文章编号:1000-2367(2022)06-0079-08 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2022.06.011

二维随机 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 方程的中偏差原理

陈光淦,王悦阳,杨敏

(四川师范大学 数学科学学院;可视化计算与虚拟现实四川省重点实验室,成都 610068)

摘 要:有界区域上带乘性噪声的随机 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 方程是描述等温不可压缩二元流体运动的一类重要数学模型.由于乘性噪声的扰动,使得对方程解的研究变得复杂.通过构建新的近似系统和运用经典的弱收敛方法,证明了该系统的中偏差原理.

关键词:中偏差原理;随机 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 方程;弱收敛方法

中图分类号:O175.2 **文献标志码:**A

物理学中,Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 系统由描述二元物质相分离行为的 Cahn-Hilliard 方程和描述单层不可压缩流体运动的 Navier-Stokes 方程耦合而成[1].该耦合系统是材料工程学和流体力学中一类重要的界面扩散模型,描述了两个不混溶和不可压缩流体的等温混合物相分离的行为以及分离界面的演化过程,在合金淬火时的旋节分解和粗化,液滴的形成和碰撞,晶体生长中的热毛细管流以及蒸汽的冷凝成核等现象中被广泛应用[2].

本文考虑光滑有界区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上带乘性噪声的二维随机不可压缩 Cahn-Hilliard-Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}u^\varepsilon-(\triangle u^\varepsilon-(u^\varepsilon\cdot\nabla)u^\varepsilon-\nabla\pi+\mu^\varepsilon\nabla\phi^\varepsilon)\mathrm{d}t=\sqrt{\varepsilon}\sigma(t,u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)\mathrm{d}W^1,\\ \mathrm{d}\phi^\varepsilon+(u^\varepsilon\cdot\nabla)\phi^\varepsilon\mathrm{d}t-\triangle\mu^\varepsilon\mathrm{d}t=\sqrt{\varepsilon}g(t,\phi^\varepsilon)\mathrm{d}W^2,\\ \mu^\varepsilon=-\triangle\phi^\varepsilon+(\phi^\varepsilon)^3-\phi^\varepsilon,\\ \nabla\cdot u^\varepsilon=0,\\ u^\varepsilon\mid_{\partial D}=0,\phi^\varepsilon\mid_{\partial D}=\dfrac{\partial\phi^\varepsilon}{\partial\boldsymbol{n}}\mid_{\partial D}=\dfrac{\partial\triangle\phi^\varepsilon}{\partial\boldsymbol{n}}\mid_{\partial D}=0,\\ u^\varepsilon(0,x)=u_0(x),\phi^\varepsilon(0,x)=\phi_0(x),\end{cases}\tag{1}$$

其中 $u^\varepsilon\in\mathbf{R}^2$ 为流体的速度,π 为压力,ϕ^ε 为相参数,μ^ε 是二元混合物的化学势,W^1 和 W^2 是 Wiener 过程,$\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 上的外法向量.

Cahn-Hilliard-Navier-Stokes(CH-NS)系统由 Hohenberg 和 Halperin 提出并用于描述二元流体混合物的运动.GAL 等[3]研究了二维 CH-NS 系统的渐近行为.QIU[4]讨论了二维随机 CH-NS 系统的不变测度的存在性.MEDJO[5]证明了二维随机 CH-NS 系统解的存在唯一性.QIU 等[6]基于 MEDJO 的研究,进一步建立了二维随机 CH-NS 系统的大偏差原理.

大偏差和中心极限定理是统计学中重要的渐近性质,利用偏差尺度描述了系统解的渐近行为,在偏微分方程领域中得到了深入的研究[7-8].除此之外,中偏差也是描述系统解的渐近行为的重要工具.中偏差是介于大偏差和中心极限定理之间的一种估计(中偏差定义见本文定义 2),可以提供更精细的偏差估计.进一步,中

收稿日期:2021-09-21;**修回日期:**2022-04-19.

基金项目:国家自然科学基金(12171343);四川省科技计划(2022JDTD0019).

作者简介:陈光淦(1978-),男,四川绵阳人,四川师范大学教授,博士,研究方向为随机偏微分方程,E-mail:chenguanggan@hotmail.com.

通信作者:王悦阳(1998-),E-mail:wangyueyang970126@163.com.

偏差给出收敛速度的估计和构造有效的置信区间,从而提高渐近行为的精度.由于乘性噪声的扰动,使得通常的指数逼近方法对系统的中偏差原理的研究变得复杂.WANG 等[9]通过构建新的近似系统和运用弱收敛方法,建立了带乘性噪声的二维随机 Navier-Stokes 方程的中偏差原理.BELFADLI 等[10]证明了随机 Burgers 方程的中偏差原理.LI 等[11]运用弱收敛方法证明了时空白噪声驱动的随机 Cahn-Hilliard 方程的中偏差原理.本文通过建立新的近似系统和运用弱收敛方法,证明了方程(1)的中偏差原理.

1 预备知识

1.1 空间和算子设置

设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中带光滑边界的有界区域.令 $L^2(D)$ 为平方可积函数空间,其范数和内积分别为 $\|\cdot\|_{L^2}$ 和 $(\cdot,\cdot)$,空间 $H^2(D)$ 和 $H_0^1(D)$ 分别为通常的 Sobolev 空间 $W^{2,2}(D)$ 和 $W_0^{1,2}(D)$,且空间 $C(D)$ 和 $C_c^\infty(D)$ 分别为连续函数空间和具有紧支集的无穷次可微的连续函数空间. 定义空间 $H_1:=\overline{\{u\in C_c^\infty(D)\mid \nabla\cdot u=0,x\in D\}}^{(L^2(D))^2}$ 和 $V_1:=\overline{\{u\in C_c^\infty(D)\mid \nabla\cdot u=0,x\in D\}}^{(H_0^1(D))^2}$,其范数分别为 $\|\cdot\|_{H_1}$ 和 $\|\cdot\|_{V_1}$.

令算子 A_0 和 A_1 分别为 $A_0u:=-P\Delta u,u\in D(A_0)=H^2(D)\cap V_1$ 和 $A_1\phi:=-\Delta\phi,\phi\in D(A_1)=H^2(D)$,其中 P 是从 $L^2(D)$ 到 H_1 的 Leray-Helmholtz 投影.记 $H_2:=D(A_0^{\frac{1}{2}}),V_2:=D(A_0),H_3:=D(A_1^{\frac{1}{2}}),V_3:=D(A_1),H_4:=D(A_1^{\frac{3}{2}})$,且空间 H_2,V_2,H_3,V_3 和 H_4 的范数分别为 $\|\cdot\|_{H_2},\|A_0\cdot\|_{L^2},\|\cdot\|_{H_3},\|A_1\cdot\|_{L^2}$ 和 $\|\cdot\|_{H_4}$.设(B_0,B_1,B_2)为从空间$(V_1\times V_1,V_3\times V_3,V_1\times V_3)$到$(L^2(D),L^2(D),L^2(D))$的非线性算子且满足$(B_0(u,v),w)=\int_D(u\cdot\nabla v)\cdot w\mathrm{d}x$,$(B_1(\mu,\phi),w)=\int_D\mu(\nabla\phi\cdot w)\mathrm{d}x$,$(B_2(u,\phi),\rho)=\int_D(u\cdot\nabla\phi)\cdot\rho\mathrm{d}x$,其中 $B_0(u,v)=Pu\cdot\nabla v,B_1(\mu,\phi)=P\mu\nabla\phi,B_2(u,\phi)=u\cdot\nabla\phi$.

设 W^1 和 W^2 是取值于 Hilbert 空间 H 的 Wiener 过程,且 Wiener 过程 W^1 和 W^2 分别具有正对称迹算子 Q^1 和 Q^2.记 $Q:=(Q^1,Q^2)$.令 $H_0:=Q^{\frac{1}{2}}H$,则 H_0 是 Hilbert 空间,且范数为 $\|\cdot\|_0^2$.令 $L_2(H_0;H)$ 为线性算子 S 的空间,其范数为 $\|S\|_{L_2(H_0;H)}^2:=\mathrm{tr}(SQS^*)$,其中 S^* 是 S 的伴随算子.

1.2 基本定义

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间,$\{\mathscr{F}_t\}_{0\le t\le T}\subset\mathscr{F}$是它的$\sigma$-代数流.令$\mathscr{E}$为 Polish 空间,$\mathscr{B}(\mathscr{E})$是它的 Borel σ-域.假设$\mathscr{A}$为 H_0 值$\{\mathscr{F}_t\}$-可料过程 h 的集合,且满足$\int_0^T\|h\|_0^2\mathrm{d}t\le\infty$,a.s..任给 $M>0$,定义

$$S_M:=\{h\in L^2([0,T];H_0)\mid\int_0^T\|h\|_0^2\mathrm{d}t\le M\}\text{ 和 }\mathscr{A}_M:=\{h\in\mathscr{A}\mid h(\omega)\in S_M,\text{a.s.}\},$$

其中 S_M 是弱拓扑下的 Polish 空间.

定义 1 假设 I 为$\mathscr{E}$上的速率函数,即对任意的$\widetilde{M}<\infty$,水平集$\{x\in\mathscr{E}\mid I(x)\le\widetilde{M}\}$是$\mathscr{E}$的紧子集.一族$\mathscr{E}$值随机变量$\{O^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$在空间$\mathscr{E}$上满足具有速率函数 I 的大偏差原理,若满足条件

(i)大偏差上界:对于$\mathscr{E}$的任何闭子集 Ξ_1,有$\limsup\limits_{\varepsilon\to0}\varepsilon\lg P(O^\varepsilon\in\Xi_1)\le-\inf\limits_{x\in\Xi_1}I(x)$;

(ii)大偏差下界:对于$\mathscr{E}$的任何开子集 Ξ_2,有$\liminf\limits_{\varepsilon\to0}\varepsilon\lg P(O^\varepsilon\in\Xi_2)\ge-\inf\limits_{x\in\Xi_2}I(x)$.

令 $f(\phi^\varepsilon):=(\phi^\varepsilon)^3-\phi^\varepsilon$,则方程(1)可转化为

$$\begin{cases}\mathrm{d}u^\varepsilon+A_0u^\varepsilon\mathrm{d}t+B_0(u^\varepsilon,u^\varepsilon)\mathrm{d}t-B_1(A_1\phi^\varepsilon,\phi^\varepsilon)\mathrm{d}t=\sqrt{\varepsilon}P\sigma(t,u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)\mathrm{d}W^1,\\ \mathrm{d}\phi^\varepsilon+A_1\mu^\varepsilon\mathrm{d}t+B_2(u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)\mathrm{d}t=\sqrt{\varepsilon}g(t,\phi^\varepsilon)\mathrm{d}W^2,\\ \mu^\varepsilon=A_1\phi^\varepsilon+f(\phi^\varepsilon),\\ u^\varepsilon(0,x)=u_0,\phi^\varepsilon(0,x)=\phi_0,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $B_1(A_1\phi^\varepsilon,\phi^\varepsilon)=B_1(\mu^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$.

根据文献[6]得,当 $\varepsilon\to0$ 时,方程(2)的解$(u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$逼近下述方程的解$(u^0,\phi^0)$,

$$\begin{cases}du^0+A_0u^0\mathrm{d}t+B_0(u^0,u^0)\mathrm{d}t-B_1(A_1\phi^0,\phi^0)\mathrm{d}t=0,\\ d\phi^0+A_1\mu^0\mathrm{d}t+B_2(u^0,\phi^0)\mathrm{d}t=0,\\ \mu^0=A_1\phi^0+f(\phi^0),\\ u^0(0,x)=u_0,\phi^0(0,x)=\phi_0.\end{cases}\tag{3}$$

定义 2　假设 $(u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ 和 (u^0,ϕ^0) 分别为方程(2)和(3)的解，若 $(\frac{u^\varepsilon-u^0}{\sqrt{\varepsilon}\lambda(\varepsilon)},\frac{\phi^\varepsilon-\phi^0}{\sqrt{\varepsilon}\lambda(\varepsilon)})$ 在空间 $\mathscr{C}([0,T];H_1\times H_3)\cap L^2([0,T];V_1\times V_3)$ 中满足大偏差原理，且偏差尺度 $\lambda(\varepsilon)$ 取值于大偏差尺度 $(\lambda(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}})$ 和中心极限定理尺度 $(\lambda(\varepsilon)=1)$ 之间，即当 $\varepsilon\to0$ 时，偏差尺度 $\lambda(\varepsilon)$ 满足 $\lambda(\varepsilon)\to+\infty$ 和 $\sqrt{\varepsilon}\lambda(\varepsilon)\to0$，则称此类特殊的大偏差原理为 $(u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)$ 的中偏差原理.

1.3　相关引理

引理 1[12]　令可测函数 $\Gamma^\varepsilon:\mathscr{C}([0,T];H)\to\mathscr{E}$，如果存在一个可测函数 $\Gamma^0:\mathscr{C}([0,T];H)\to\mathscr{E}$，使得对任意的 $M>0$ 有(i)若当 $\varepsilon\to0$ 时，集合 $\{h_\varepsilon\in\mathscr{A}_M,\varepsilon>0\}$ 依分布收敛到 $h\in S_M$，有 $\Gamma^\varepsilon(W(\cdot)+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^\cdot h_\varepsilon(s)\mathrm{d}s)$ 依分布收敛到 $\Gamma^0(\int_0^\cdot h(s)\mathrm{d}s)$；(ii)集合 $\{\Gamma^0(\int_0^\cdot h(s)\mathrm{d}s),h\in S_M\}$ 是空间 $\mathscr{E}$ 中的紧集，则称 $\Gamma^\varepsilon(W(\cdot))_{\varepsilon>0}$ 在空间 $\mathscr{E}$ 中满足具有速率函数 I 的大偏差原理，其中速率函数 $I(g)=\inf\limits_{\{h\in L^2([0,T];H_0)|g=\Gamma^0(\int_0^\cdot h(s)\mathrm{d}s)\}}\{\frac{1}{2}\int_0^T\|h(s)\|_0^2\mathrm{d}s\}$，$g\in\mathscr{E}$. 特别地，记 $\inf\{\varnothing\}:=\infty$.

引理 2[6]　存在正常数 c 使得非线性算子 B_0,B_1,B_2 满足

$$\|B_0(u,v)\|_{L^2}\le c\|u\|_{H_1}^{\frac12}\|u\|_{V_1}^{\frac12}\|v\|_{H_2}^{\frac12}\|A_0v\|_{L^2}^{\frac12},u\in V_1,v\in V_2,$$

$$\|B_1(A_1\phi,\rho)\|_{L^2}\le c\|\rho\|_{H_3}^{\frac12}\|A_1\rho\|_{L^2}^{\frac12}\|A_1\phi\|_{L^2}^{\frac12}\|\phi\|_{H_4}^{\frac12},\rho\in V_3,\phi\in H_4,$$

$$\|B_2(u,\phi)\|_{L^2}\le c\|u\|_{H_1}^{\frac12}\|u\|_{V_1}^{\frac12}\|\phi\|_{H_3}^{\frac12}\|A_1\phi\|_{L^2}^{\frac12},u\in V_1,\phi\in V_3.$$

假设 1　对于方程(2)，假设存在正常数 K_1 和 K_2 使得对任意的 $t\in[0,T]$，函数 σ 和 g 满足

(i) $\sigma\in\mathscr{C}([0,T]\times V_1\times V_3;L_2(H_0;H_1))$，$g\in\mathscr{C}([0,T]\times V_3;L_2(H_0;H_3))$；

(ii) $\|\sigma(t,u,\phi)\|_{L_2(H_0;H_1)}^2\le K_2(1+\|u\|_{H_1}^2+\|\phi\|_{H_3}^2)$，$u\in H_1,\phi\in H_3$；

(iii) $\|\sigma(t,u_1,\phi_1)-\sigma(t,u_2,\phi_2)\|_{L_2(H_0;H_1)}^2\le K_1(\|u_1-u_2\|_{H_1}^2+\|\phi_1-\phi_2\|_{H_3}^2)$，$u_1,u_2\in H_1,\phi_1,\phi_2\in H_3$；

(iv) $\|g(t,\phi)\|_{L_2(H_0;H_3)}^2\le K_2(1+\|\phi\|_{H_3}^2)$，$\phi\in H_3$；

(v) $\|g(t,\phi_1)-g(t,\phi_2)\|_{L_2(H_0;H_3)}^2\le K_1\|\phi_1-\phi_2\|_{H_3}^2$，$\phi_1,\phi_2\in H_3$.

本文除特别说明外，C 是与参数 ε 无关的正常数，且常数 C 的值有所不同. 记 1_Υ 为属于 Υ 的有界闭集，Υ^c 为 Υ 的补集.

2　近似系统

令 $(Z^\varepsilon,Y^\varepsilon):=(\frac{u^\varepsilon-u^0}{\sqrt{\varepsilon}\lambda(\varepsilon)},\frac{\phi^\varepsilon-\phi^0}{\sqrt{\varepsilon}\lambda(\varepsilon)})$ 和 $\mathscr{X}^\varepsilon:=\frac{\mu^\varepsilon-\mu^0}{\sqrt{\varepsilon}\lambda(\varepsilon)}$，由方程(2)和(3)得：

$$\begin{cases}\mathrm{d}Z^\varepsilon+A_0Z^\varepsilon\mathrm{d}t+B_0(Z^\varepsilon,u^\varepsilon)\mathrm{d}t+B_0(u^0,Z^\varepsilon)\mathrm{d}t=B_1(A_1Y^\varepsilon,\phi^\varepsilon)\mathrm{d}t+B_1(A_1\phi^0,Y^\varepsilon)\mathrm{d}t+\\ \lambda^{-1}(\varepsilon)P\sigma(t,u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)\mathrm{d}W^1,\\ \mathrm{d}Y^\varepsilon+A_1\mathscr{X}^\varepsilon\mathrm{d}t+B_2(Z^\varepsilon,\phi^\varepsilon)\mathrm{d}t+B_2(u^0,Y^\varepsilon)\mathrm{d}t=\lambda^{-1}(\varepsilon)g(t,\phi^\varepsilon)\mathrm{d}W^2,\\ \mathscr{X}^\varepsilon=A_1Y^\varepsilon+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\lambda(\varepsilon)}(f(\phi^\varepsilon)-f(\phi^0)),\end{cases}\tag{4}$$

带初值 $Z^{\varepsilon}(0)=0,Y^{\varepsilon}(0)=0$.显然方程(4)存在唯一的解$(Z^{\varepsilon},Y^{\varepsilon})$.令$(Z^{\varepsilon},Y^{\varepsilon}):=\mathscr{G}^{\varepsilon}(W(\cdot))$,其中 $\mathscr{G}^{\varepsilon}$ 是从空间 $\mathscr{C}([0,T];H)$ 到 $\mathscr{C}([0,T];H_1\times H_3)\cap L^2([0,T];V_1\times V_3)$ 的 Borel 可测函数.

给定 $\varepsilon_0\in(0,1]$,对任意的$\{h_{\varepsilon}\}_{\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]}\subset\mathscr{A}_M$,考虑随机控制方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}\bar{Z}^{\varepsilon}+A_0\bar{Z}^{\varepsilon}\mathrm{d}t+B_0(\bar{Z}^{\varepsilon},u^{\varepsilon})\mathrm{d}t+B_0(u^0,\bar{Z}^{\varepsilon})\mathrm{d}t=B_1(A_1\bar{Y}^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})\mathrm{d}t+B_1(A_1\phi^0,\bar{Y}^{\varepsilon})\mathrm{d}t+\\ \lambda^{-1}(\varepsilon)P\sigma(t,u^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})\mathrm{d}W^1+P\sigma(t,u^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})h_{\varepsilon}\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}\bar{Y}^{\varepsilon}+A_1\bar{\mathscr{X}}^{\varepsilon}\mathrm{d}t+B_2(\bar{Z}^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})\mathrm{d}t+B_2(u^0,\bar{Y}^{\varepsilon})\mathrm{d}t=\lambda^{-1}(\varepsilon)g(t,\phi^{\varepsilon})\mathrm{d}W^2+g(t,\phi^{\varepsilon})h_{\varepsilon}\mathrm{d}t,\\ \bar{\mathscr{X}}^{\varepsilon}=A_1\bar{Y}^{\varepsilon}+\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}\lambda(\varepsilon)}(f(\phi^{\varepsilon})-f(\phi^0)),\end{cases}\tag{5}$$

带初值 $\bar{Z}^{\varepsilon}(0)=0,\bar{Y}^{\varepsilon}(0)=0$.根据文献[6],用 Galerkin 方法,易知方程(5)在空间 $L^2(\Omega;\mathscr{C}([0,T];H_1\times H_3))\cap L^2(\Omega\times[0,T];V_1\times V_3)$ 中存在唯一的解$(\bar{Z}^{\varepsilon},\bar{Y}^{\varepsilon})$.进而$(\bar{Z}^{\varepsilon},\bar{Y}^{\varepsilon})=\mathscr{G}^{\varepsilon}(W(\cdot)+\lambda(\varepsilon)\int_0^{\cdot}h_{\varepsilon}(s)\mathrm{d}s)$.

任给 $s\in[kT2^{-n},(k+1)T2^{-n})$,令$\underline{s}_n:=kT2^{-n}$ 和$\bar{s}_n:=(k+1)T2^{-n}$,其中 $k=2^n-1$(整数 $n\geq 0$).对任意的 $t\in[0,T]$,$N>0$,令

$$G_N(t):=\{\sup_{s\in[0,t]}(\|\bar{Z}^{\varepsilon}\|_{H_1}^2+\|\bar{Y}^{\varepsilon}\|_{H_3}^2)+\int_0^t\|\bar{Z}^{\varepsilon}\|_{V_1}^2+\|A_1\bar{Y}^{\varepsilon}\|_{L^2}^2+\|\bar{Y}^{\varepsilon}\|_{H_4}^2\mathrm{d}s\leq N\}\cap$$
$$\{\sup_{s\in[0,t]}(\|u^{\varepsilon}\|_{H_1}^2+\|\phi^{\varepsilon}\|_{H_3}^2)+\int_0^t\|u^{\varepsilon}\|_{V_1}^2+\|A_1\phi^{\varepsilon}\|_{L^2}^2+\|\phi^{\varepsilon}\|_{H_4}^2\mathrm{d}s\leq N\}.$$

引理 3 任给 $\varepsilon_0>0$,若函数 σ 和 g 满足假设 1,则对任意的 $h_{\varepsilon}\in\mathscr{A}_M$,$\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$,有

$$E(1_{G_N(T)}\int_0^T\|\bar{Z}^{\varepsilon}(s)-\bar{Z}^{\varepsilon}(\bar{s}_n)\|_{H_1}^2+\|\bar{Y}^{\varepsilon}(s)-\bar{Y}^{\varepsilon}(\bar{s}_n)\|_{H_3}^2\mathrm{d}s)\leq C2^{-n},$$
$$E(1_{G_N(T)}\int_0^T\|u^{\varepsilon}(s)-u^{\varepsilon}(\bar{s}_n)\|_{H_1}^2+\|\phi^{\varepsilon}(s)-\phi^{\varepsilon}(\bar{s}_n)\|_{H_3}^2\mathrm{d}s)\leq C2^{-n}.$$

证明 根据文献[13],利用 Itô 公式和 Fubini 定理易证上述结论.

任给 $h\in\mathscr{A}_M$,考虑确定性控制方程

$$\begin{cases}\mathrm{d}Z_h+A_0Z_h\mathrm{d}t+B_0(Z_h,u^0)\mathrm{d}t+B_0(u^0,Z_h)\mathrm{d}t=B_1(A_1Y_h,\phi^0)\mathrm{d}t+B_1(A_1\phi^0,Y_h)\mathrm{d}t+\\ P\sigma(t,u^0,\phi^0)h\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}Y_h+A_1\mathscr{X}_h\mathrm{d}t+B_2(Z_h,\phi^0)\mathrm{d}t+B_2(u^0,Y_h)\mathrm{d}t=g(t,\phi^0)h\mathrm{d}t,\\ \mathscr{X}_h=A_1Y_h,\end{cases}\tag{6}$$

带初值 $Z_h(0)=0,Y_h(0)=0$.根据文献[6],用 Galerkin 方法,易知方程(6)在空间 $\mathscr{C}([0,T];H_1\times H_3)\cap L^2([0,T];V_1\times V_3)$ 中存在唯一的解(Z_h,Y_h).进而类似文献[14]中定理 3.1 的证明,易得$(Z_h,Y_h)=\mathscr{G}^0(\int_0^{\cdot}h(s)\mathrm{d}s)$,其中 $\mathscr{G}^0$ 是从空间 $\mathscr{C}([0,T];H)$ 到 $\mathscr{C}([0,T];H_1\times H_3)\cap L^2([0,T];V_1\times V_3)$ 的可测函数.

对任意的 $t\in[0,T]$,$N>0$,令

$$\hat{G}_N(t):=\{\sup_{s\in[0,t]}(\|Z_h\|_{H_1}^2+\|Y_h\|_{H_3}^2)\leq N\}\cap\{\int_0^t\|Z_h\|_{V_1}^2+\|A_1Y_h\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leq N\}\cap$$
$$\{\sup_{s\in[0,t]}(\|u^0\|_{H_1}^2+\|\phi^0\|_{H_3}^2)\leq N\}\cap\{\int_0^t\|u^0\|_{V_1}^2+\|A_1\phi^0\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leq N\},$$
$$G_N^{\varepsilon}(t):=\hat{G}_N(t)\cap\{\sup_{s\in[0,t]}(\|\bar{Z}^{\varepsilon}\|_{H_1}^2+\|\bar{Y}^{\varepsilon}\|_{H_3}^2)\leq N\}\cap\{\int_0^t\|\bar{Z}^{\varepsilon}\|_{V_1}^2+\|A_1\bar{Y}^{\varepsilon}\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leq N\}\cap$$
$$\{\sup_{s\in[0,t]}(\|u^{\varepsilon}\|_{H_1}^2+\|\phi^{\varepsilon}\|_{H_3}^2)\leq N\}\cap\{\int_0^t\|u^{\varepsilon}\|_{V_1}^2+\|A_1\phi^{\varepsilon}\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leq N\}.$$

引理 4 任给 $\varepsilon_0>0$,当 $N\to\infty$ 时,有$\sup_{0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0}\sup_{h,h_{\varepsilon}\in\mathscr{A}_M}P(G_N^{\varepsilon}(t)^c)\to 0$.

证明 根据文献[13],利用 Markov 不等式易证上述结论.

引理 5 假设$(u^{\varepsilon},\phi^{\varepsilon})$和$(u^0,\phi^0)$分别为方程(2)和(3)的解,则存在正常数 ε_0 使得对任意的 $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$,有 $E(1_{G_N^{\varepsilon}(T)}(\sup_{t\in[0,T]}(\|u^{\varepsilon}-u^0\|_{H_1}^2+\|\phi^{\varepsilon}-\phi^0\|_{H_3}^2)+\int_0^T\|u^{\varepsilon}-u^0\|_{V_1}^2+\|A_1(\phi^{\varepsilon}-\phi^0)\|_{L^2}^2\mathrm{d}t))\leq C\varepsilon$.

证明　令 $\tilde{u}:=u^\varepsilon-u^0$，$\tilde{\phi}:=\phi^\varepsilon-\phi^0$ 且 $\tilde{\mu}:=\mu^\varepsilon-\mu^0$．分别对 $\|\tilde{u}\|_{H_1}^2$ 和 $\|\tilde{\phi}\|_{H_3}^2$ 运用 Itô 公式，且对等式 $\tilde{\mu}=A_1\tilde{\phi}+f(\phi^\varepsilon)-f(\phi^0)$ 两边分别用 $A_1\tilde{\mu}-A_1\tilde{\phi}$ 作内积，可得：

$$
\begin{gathered}
E(1_{G_N^\varepsilon(T)}(\sup_{0\le t\le T}(\|\tilde{u}\|_{H_1}^2+\|\tilde{\phi}\|_{H_3}^2)+2\int_0^T\|\tilde{u}\|_{V_1}^2+\|A_1\tilde{\phi}\|_{L^2}^2+\|\tilde{\mu}\|_{H_3}^2\mathrm{d}t))\le\\
2E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T|(B_0(\tilde{u},u^\varepsilon),\tilde{u})|\mathrm{d}t)+4E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T|(B_1(A_1\tilde{\phi},\phi^\varepsilon),\tilde{u})|\mathrm{d}t)+\\
2E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T|(A_1\tilde{\phi},\tilde{\mu})|\mathrm{d}t)+2E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T|(A_1\tilde{\mu}-A_1\tilde{\phi},f(\phi^\varepsilon)-f(\phi^0))|\mathrm{d}t)+\\
2E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T|(B_2(u^0,\tilde{\phi}),A_1\tilde{\phi})|\mathrm{d}t)+\varepsilon E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T\|\sigma(t,u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)\|_{L_2(H_0;H_1)}^2\mathrm{d}t)+\\
\varepsilon E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T\|g(t,\phi^\varepsilon)\|_{L_2(H_0;H_3)}^2\mathrm{d}t)+2E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T|(B_1(A_1\phi^0,\tilde{\phi}),\tilde{u})|\mathrm{d}t)+\\
2\sqrt{\varepsilon}E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t(\sigma(s,u^\varepsilon,\phi^\varepsilon)\mathrm{d}W^1,\tilde{u})|)+2\sqrt{\varepsilon}E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t(\nabla(g(s,\phi^\varepsilon)\mathrm{d}W^2),\nabla\tilde{\phi})|):=\\
I_1+I_2+\cdots+I_{10}.
\end{gathered}
$$

由引理 2 和假设 1 得：

$$
\begin{aligned}
&I_1\le CE(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T\|\tilde{u}\|_{V_1}^2+\|u^\varepsilon\|_{V_1}^2\|\tilde{u}\|_{H_1}^2\mathrm{d}t),\\
&I_2\le CE(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T\|\tilde{u}\|_{V_1}^2+\|A_1\tilde{\phi}\|_{L^2}^2+\|\tilde{u}\|_{H_1}^2\|\phi^\varepsilon\|_{H_3}^2\|A_1\phi^\varepsilon\|_{L^2}^2\mathrm{d}t),\\
&I_3\le CE(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T\|A_1\tilde{\phi}\|_{L^2}^2+\|\tilde{\mu}\|_{H_3}^2\mathrm{d}t),\\
&I_4\le CE(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T(1+\|\phi^\varepsilon\|_{H_3}^2\vee\|\phi^0\|_{H_3}^2+\|\phi^\varepsilon\|_{H_3}^6\vee\|\phi^0\|_{H_3}^6)\|\tilde{\phi}\|_{H_3}^2+\|A_1\tilde{\phi}\|_{L^2}^2+\|\tilde{\mu}\|_{H_3}^2\mathrm{d}t),\\
&I_5\le CE(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T\|u^0\|_{H_1}^2\|u^0\|_{V_1}^2\|\tilde{\phi}\|_{H_3}^2+\|A_1\tilde{\phi}\|_{L^2}^2\mathrm{d}t),\\
&I_6\le C\varepsilon E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T(1+\|u^\varepsilon\|_{H_1}^2+\|\phi^\varepsilon\|_{H_3}^2)\mathrm{d}t),I_7\le C\varepsilon E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T(1+\|\phi^\varepsilon\|_{H_3}^2)\mathrm{d}t),\\
&I_8\le CE(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T\|\tilde{u}\|_{V_1}^2+\|A_1\tilde{\phi}\|_{L^2}^2+(\|\tilde{u}\|_{H_1}^2+\|\tilde{\phi}\|_{H_3}^2)\|A_1\phi^0\|_{L^2}^2\mathrm{d}t).
\end{aligned}
$$

用 Burkholder-Davis-Gundy 不等式得：

$$
\begin{aligned}
&I_9\le CE(1_{G_N^\varepsilon(T)}\sup_{0\le t\le T}\|\tilde{u}\|_{H_1}^2)+C\varepsilon E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T(1+\|u^\varepsilon\|_{H_1}^2+\|\phi^\varepsilon\|_{H_3}^2)\mathrm{d}t),\\
&I_{10}\le CE(1_{G_N^\varepsilon(T)}\sup_{0\le t\le T}\|\tilde{\phi}\|_{H_3}^2)+C\varepsilon E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T(1+\|\phi^\varepsilon\|_{H_3}^2)\mathrm{d}t).
\end{aligned}
$$

因此，可得：

$$
\begin{gathered}
E(1_{G_N^\varepsilon(T)}(\sup_{0\le t\le T}(\|\tilde{u}\|_{H_1}^2+\|\tilde{\phi}\|_{H_3}^2)+\int_0^T\|\tilde{u}\|_{V_1}^2+\|A_1\tilde{\phi}\|_{L^2}^2\mathrm{d}t))\le CE\int_0^T1_{G_N^\varepsilon(t)}(1+\|u^\varepsilon\|_{V_1}^2+\\
\|\phi^\varepsilon\|_{H_3}^2\|A_1\phi^\varepsilon\|_{L^2}^2+\|A_1\phi^0\|_{L^2}^2+\|u^0\|_{H_1}^2\|u^0\|_{V_1}^2+\|\phi^\varepsilon\|_{H_3}^2\vee\|\phi^0\|_{H_3}^2+\|\phi^\varepsilon\|_{H_3}^6\vee\\
\|\phi^0\|_{H_3}^6)\sup_{0\le s\le t}(\|\tilde{u}\|_{H_1}^2+\|\tilde{\phi}\|_{H_3}^2)\mathrm{d}t+C\varepsilon E(\int_0^T1_{G_N^\varepsilon(t)}(1+\|u^\varepsilon\|_{H_1}^2+\|\phi^\varepsilon\|_{H_3}^2)\mathrm{d}t).
\end{gathered}
$$

进一步，根据 Gronwall 不等式和 $G_N^\varepsilon(t)$ 的定义得：

$$
\begin{gathered}
E(1_{G_N^\varepsilon(T)}(\sup_{0\le t\le T}(\|\tilde{u}\|_{H_1}^2+\|\tilde{\phi}\|_{H_3}^2)+\int_0^T\|\tilde{u}\|_{V_1}^2+\|A_1\tilde{\phi}\|_{L^2}^2\mathrm{d}t))\le\\
\mathrm{e}^C\varepsilon E(\int_0^T1_{G_N^\varepsilon(t)}(1+\|u^\varepsilon\|_{H_1}^2+\|\phi^\varepsilon\|_{H_3}^2)\mathrm{d}t)\le C\varepsilon.
\end{gathered}
$$

证毕．

引理 6　给定 $N>0$，对任意的 $h,h_\varepsilon\in\mathscr{A}_M$，若 h_ε 在空间 $L^2([0,T];H_0)$ 中弱收敛到 h，则

$$
\lim_{\varepsilon\to0}E(1_{G_N^\varepsilon(T)}(\sup_{t\in[0,T]}(\|\bar{Z}^\varepsilon-Z_h\|_{H_1}^2+\|\bar{Y}^\varepsilon-Y_h\|_{H_3}^2)+\int_0^T\|A_1(\bar{Y}^\varepsilon-Y_h)\|_{L^2}^2+\|\bar{Z}^\varepsilon-Z_h\|_{V_1}^2\mathrm{d}t))=0.
$$

证明 令 $(Z_1,Y_1):=(\bar{Z}^\varepsilon-Z_h,\bar{Y}^\varepsilon-Y_h)$ 且 $\mathscr{X}_1:=\bar{\mathscr{X}}^\varepsilon-\mathscr{X}_h$.分别对 $\|Z_1\|_{H_1}^2$ 和 $\|Y_1\|_{H_3}^2$ 运用Itô公式,且对等式 $\mathscr{X}_1=A_1Y_1+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\lambda(\varepsilon)}(f(\phi^\varepsilon)-f(\phi^0))$ 两边分别用 $A_1\mathscr{X}_1-A_1Y_1$ 作内积,类似引理5的证明方法可得:

$$E(1_{G_N^\varepsilon(T)}(\sup_{0\le t\le T}(\|Z_1\|_{H_1}^2+\|Y_1\|_{H_3}^2)+\int_0^T\|Z_1\|_{V_1}^2+\|A_1Y_1\|_{L^2}^2\mathrm{d}t))\le CE\int_0^T 1_{G_N^\varepsilon(t)}(1+\|u^\varepsilon\|_{V_1}^2+\|A_1Y_h\|_{L^2}^2+\|\phi^\varepsilon\|_{H_3}^2\|A_1\phi^\varepsilon\|_{L^2}^2+\|A_1\phi^0\|_{L^2}^2+\|u^0\|_{H_1}^2\|u^0\|_{V_1}^2)\cdot\sup_{0\le s\le t}(\|Z_1\|_{H_1}^2+\|Y_1\|_{H_3}^2)\mathrm{d}t+CE(1_{G_N^\varepsilon(T)}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(\sigma(s,u^0,\phi^0)(h_\varepsilon-h),Z_1)\mathrm{d}s)+CE(1_{G_N^\varepsilon(T)}\cdot\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(\nabla(g(s,\phi^0)(h_\varepsilon-h)),\nabla Y_1)\mathrm{d}s)+C(\varepsilon+\lambda^{-1}(\varepsilon)+\lambda^{-2}(\varepsilon)).$$

进一步,由 Gronwall 不等式和 $G_N^\varepsilon(t)$ 的定义得:

$$E(1_{G_N^\varepsilon(T)}(\sup_{t\in[0,T]}(\|Z_1\|_{H_1}^2+\|Y_1\|_{H_3}^2)+\int_0^T\|Z_1\|_{V_1}^2+\|A_1Y_1\|_{L^2}^2\mathrm{d}t))\le \mathrm{e}^C(\varepsilon+\lambda^{-1}(\varepsilon)+\lambda^{-2}(\varepsilon))+\mathrm{e}^CE(1_{G_N^\varepsilon(T)}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(\sigma(s,u^0,\phi^0)(h_\varepsilon-h),Z_1)\mathrm{d}s)+\mathrm{e}^CE(1_{G_N^\varepsilon(T)}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t(\nabla(g(s,\phi^0)(h_\varepsilon-h)),\nabla Y_1)\mathrm{d}s):=J_1+J_2+J_3.$$

任给 $s\in[kT2^{-n},(k+1)T2^{-n})$,令 $\underline{s}_n:=kT2^{-n}$ 和 $\bar{s}_n:=(k+1)T2^{-n}$,有 $J_2\le C\sum_{i=1}^4 EJ_{2i}$,其中 $k=2^n-1$(整数 $n\ge 0$)且

$$J_{21}:=1_{G_N^\varepsilon(T)}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t(\sigma(s,u^0(s),\phi^0(s))(h_\varepsilon(s)-h(s)),Z_1(s)-Z_1(\bar{s}_n))\mathrm{d}s\right|,$$

$$J_{22}:=1_{G_N^\varepsilon(T)}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t((\sigma(s,u^0(s),\phi^0(s))-\sigma(\bar{s}_n,u^0(\bar{s}_n),\phi^0(\bar{s}_n)))(h_\varepsilon(s)-h(s)),Z_1(\bar{s}_n))\mathrm{d}s\right|,$$

$$J_{23}:=1_{G_N^\varepsilon(T)}\sup_{k\in[1,2^n]}\sup_{t\in[\underline{s}_n,\bar{s}_n]}\left|(\sigma(\bar{s}_n,u^0(\bar{s}_n),\phi^0(\bar{s}_n))\int_{\underline{s}_n}^t h_\varepsilon(s)-h(s)\mathrm{d}s,Z_1(\bar{s}_n))\right|,$$

$$J_{24}:=1_{G_N^\varepsilon(T)}\sum_{k=1}^{2^n}\left|(\sigma(\bar{s}_n,u^0(\bar{s}_n),\phi^0(\bar{s}_n))\int_{\underline{s}_n}^{\bar{s}_n}h_\varepsilon(s)-h(s)\mathrm{d}s,Z_1(\bar{s}_n))\right|.$$

由假设1和引理3得

$$EJ_{21}\le\sqrt{K_2}E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T(1+\|u^0(s)\|_{H_1}^2+\|\phi^0(s)\|_{H_3}^2)^{\frac12}\|h_\varepsilon(s)-h(s)\|_0\|Z_1(s)-Z_1(\bar{s}_n)\|_{H_1}\mathrm{d}s)\le\sqrt{K_2(1+N)}(E\int_0^T\|h_\varepsilon(s)-h(s)\|_0^2\mathrm{d}s)^{\frac12}(E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T\|Z_1(s)-Z_1(\bar{s}_n)\|_{H_1}^2\mathrm{d}s))^{\frac12}\le C2^{-\frac{n}{2}},\tag{7}$$

$$EJ_{22}\le\sqrt{K_1}E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T(\|u^0(s)-u^0(\bar{s}_n)\|_{H_1}^2+\|\phi^0(s)-\phi^0(\bar{s}_n)\|_{H_3}^2)^{\frac12}\|h_\varepsilon(s)-h(s)\|_0\|Z_1(\bar{s}_n)\|_{H_1}\mathrm{d}s)\le\sqrt{K_1MN}(E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\int_0^T(\|u^0(s)-u^0(\bar{s}_n)\|_{H_1}^2+\|\phi^0(s)-\phi^0(\bar{s}_n)\|_{H_3}^2)\mathrm{d}s))^{\frac12}\le C2^{-\frac{n}{2}},\tag{8}$$

$$EJ_{23}\le\sqrt{K_2}E(1_{G_N^\varepsilon(T)}\sup_{k\in[1,2^n]}(1+\|u^0(\bar{s}_n)\|_{H_1}^2+\|\phi^0(\bar{s}_n)\|_{H_3}^2)^{\frac12}\int_{\underline{s}_n}^{\bar{s}_n}\|h_\varepsilon(s)-h(s)\|_0\mathrm{d}s\|Z_1(\bar{s}_n)\|_{H_1})\le\sqrt{K_2N(1+N)}E(\sup_{k\in[1,2^n]}\int_{\underline{s}_n}^{\bar{s}_n}\|h_\varepsilon(s)-h(s)\|_0\mathrm{d}s)\le C2^{-\frac{n}{2}},\tag{9}$$

其中常数 C 与 n 无关.

根据 J_{23} 的证明方法类似可得 $J_{24}\le C\sqrt{K_2MN(1+N)}$.当 $\varepsilon\to 0$ 时,h_ε 在空间 $L^2([0,T];H_0)$ 中弱收敛到 h,则对任意的 $a,b\in[0,T]$,$\int_a^b h_\varepsilon(s)\mathrm{d}s$ 在 H_0 中弱收敛到$\int_a^b h(s)\mathrm{d}s$.进一步,由于 $\sigma(t,u,\phi)$ 是从 H_0 到 H_1 的紧映射,则当 $\varepsilon\to 0$ 时,有 $\|\sigma(t,u,\phi)(\int_a^b h_\varepsilon(s)-h(s)\mathrm{d}s)\|_{H_1}\to 0$.

因此,给定 n,当 $\varepsilon\to 0$ 时,有 $J_{24}\to 0$,a.s..进而根据控制收敛定理,当 $\varepsilon\to 0$ 时,有 $EJ_{24}\to 0$,a.s..

任给 $\delta>0$，选取 n_0 足够大使得对所有 $n\geq n_0$，$C2^{-\frac{n}{2}}<\delta$ 成立，则由(7)～(9)式得 $J_2\leq 3\delta$.

类似 J_2 的证明方法得 $J_3\leq 3\delta$.

综上可得 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}E(1_{G_N^\varepsilon(T)}(\sup\limits_{t\in[0,T]}(\|Z_1\|_{H_1}^2+\|Y_1\|_{H_3}^2)+\int_0^T\|Z_1\|_{V_1}^2+\|A_1Y_1\|_{L^2}^2\mathrm{d}t))=0$. 证毕.

3　中偏差原理

命题 1　任给 $M>0$，如果当 $\varepsilon\to 0$ 时，h_ε 在空间 $\mathscr{A}_M$ 中依分布收敛到 h，则 $\mathscr{G}^\varepsilon(W(\cdot)+\lambda(\varepsilon)\int_0^\cdot h_\varepsilon(s)\mathrm{d}s)$ 在空间 $\mathscr{C}([0,T];H_1\times H_3)\cap L^2([0,T];V_1\times V_3)$ 中依分布收敛到 $\mathscr{G}^0(\int_0^\cdot h(s)\mathrm{d}s)$.

证明　令 $X:=\sup\limits_{t\in[0,T]}(\|Z_1\|_{H_1}^2+\|Y_1\|_{H_3}^2)+\int_0^T\|Z_1\|_{V_1}^2+\|A_1Y_1\|_{L^2}^2\mathrm{d}t$，由 Markov 不等式得，任给 $\varepsilon>0$，有 $P(X>\varepsilon)=P(G_N^\varepsilon(T)^c)+\dfrac{1}{\varepsilon}E(1_{G_N^\varepsilon(T)}X)$.

由引理 4 得，任给 $\delta>0$，$\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$，当 N 足够大时，有 $P(G_N^\varepsilon(T)^c)\to 0$.由引理 6 可知给定 N，当 ε 足够小时，有 $E(1_{G_N^\varepsilon(T)}X)<\varepsilon\delta$.进一步，当 n 足够大时，有$\dfrac{1}{\varepsilon}E(1_{G_N^\varepsilon(T)}X)\to 0$. 证毕.

命题 2　任给 $M>0$，令 $K_M:=\{(Z_h,Y_h),h\in S_M\}$，则 K_M 是空间 $\mathscr{C}([0,T];H_1\times H_3)\cap L^2([0,T];V_1\times V_3)$ 中的紧集.

证明　令 (Z_{h_n},Y_{h_n}) 为 K_M 中的序列.由于 S_M 是 Hilbert 空间 $L^2([0,T];H_0)$ 中的有界闭集，则 S_M 弱紧.因此，对任意的 $h\in S_M$，存在 h_n 的子序列 $h_{n'}$ 弱收敛到 h.

令 $(\widetilde{Z}_h,\widetilde{Y}_h):=(Z_{h_{n'}}-Z_h,Y_{h_{n'}}-Y_h)$ 且 $\widetilde{\mathscr{X}}_h:=\mathscr{X}_{h_{n'}}-\mathscr{X}_h$. 类似引理 5 的证明方法得：

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{Z}_h\|_{H_1}^2+\|\widetilde{Y}_h\|_{H_3}^2+\int_0^t\|\widetilde{Z}_h\|_{V_1}^2+\|A_1\widetilde{Y}_h\|_{L^2}^2\mathrm{d}s\leq C\int_0^t(\|u^0\|_{H_1}^2\|u^0\|_{V_1}^2+\|\phi^0\|_{H_3}^2\|A_1\phi^0\|_{L^2}^2+\\&\|A_1\phi^0\|_{L^2}^2)(\|\widetilde{Z}_h\|_{H_1}^2+\|\widetilde{Y}_h\|_{H_3}^2)\mathrm{d}s+C\int_0^t(\sigma(s,u^0,\phi^0)(h_{n'}-h),\widetilde{Z}_h)\mathrm{d}s+\\&C\int_0^t(\nabla(g(s,\phi^0)(h_{n'}-h)),\nabla\widetilde{Y}_h)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

任给 $s\in[kT2^{-n},(k+1)T2^{-n})$，令$\underline{s}_n:=kT2^{-n}$ 和 $\bar{s}_n:=(k+1)T2^{-n}$，其中 $k=2^n-1$(整数 $n\geq 0$).

由 Gronwall 不等式得：

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}(\|\widetilde{Z}_h\|_{H_1}^2+\|\widetilde{Y}_h\|_{H_3}^2)+\int_0^T\|\widetilde{Z}_h\|_{V_1}^2+\|A_1\widetilde{Y}_h\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\leq \mathrm{e}^C\int_0^T|(\sigma(t,u^0(t),\phi^0(t))(h_{n'}(t)-\\&h(t)),\widetilde{Z}_h(t)-\widetilde{Z}_h(\bar{s}_n))|\mathrm{d}t+\mathrm{e}^C\int_0^T|((\sigma(t,u^0(t),\phi^0(t))-\sigma(\bar{s}_n,u^0(\bar{s}_n),\phi^0(\bar{s}_n)))(h_{n'}(t)-\\&h(t)),\widetilde{Z}_h(\bar{s}_n))|\mathrm{d}t+\mathrm{e}^C\sup_{k\in[1,2^n]}\sup_{t\in[\underline{s}_n,\bar{s}_n]}|(\sigma(\bar{s}_n,u^0(\bar{s}_n),\phi^0(\bar{s}_n))\int_{\underline{s}_n}^t h_{n'}(s)-h(s)\mathrm{d}s,\widetilde{Z}_h(\bar{s}_n))|+\\&\mathrm{e}^C\sum_{k=1}^{2^n}|(\sigma(\bar{s}_n,u^0(\bar{s}_n),\phi^0(\bar{s}_n))\int_{\underline{s}_n}^{\bar{s}_n}h_{n'}(s)-h(s)\mathrm{d}s,\widetilde{Z}_h(\bar{s}_n))|+\mathrm{e}^C\int_0^T|(\nabla(g(t,\phi^0(t))(h_{n'}(t)-\\&h(t))),\nabla(\widetilde{Y}_h(t)-\widetilde{Y}_h(\bar{s}_n)))|\mathrm{d}t+\mathrm{e}^C\int_0^T|(\nabla((g(t,\phi^0(t))-g(\bar{s}_n,\phi^0(\bar{s}_n)))(h_{n'}(t)-\\&h(t))),\nabla\widetilde{Y}_h(\bar{s}_n))|\mathrm{d}t+\mathrm{e}^C\sup_{k\in[1,2^n]}\sup_{t\in[\underline{s}_n,\bar{s}_n]}|(\nabla(g(\bar{s}_n,\phi^0(\bar{s}_n))\int_{\underline{s}_n}^t h_{n'}(s)-h(s)\mathrm{d}s),\nabla\widetilde{Y}_h(\bar{s}_n))|+\\&\mathrm{e}^C\sum_{k=1}^{2^n}|(\nabla(g(\bar{s}_n,\phi^0(\bar{s}_n))\int_{\underline{s}_n}^{\bar{s}_n}h_{n'}(s)-h(s)\mathrm{d}s),\nabla\widetilde{Y}_h(\bar{s}_n))|:=\mathscr{Q}_n^1+\mathscr{Q}_n^2+\cdot s+\mathscr{Q}_n^8.\end{aligned}$$

类似引理 6 的证明方法可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathscr{Q}_n^i=0(i=1,2,\cdots,8)$.

综上可得，当 $n\to\infty$ 时，有 $\sup\limits_{t\in[0,T]}(\|\widetilde{Z}_h\|_{H_1}^2+\|\widetilde{Y}_h\|_{H_3}^2)+\int_0^T\|\widetilde{Z}_h\|_{V_1}^2+\|A_1\widetilde{Y}_h\|_{L^2}^2\mathrm{d}t\to 0$. 证毕.

定理 1 任给 $M>0$,当 $\varepsilon\to 0$ 时,$(\bar{Z}^{\varepsilon},\bar{Y}^{\varepsilon})$ 在空间 $\mathscr{C}([0,T];H_1\times H_3)\cap L^2([0,T];V_1\times V_3)$ 中依分布收敛到 (Z_h,Y_h) 且 $\{(Z_h,Y_h),h\in S_M\}$ 是空间 $\mathscr{C}([0,T];H_1\times H_3)\cap L^2([0,T];V_1\times V_3)$ 中的紧集.进一步,当 $\varepsilon\to 0$ 时,偏差尺度 $\lambda(\varepsilon)$ 满足 $\lambda(\varepsilon)\to+\infty$ 和 $\sqrt{\varepsilon}\lambda(\varepsilon)\to 0$,则方程(1)满足中偏差原理.

证明 由命题 1、命题 2 和引理 1 得 $\left(\frac{u^{\varepsilon}-u^{0}}{\sqrt{\varepsilon}\lambda(\varepsilon)},\frac{\phi^{\varepsilon}-\phi^{0}}{\sqrt{\varepsilon}\lambda(\varepsilon)}\right)$ 在空间 $\mathscr{C}([0,T];H_1\times H_3)\cap L^2([0,T];V_1\times V_3)$ 中满足大偏差原理,进而根据中偏差原理的定义得方程(1)满足中偏差原理.证毕.

参 考 文 献

[1] GURTIN M E,POLIGNONE D,VINALS J.Two-phase binary fluids and immiscible fluids described by an order parameter[J].Math Models Methods Appl Sci,1996,6(6):815-831.

[2] HOHENBERG P C,HALPERIN B I.Theory of dynamic critical phenomena[J].Rev Mod Phys,1977,49(3):435-479.

[3] GAL C G,GRASSELLI M.Asymptotic behavior of a Cahn-Hilliard-Navier-Stokes system in 2D[J].Ann Inst H Poincaré C Anal Non Linéaire,2010,27(1):401-436.

[4] QIU Z Y.Invariant measure for 2D stochastic Cahn-Hilliard-Navier-Stokes equations[J].arXiv:2008.09221.DOI:10.1007/s00033-020-01312-w.

[5] MEDJO T T.On the existence and uniqueness of solution to a stochastic 2D Cahn-Hilliard-Navier-Stokes model[J].J Differ Equ,2017,263(2):1028-1054.

[6] QIU Z Y,WANG H Q.Large deviation principle for the 2D stochastic Cahn-Hilliard-Navier-Stokes equations[J].Z Angew Math Phys,2020,71(3):88.

[7] DEMBO A,ZEITOUNI O.Large Deviations Techniques and Applications[M].Boston:Jones and Bartlett Publishers,1993.

[8] 蒲学科,陆宇婷.具有乘性噪声的随机高阶准地转方程的大偏差[J].河南师范大学学报(自然科学版),2019,47(6):1-7.
PU X K,LU Y T.Large deviation principle for the prototype model of the wind-driven ocean circulation[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2019,47(6):1-7.

[9] WANG R,ZHAI J L,ZHANG T S.A moderate deviation principle for 2D stochastic Navier-Stokes equations[J].J Differ Equ,2015,258(10):3363-3390.

[10] BELFADLI R,BOULANBA L,MELLOUK M.Moderate deviations for a stochastic Burgers equation[J].Mod Stoch Theory Appl,2019,6(2):167-193.

[11] LI R N,WANG X Y.Central limit theorem and moderate deviations for a perturbed stochastic Cahn-Hilliard equation[J].Stoch Dyn,2020,20(3):2050017.

[12] BUDHIRAJA A,DUPUIS P.A variational representation for positive functionals of infinite dimensional Brownian motion[J].Probab Math Statist,2000,20(1):288-292.

[13] DUAN J Q,MILLET A.Large deviations for the Boussinesq equations under random influences[J].Stoch Proc Appl,2009,119(6):2052-2081.

[14] TEMAM R,CHORIN A.Navier-Stokes equations theory and numerical analysis[J].J Appl Mech,1984,2(2):456.

A moderate deviation principle of 2D stochastic Cahn-Hilliard-Navier-Stokes equation

Chen Guanggan, Wang Yueyang, Yang Min

(School of Mathematical Sciences; Visual Computing and Virtual Reality Key Labora Key Lab,
Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)

Abstract: This paper considers a stochastic Cahn-Hilliard-Navier-Stokes equation with multiplicative noise in a bounded domain in $\mathbf{R}^2$, which is an important mathematical model to describe the motion of isothermal incompressible binary fluid. Due to perturbing of multiplicative noise, the system becomes more complicated. By constructing a new approximate system and using the classical weak convergence method, the moderate deviation principle of the system is proved.

Keywords: moderate deviation principle; stochastic Cahn-Hilliard-Navier-Stokes equation; weak convergence method

[责任编校 陈留院 赵晓华]