

简谐势阱中理想费米气体的热力学性质

王磊

(菏泽学院 物理与电子工程系, 山东 菏泽 274015)

摘要:采用 Thomas-Fermi 半经典近似,研究了任意维简谐势阱中理想费米气体的热力学性质.解析推导出了化学势、费米能和比热的通用表达式,讨论了空间维度和势阱的影响.数值计算了二维和三维费米系统的特征热力学量,与经典极限较好地吻合.

关键词:简谐势阱;费米气体;热力学性质

中图分类号:O469

文献标志码:A

随着低温冷却技术和磁阱技术的发展,外势场囚禁的超冷简并费米体系的研究已经成为凝聚态物理领域引人瞩目的热点问题^[1-4].虽然费米体系受泡利不相容原理的限制不会产生类似于玻色气体的玻色-爱因斯坦凝聚那样的新奇量子现象,但处于极低温度和外势场囚禁下的费米气体有其独特的量子行为,已在光晶格钟^[5]和原子干涉仪等新器件的研制中得到了广泛应用.

低温下,粒子间的相互作用主要是由 s 波散射振幅决定的^[6].对于费米子系统,由于波函数具有反对称性,即处在同一自旋态的两个费米子不可能有 s 波散射,因此 s 波散射振幅为零.而下一级的 p 波散射的振幅又很小,可以忽略不计,因此费米子间的相互作用非常弱,可以将费米系统近似看作理想系统.理论研究者将低温下的稀薄费米系统和自旋极化费米气体^[7]当作理想情况处理就是很好的近似.

外势场囚禁能够改变理想费米系统的热力学性质,引导人们更好的操控和利用量子简并气体,所以实验上大多都将粒子囚禁在磁势阱或光势阱中^[8].由于束缚在外势阱中的冷原子感受到的外势场可以近似等效为简谐势阱,而且简谐势阱中的理想量子气体的热力学量大都是解析的,因此简谐势阱成为研究量子气体最常用的外势阱^[9-10].研究简谐势阱约束的费米气体对于进一步揭示冷原子中的宏观量子现象具有十分重要的意义.

半经典的 Thomas-Fermi 方法因其简洁性和易操作性已经被广泛应用于研究势阱中理想玻色和费米体系的热力学行为^[11-13].然而在某些特殊条件下,如果体系的量子化特性变得十分明显,那么由于半经典方法对变量连续性的限制,这必将会导致不精确的结果.而数值方法则会更严格的遵循量子化的要求,能够有效弥补半经典方法的不足.

综上,本文将首先应用半经典近似给出任意维简谐势阱约束的理想费米气体的热力学量表达式,紧接着通过数值方法计算二维和三维简谐势阱约束的费米系统化学势、总能和比热容,并与解析结果的极限值进行对比,以加深对费米气体热力学量的认识.

1 模型和系统总能

首先建立束缚在各向同性简谐势阱中,不考虑自旋的理想费米气体模型,该模型对应的单粒子能谱为

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2, \quad (1)$$

收稿日期:2016-04-12;修回日期:2016-05-20.

基金项目:国家自然科学基金(11504021);山东省高等学校科技计划项目(J15LJ55).

作者简介(通信作者):王磊(1985-),男,山东菏泽人,菏泽学院讲师,研究方向为冷原子物理理论,E-mail:wlxwanglei@163.com.

式中, p, m, r 分别为费米子的动量、质量、空间坐标, ω 为简谐势阱频率.

采用半经典方法求解热力学量通常有两种方法^[14]: 1) 引入相空间积分来取代对量子态的求和; 2) 借助于合适的态密度函数对物理量直接进行积分.

以计算系统的粒子数为例, 两种半经典方法分别对应表达式

$$N = \sum_{\epsilon} n(\epsilon) = \sum_{\epsilon} \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/(k_B T)} + 1} = \frac{1}{h^n} \int \frac{d^n r d^n p}{e^{(\epsilon-\mu)/(k_B T)} + 1}, \quad (2)$$

和

$$N = \int_0^{\infty} \rho(\epsilon) n(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^{n-1}}{(n-1)! (\hbar\omega)^n} \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1} d\epsilon, \quad (3)$$

式中, $n(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1}$ 和 $\rho(\epsilon) = \frac{\epsilon^{n-1}}{(n-1)! (\hbar\omega)^n}$ 分别对应费米分布函数和任意维各向同性简谐势阱中粒子的态密度. n 为空间维度, μ 代表化学势, k_B 和 h 分别为玻尔兹曼常数和普朗克常数, $\hbar = h/(2\pi)$.

引入费米积分函数

$$F_s(z) = - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-z)^j}{j^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{z^{-1}e^x + 1} dx, \quad (4)$$

并定义函数 $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy$ 和逸度 $z = e^{\mu/k_B T}$ 后, 可求得系统总粒子数为

$$N = F_n(z) \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^n. \quad (5)$$

同样的方法可求得系统的总能为

$$E = \sum_{\epsilon} \frac{\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1} = \frac{1}{h^n} \int \frac{\epsilon d^n r d^n p}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1} \quad (6)$$

或

$$E = \int_0^{\infty} \epsilon \rho(\epsilon) n(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\infty} \frac{\epsilon^n}{(n-1)! (\hbar\omega)^n} \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} + 1} d\epsilon. \quad (7)$$

经积分后有

$$E = n F_{n+1}(z) \frac{(k_B T)^{n+1}}{(\hbar\omega)^n} = n N k_B T \frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)}. \quad (8)$$

2 费米能、化学势和比热容

由粒子数表达式(5), 可求出系统费米能 ϵ_F , 并讨论费米系统的化学势在低温和高温极限的情况. 当温度很低时, 逸度 $z = e^{\beta\mu} \rightarrow \infty$, 通过索末菲引理, 可将费米积分函数 $F_s(z)$ 展开成一个迅速收敛的级数序列^[13]

$$F_s(z) = \frac{(\ln z)^s}{\Gamma(s+1)} \left[1 + s(s-1) \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{(\ln z)^2} + s(s-1)(s-2)(s-3) \frac{7\pi^4}{360} \frac{1}{(\ln z)^4} + \dots \right]. \quad (9)$$

将上式代入式(5)和(8), 可得费米能 ϵ_F 和系统基态总能量,

$$\epsilon_F = \hbar\omega [N \Gamma(n+1)]^{1/n}, \quad (10)$$

$$E(0) = N n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+2)} \epsilon_F. \quad (11)$$

当温度很低时, 将方程(9)代入式(5), 可得化学势的低温极限

$$\mu = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{6} (n-1) \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 \right]. \quad (12)$$

当系统处于高温时, $z \rightarrow 0$, 可以在费米积分函数的级数展开式(4)中仅保留第一项的影响, 此时可得化学势的高温极限(经典极限)

$$\mu = -k_B T \ln \left[\Gamma(n+1) \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^n \right]. \quad (13)$$

系统的比热容可由总能对温度求导得出

$$C(T) = \frac{\partial E}{\partial T} = nNk_B \left[(n+1) \frac{F_{n+1}(z)}{F_n(z)} - n \frac{F_n(z)}{F_{n-1}(z)} \right]. \quad (14)$$

上述推导利用了费米函数关系式 $\frac{\partial F_n(z)}{\partial T} = F_{n-1}(z) \frac{\partial \ln z}{\partial T}$ 和粒子数守恒方程 $\frac{\partial N}{\partial T} = 0$.

将方程(9)代入式(14), 同理可求得比热的低温极限

$$C = nNk_B \frac{\pi^2 k_B T}{3\epsilon_F}, \quad (15)$$

和高温极限

$$C = nNk_B. \quad (16)$$

以上是由 Thomas-Fermi 半经典近似得到的热力学量基于热力学极限下的近似, 下面将对化学势、总能和比热分别进行数值计算, 以便和解析结果的极限情况做比较.

3 数值结果与讨论

数值计算中设定粒子数 $N = 2000$, 通过求解粒子数方程 $N = \sum \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/(k_B T)} + 1}$ 给出化学势 μ , 然后将 μ 代入内能和比热表达式求解. 图 1 ~ 3 分别给出了化学势、单粒子内能和比热在二维和三维简谐势阱中的数值结果, 约定实线代表数值结果(NUM), 短横线和短点线分别对应半经典近似的低温极限(LA) 和高温极限(HA).

图 1(a)和(b)分别给出了二维和三维简谐势阱中费米子化学势的数值结果与低温和高温极限的对比. 结合图 1(a)和(b)可知, 简谐势阱中的费米系统化学势随温度的升高而单调递减, 并不存在玻色气体那样的相变点. 分析可知, 这是由于费米子受泡利不相容原理的限制, 和玻色子遵从完全不同的统计规律所造成的. 外势阱的存在虽然能够改变系统的能量、化学势等物理量的特性, 但并不能改变费米子受泡利不相容原理的限制这一本质属性. 和自由空间相比, 简谐势阱的存在提高了系统的化学势, 这是因为外势阱的存在改变了粒子在空间分布的均匀性, 使得高能量处的态密度远大于低能量处的态密度, 因此外势阱约束的费米系统比自由空间的费米系统需要更高的温度来产生同样的化学势^[14]. 半经典近似的低温和高温极限结果和数值结果分别在低温区和高温区吻合, 表明了采用半经典近似来处理简谐势阱中的费米气体是合理的.

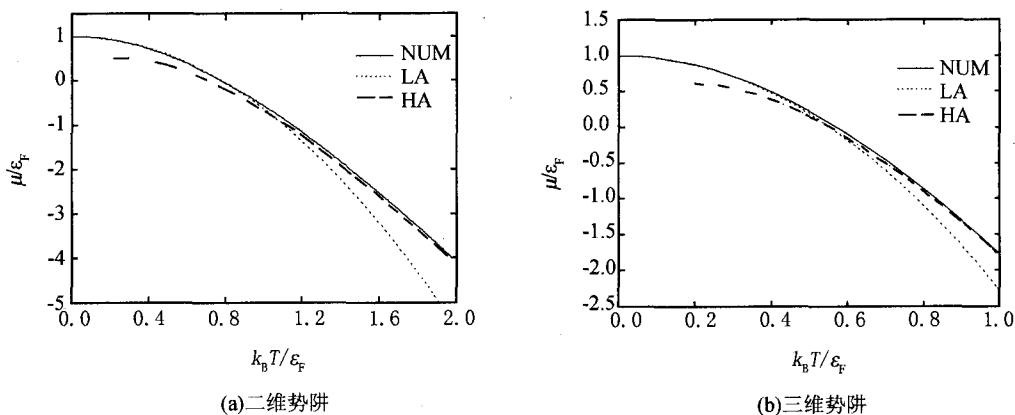


图1 化学势-温度曲线

图 2 给出的单粒子内能-温度曲线表明, 二维和三维简谐势阱中的费米系统内能是连续的. 结合图 3 的单粒子比热-温度曲线可以看出, 比热随温度的升高而单调增加, 并没有在某一临界温度出现突变点, 这是费米和玻色气体最大的不同. 和自由空间相比, 势阱中的费米气体温度升高时不仅需要消耗动能, 而且还需要消耗势阱中的势能, 因此势阱中的费米气体的比热要比自由空间大^[14]. 此外, 比热还和空间维度密切相关, 三维费米系统的比热明显高于二维系统. 二维和三维费米系统均遵从经典的能量均分定理, 高温近似下的单粒子比热值分别趋于经典值 $2Nk_B$ 和 $3Nk_B$.

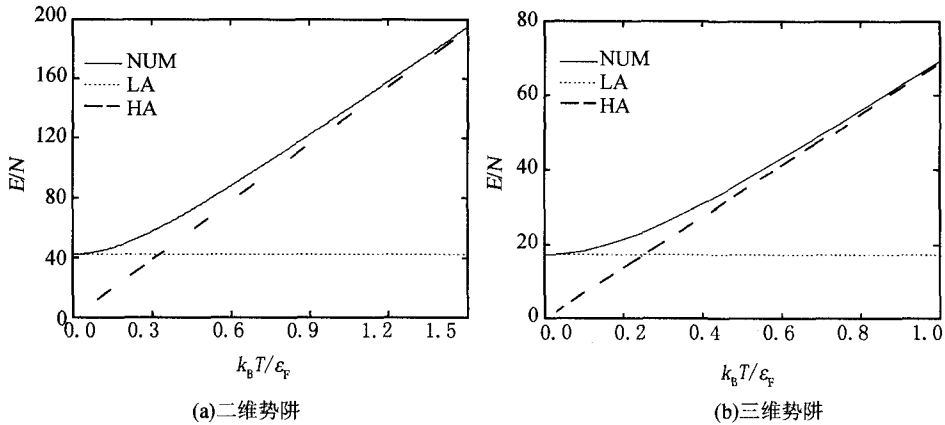


图2 内能-温度曲线

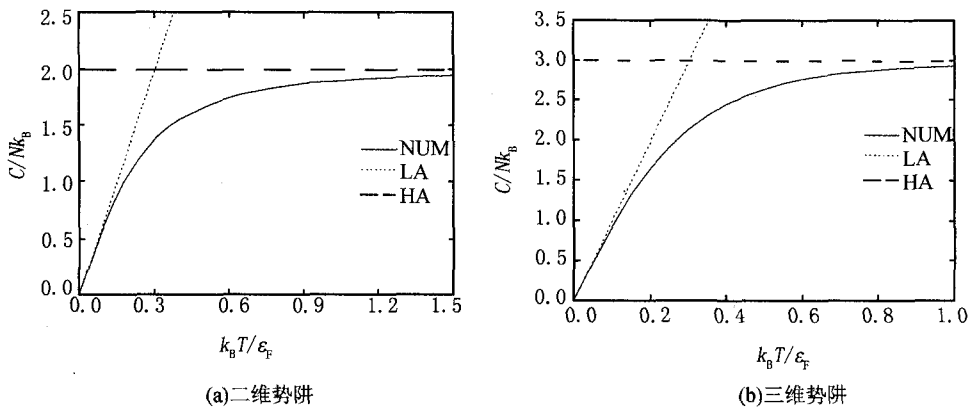


图3 比热-温度曲线

4 结 论

采用 Thomas-Fermi 半经典近似给出任意维简谐势阱中理想费米气体热力学量的通用表达式,数值计算得到的化学势、内能和比热曲线与解析结果极限情况吻合较好。化学势、内能和比热曲线均随温度呈现单调性连续变化,在高温极限下均趋于经典值。二维和三维费米系统热力学量随温度变化规律类似,说明空间维度并不明显改变热力学量的特性。简谐势阱中费米气体的热力学量明显不同于自由空间,说明势阱的存在能够明显改变粒子的空间分布,进而影响热力学量特性。

参 考 文 献

- [1] DEMARCO B, JIN D S. Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas [J]. *Science*, 1999, 285: 1703-1706.
- [2] HOLLAND M J, DEMARCO B, JIN D S. Evaporative cooling of a two-component degenerate Fermi gas [J]. *Phys Rev A*, 2000, 61 (5): 053610.
- [3] SU G Z, CHEN J C, CHEN L X. Effects of a finite number of particles on the thermodynamic properties of a trapped Fermi gas [J]. *Phys Lett A*, 2004, 326: 252.
- [4] GIORGINI S, PITAEVSKII L P, STRINGARI S. Theory of ultracold atomic Fermi gases [J]. *Rev Mod Phys*, 2008, 80(4): 1215-1274.
- [5] TAKAMOTO M, HONG F L, HIGASHI R, et al. An optical lattice clock [J]. *Nature*, 2005, 435: 321.
- [6] ROTH R, FELDMEIER H. Effective s-and p-wave contact interactions in trapped degenerate Fermi gases [J]. *Phys Rev A*, 2001, 64: 043603.
- [7] BUTTS D A, ROKHSAR D S. Trapped Fermi gases [J]. *Phys Rev A*, 1997, 55: 4346.

- [18] KIM J S, LIM S H, KIM J C. Study on application method of superconducting fault current limiter for protection coordination of protective devices in a power distribution system[J]. IEEE Trans Appl Supercond, 2011, 99: 1-4.
- [19] LIM S H, KIM J S, KIM J C. Analysis on protection coordination of hybrid SFCL with protective devices in a power distribution system [J]. IEEE Trans Appl Supercond, 2011, 21(3): 2170-2173.
- [20] 林良真, 叶林. 电磁暂态分析软件包 PSCAD/EMTDC[J]. 电网技术, 2000, 24(1): 65-66.
- [21] 陈妍君, 顾洁, 金之俭, 等. 电阻型超导限流器仿真模型及其对 10 kV 配电网的影响[J]. 电力自动化设备, 2013, 33(2): 87-91.
- [22] 龙杰. 城市电网 10 kV 配电系统继电保护的探讨[J]. 科技创新导报, 2011, 27: 125.
- [23] 何妍, 陈轩恕, 唐跃进, 等. 超导故障限流器对自动重合闸和继保的影响[J]. 高电压技术, 2008, 34(10): 2190-2194.
- [24] 高强, 叶莺, 张志峰, 等. 桥式超导限流器与电力系统距离保护配合问题研究及算法改进[J]. 继电器, 2006, 34(14): 7-10.

Simulation of Co-ordination of Resistive-type Superconducting Fault Current Limiter and Relay Protection in 10 kV Distribution Network

CHEN Yanjun

(Shinan Power Supply Company, State Grid Shanghai Municipal Electric Power Company, Shanghai 200233, China)

Abstract: The increase of short-circuit current has become an important issue in high-voltage power grid construction and operation. Superconducting fault current limiter (SFCL) is one of the most ideal current limiting devices in modern power network. However, the co-ordination between SFCL and relay protection is an important technologies and is crucial for SFCL to be successfully applied to real power network. In this paper, a combined numerical model with both resistive type SFCL module and current-relay protection module is developed using simulation software PSCAD/EMTDC. This model is used to study the effect of SFCL on relay protections and the co-ordination between SFCL and relay protections in 10 kV distribution gird. The solution of limiting the current level is further presented in this paper by adjusting the parameters of SFCL model to achieve the co-ordination between SFCL and relay protections. The final result in this paper could provide important quantitative basis of parameters for SFCL to be applied in real power system.

Keywords: resistive type superconducting fault current limiter; second generation high-temperature superconducting tapes; relay protection device; PSCAD; 10 kV distribution gird; co-ordination

(上接第 52 页)

- [8] LI M Z, YAN Z J, CHEN J C, et al. Thermodynamic properties of an ideal Fermi gas in an external potential with $U=br^l$ in any dimensional space [J]. Phys Rev A, 1998, 58: 1445.
- [9] SCHNEIDER J, WALLIS H. Mesoscopic Fermi gas in a harmonic trap[J]. Phys Rev A, 1998, 57(2): 1253-1259.
- [10] BRUUN G M, BUMETT K. Interacting Fermi gas in a harmonic trap[J]. Phys Rev A, 1998, 58: 2427.
- [11] BAGNATO V, PRITCHHARD D E, KLEPPNER D. Bose-Einstein condensation in an external potential [J]. Phys Rev A, 1987, 35: 4354.
- [12] YAN Z J. Bose-Einstein condensation of a trapped gas in n dimensions[J]. Phys Rev A, 1999, 59: 4657.
- [13] 张楠, 许珊, 王凤桐, 等. 势阱中旋转费米气体的磁性[J]. 河南师范大学学报(自然科学版), 2013, 41(6): 68-70.
- [14] PETHICK C J, SMITH H. Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2002: 18-59.

Thermodynamics of Ideal Fermi Gases under a Harmonic Trap

WANG Lei

(Department of Physics and Electronic Engineering, Heze University, Heze 274015, China)

Abstract: Thermodynamic properties of ideal Fermi gases in all kinds of dimensional harmonic traps have been studied by using Thomas-Fermi approximation. The general expressions for the chemical potential, Fermi energy and specific heat were derived. We discussed the influence of space dimension and harmonic trap on thermodynamics. The characteristic thermodynamics of two and three dimensional Fermi systems are numerically calculated, and yield a well agreement with the corresponding limits for classical ones.

Keywords: harmonic trap; Fermi gases; thermodynamics