m/s 时,粒子动量的相对变化率随速度增加而迅速减小,表现出明显的相对论物理效应.

致谢:基金支持:国家自然科学基金(41574172).这项工作是在天津国家超级计算机中心进行的,计算均在天河一号(A)上进行.

参 考 文 献

[1] BLANDFORD R, EICHLER D. Particle acceleration at astrophysical shocks: A theory of cosmic-ray origin[J]. Physics Reports—Review Section of Physics Letters, 1987, 154(1): 1-75.
 [2] AXFORD W I, LEER E, SKADRON G. Acceleration of cosmic rays at shock fronts[C]// Proc 15th Int Cosmic Ray Conf. [s.l.]: [s.n.], 1977: 273.
 [3] KRYMSKY G F. A regular mechanism for the acceleration of charged particles on the front of a shock wave[J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1977, 234(6): 1306-1308.
 [4] BELL A R. The acceleration of cosmic rays in shock fronts. I[J]. Mon Not R Astron Soc, 1978, 182(1): 147-156.
 [5] BLANDFORD R D, OSTRICKER J P. Particle acceleration by astrophysical shocks[J]. Astrophys J, 1978, 221(1): L29-L32.

- [6] JOKIPII J R. Particle drift, diffusion, and acceleration at shocks[J]. *Astrophys J*, 1982, 255(2): 716-720.
- [7] AXFORD W I. Modulation of galactic cosmic rays in interplanetary medium[J]. *Planet Space Sci*, 1965, 13(2): 115-130.
- [8] MORFILL G E, VOLK H J, DRURY L, et al. The Gamma-ray source CG-353+16-A super-nova shock interacting with the cloud rho ophiuchi[J]. *Astrophys J*, 1981, 246(3): 810-816.
- [9] DRURY L O'C. An introduction to the theory of diffusive shock acceleration of energetic particles in tenuous plasmas[J]. *Rep Prog Phys*, 1983, 46(8): 973-1027.
- [10] JOKIPII J R. Rate of energy gain and maximum energy in diffusive shock acceleration[J]. *Astrophys J*, 1987, 313(2): 842-846.
- [11] DECKER R B, VLAHOS L. Numerical studies of particle acceleration at turbulent, oblique shocks with an application to prompt ion acceleration during solar flares[J]. *Astrophys J*, 1986, 306(2): 710-729.
- [12] KONG F J, QIN G, ZHANG L H. Numerical simulations of particle acceleration at interplanetary quasi-perpendicular shocks[J]. *Astrophys J*, 2017, 845(1): 43.
- [13] MATTHAEUS W H, GOLDSTEIN M L, ROBERTS D A. Evidence for the presence of quasi-two-dimensional nearly incompressible fluctuations in the solar wind[J]. *J Geophys Res*, 1990, 95(A12): 20673-20683.
- [14] ZANK G P, MATTHAEUS W H. Waves and turbulence in the solar wind[J]. *J Geophys Res*, 1992, 97(A11): 17189-17194.
- [15] BIEBER J W, WANNER W, MATTHAEUS W H. Dominant two-dimensional solar wind turbulence with implications for cosmic ray transport[J]. *J Geophys Res*, 1996, 101(A2): 2511-2522.
- [16] GRAY P C, PONTIUS D H JR, MATTHAEUS W H. Scaling of field-line random walk in model solar wind fluctuations[J]. *Geophys Res Lett*, 1996, 23(9): 965-968.
- [17] ZANK G P, LI G, FLORINSKI V, et al. Particle acceleration at perpendicular shock waves: Model and observations[J]. *J Geophys Res*, 2006, 111(A6): A06108.
- [18] QIN G, KONG F J, ZHANG L H. Effects of shock and turbulence properties on electron acceleration[J]. *Astrophys J*, 2018, 860(1): 3-11.
- [19] QIN G, MATTHAEUS W H, BIEBER J W. Subdiffusive transport of charged particles perpendicular to the large scale magnetic field[J]. *Geophys Res Lett*, 2002a, 29(4): 1048.
- [20] QIN G, MATTHAEUS W H, BIEBER J W. Perpendicular transport of charged particles in composite model turbulence: Recovery of diffusion[J]. *Astrophys J*, 2002b, 578(2): L117-L120.

Numerical simulation study of particle momentum variation under acceleration at perpendicular shocks

Kong Fanjing^{1,2}, Qin Gang³

(1. National Space Science Center, Chinese Academy of Science, Beijing 100190, China; 2. College of Earth Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China; 3. School of Science, Harbin Institute of Technology, Shenzhen 518055, China)

Abstract: Using test particle simulations, we have studied the change of electron particle momentum increment during crossing the shock front with varying electron particle velocity for electron acceleration at perpendicular shocks. We adopted a magnetic field model that is composed of a mean background field and a three-dimensional "slab+2D" turbulent field. The simulation results show that both the relative variation of particle momentum in the process of crossing shock front and the rate of particle momentum relative change decrease with increasing particle velocity. When the velocity is larger than 2×10^8 m/s, the rate of particle momentum relative change displays a more noticeable decreasing tendency with particle velocity, which reflects the physical effect caused by the relativistic parameter $r = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$. Our simulation results agree, in a wide range of magnetic turbulence level, $(b/B_0)^2 = 0.01-1.0$, with the relationships given by the theoretical results.

Keywords: perpendicular shock; electron acceleration; momentum variation; test particle simulations

[责任编辑 陈留院 赵晓华]