

# 铁磁性凝聚体中的几何霍尔效应

郑公平, 付理想, 常高瞻, 吴哲, 杨玲玲

(河南师范大学 物理与电子工程学院, 河南 新乡 453007)

**摘要:**采用含时变分法,通过数值模拟系统的动力学,研究了铁磁性凝聚体中的几何霍尔效应.结果表明在铁磁性系统中的几何霍尔效应显著比在反铁磁性中的弱.

**关键词:**几何霍尔效应;铁磁性凝聚体;磁场

**中图分类号:**O413.3

**文献标志码:**A

旋量玻色-爱因斯坦凝聚体由多种超精细磁子能态的原子组成,具有丰富的自旋相互作用,因而一直是该领域实验和理论方面的研究热点之一<sup>[1-2]</sup>.2013年,韩国国立大学的Shin研究组在反铁磁性的<sup>23</sup>Na原子凝聚体中观察到一种新的物理效应:几何霍尔效应<sup>[3]</sup>.在实验中,他们首先在强各向异性的光阱中产生了磁量子数为-1的准二维凝聚体.然后,通过2组线圈缓慢地在凝聚体上施加一种空间依赖的4极磁场.由于磁场较强,在绝热近似下,凝聚体各处的局域自旋将沿着各处的磁场方向.最后,他们通过引入一正弦偏压磁场,沿准二维凝聚体的一个方向周期性地驱动磁场零点,使凝聚体的质心位置沿此方向做周期运动.在随后的演化中,在垂直此方向上也观察到了质心位置的周期运动,他们称之为几何霍尔效应.

2014年,美国艾姆赫斯特学院的Hall研究组采用类似的实验方法,在铁磁性的<sup>87</sup>Rb原子凝聚体中观察到了Dirac磁单极<sup>[4]</sup>.之所以观察到不同的现象,除了二者采用的旋量凝聚体具有不同的自旋相互作用外,更重要的是他们在磁场的调控方式上的区别:Shin研究组始终让Dirac点(即磁场零点)远离准二维凝聚体,而在凝聚体所在平面内的某一确定方向周期性地调节偏压磁场;Hall研究组则通过沿轴向绝热地调节偏压磁场,让Dirac点穿过在柱状光学势阱中产生的三维凝聚体.在此过程中,他们观察到了和Dirac点相连的奇异涡漩线.

本文采用含时变分法,通过数值分析集体激发,从理论上研究了原子凝聚体在Shin研究组的调控方式下的动力学行为,发现铁磁性凝聚体中的几何霍尔效应比反铁磁性系统中的弱.Hall研究组的实验中,铁磁性凝聚体的物理效应之所以明显,是因为他们让等效磁场极强的Dirac点穿过了三维凝聚体.

## 1 模型简介

考虑磁量子数为+1的<sup>87</sup>Rb原子凝聚体囚禁在如下光阱中,

$$V(r) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2),$$

其中 $\omega_{x,y,z} = 2\pi \times (160, 180, 2200)$  Hz为光阱频率.大部分参数采用<sup>87</sup>Rb实验中的数值,为了研究二维凝聚体的几何霍尔效应,部分参数作了调整.然后缓慢地加上非均匀磁场

$$B(r, t) = \frac{B_y}{2}(x\hat{x} + y\hat{y} - 2z\hat{z}) - B_x\hat{x} + B_z\hat{z},$$

收稿日期:2015-11-23;修回日期:2016-01-11.

基金项目:国家自然科学基金(11274095);河南省高等学校重点科研项目(16A140011);河南师范大学研究生优质课程建设项目(2014-2).

第1作者简介(通信作者):郑公平(1975-),男,河南虞城人,河南师范大学副教授,博士,研究方向为超冷原子,E-mail:zhengongping@aliyun.com.

其中磁场梯度  $B_q = -3.7 \times 10^{-4}$  T/cm,  $B_x, B_z$  为偏压磁场. 通过调控参数  $B_x, B_z$ , 可以控制磁场零点的位置  $x_0, z_0$ . 在绝热近似下, 凝聚体各处的自旋沿着局域磁场方向:

$$\hat{b}(r, t) = \frac{B}{|B|} = \frac{x-x_0}{\Delta} \hat{x} + \frac{y}{\Delta} \hat{y} - \frac{2(z-z_0)}{\Delta} \hat{z},$$

其中  $\Delta = \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + 4(z-z_0)^2}$ .

系统的平均场能量为

$$E = \int dr \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + \frac{1}{2} m (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2) |\psi|^2 + g_0 |\psi|^4 + g_2 |\langle \psi^\dagger | F | \psi \rangle|^2 \right\} + E_{\text{Zeeman}},$$

其中,  $\psi$  是凝聚体的波函数,  $m$  是原子的质量,  $F$  是自旋算符. 由于  $\omega_z \gg \omega_{x,y}$ , 系统已经约化为在  $x$ - $y$  平面上的准二维系统. 等效的相互作用常数<sup>[5]</sup> 为  $g_0 = \sqrt{8\pi\hbar^2} (a_0 + 2a_2) / (ml_z)$ ,  $g_2 = \sqrt{8\pi\hbar^2} (a_2 - a_0) / (ml_z)$ , 其中  $l_z = \sqrt{\hbar/m\omega_z}$  为谐振子基态波函数在  $z$  方向上的特征长度<sup>[6]</sup>.  $a_0$  和  $a_2$  分别是两个碰撞原子在总自旋为 0 和 2 通道的散射长度.

系统的 Zeeman 能量为

$$E_{\text{Zeeman}} = g_L \mu_B \int dr \langle \psi^\dagger | F | \psi \rangle \cdot B = -\frac{\mu_B b_q}{4} \int |\psi|^2 \Delta(z=0) dr,$$

其中  $\mu_B$  为玻尔磁子,  $g_L = -1/2$  为朗德因子. 推导中用到了绝热近似条件:  $\langle \psi^\dagger | F | \psi \rangle = |\psi|^2 \hat{b}$ .

## 2 变分波函数

构造如下变分波函数:

$$\psi = \kappa \prod_{\eta=x,y} e^{-\left(\frac{1}{R_\eta^2} - \frac{i\delta_\eta}{\hbar}\right) (\eta - A_\eta)^2 - \left(R_{xy} - \frac{i\delta_{xy}}{\hbar}\right) (x - A_x)(y - A_y) + \frac{p_\eta^2}{\hbar^2} (\eta - A_\eta)} \xi,$$

其中  $R_\eta, R_{xy}, \delta_\eta, \delta_{xy}, p_\eta, A_\eta$  ( $\eta = x, y$ ) 是含时变分参数, 归一化系数  $\kappa = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{4}{R_x^2 R_y^2} - R_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{4}}$ .  $A_\eta$  和  $p_\eta$  对应质心的位置和动量,  $R_x$  和  $R_y$  代表凝聚体在  $x$  和  $y$  方向上的宽度,  $R_{xy}$  对应凝聚体绕  $z$  轴的自转,  $\delta_\eta$  和  $\delta_{xy}$  是它们的共轭变量.  $\xi$  是归一化自旋波函数

$$\xi = e^{i(\varphi - \gamma)} \begin{pmatrix} e^{-i\theta} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ e^{i\theta} \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

其中  $\varphi$  和  $\gamma$  是规范参数. 由绝热条件  $\langle \xi^\dagger | F | \xi \rangle = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) = \hat{b}$ , 可得,  $\cos \theta = -2(z - z_0) / \Delta$ ,  $\tan \phi = y / (x - x_0)$ . 在 Shin 研究组的实验中, 初始态为无核涡漩态, 这里也采用这种初始条件. 由于在凝聚体中心  $\theta = 0$ , 因此  $\varphi - \gamma = \phi$ , 磁量子数为 +1 的组分填充在中心.

将上述变分波函数代入

$$L = \int dr \left\{ \frac{i\hbar}{2} [2i \text{Im}(\psi^\dagger \partial_t \psi)] \right\} - E$$

可以得到相应的拉氏量. 定义  $l_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ , 其中  $\omega = 2\pi \times 1$  Hz, 并引进无量纲参量  $L, E, t, \omega_\eta, A_\eta, p_\eta, R_\eta, \delta_\eta, R_{xy}, \delta_{xy} \rightarrow L/\hbar\omega, E/\hbar\omega, \omega t, \omega_\eta/\omega, A_\eta/l_0, p_\eta l_0/\hbar, R_\eta/l_0, \delta_\eta l_0^2, R_{xy} l_0^2, \delta_{xy} l_0^2$ , 可以得到无量纲的拉氏量. 然后通过拉格朗日方程, 得到 10 组耦合的动力学方程.

## 3 数值结果

当凝聚体处于稳态时,  $A_\eta, p_\eta, \delta_\eta, R_{xy}, \delta_{xy}$  都为零, 而  $R_x$  和  $R_y$  的稳态值则可以通过让耦合演化方程中时间的导数为零来确定. 取磁场零点  $z_0 = 36 \mu\text{m}$ , 系统的原子数  $N = 1.8 \times 10^6$ , 通过迭代运算, 得到稳态时

$$R_x^0 = 20 \mu\text{m}, R_y^0 = 17.8 \mu\text{m}.$$

下面从两个方面研究系统的动力学. 首先让处于稳态的凝聚体沿  $x$  方向的质心偏离  $2 \mu\text{m}$ , 研究系统的自发演化. 图 1 给出了凝聚体质心位置随时间的演化情况, 可以看出  $x$  方向的质心位置做周期振荡, 而  $y$  方向的响应很小, 在  $0.06 \text{ s}$  的演化时间内,  $y$  方向的最大振幅  $A_{y\text{max}}$  仅有约  $0.03 \mu\text{m}$ , 表明铁磁性凝聚体中几何霍尔效应不明显. 为了定量衡量几何霍尔效应强弱的程度, 定义  $y$  方向的最大振幅  $A_{y\text{max}}$  与  $x$  方向的最大振幅  $A_{x\text{max}}$  之比为响应比  $\gamma$ . 在自发演化过程中,  $\gamma \approx 1.5\%$ .

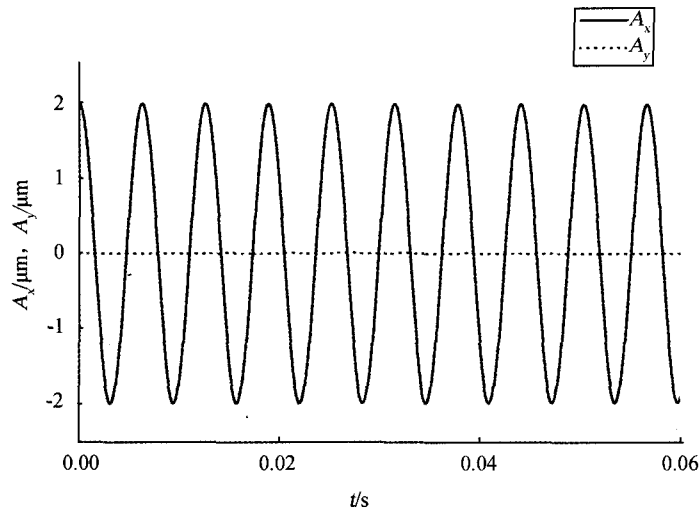


图1 自发演化时的凝聚体质心位置

然后研究外部驱动情况下系统的动力学行为. 采用 Shin 研究组的驱动方法, 通过引入一正弦偏压磁场, 使磁场零点沿  $x$  方向作周期性振荡,  $x_0(t) = X_0 \sin(\omega_d t)$ , 其中  $X_0$  取为  $2 \mu\text{m}$ ,  $\omega_d$  为外部驱动频率. 通过图 1 中的数据, 可以计算出系统自发演化时的内禀振荡频率,  $\omega_d \approx 2\pi \times 15.9 \text{ Hz}$ , 因此分别采用  $\omega_d = 2\pi \times (15.9, 15.9 \pm 1) \text{ Hz}$  3 种驱动频率数值模拟系统的动力学行为. 图 2 给出了 3 种驱动频率下凝聚体质心位置随时间的演化情况, 结果表明: 即使驱动时间达到  $0.6 \text{ s}$ , 响应比  $\gamma$  也没有达到  $2\%$ , 即铁磁性凝聚体中几何霍尔效应很弱. 在  $^{23}\text{Na}$  原子凝聚体的实验中<sup>[3]</sup>, 共振驱动频率下,  $y$  方向的最大振幅  $A_{y\text{max}}$  可以接近  $x$  方向的最大振幅  $A_{x\text{max}}$ , 即响应比  $\gamma \approx 100\%$ .

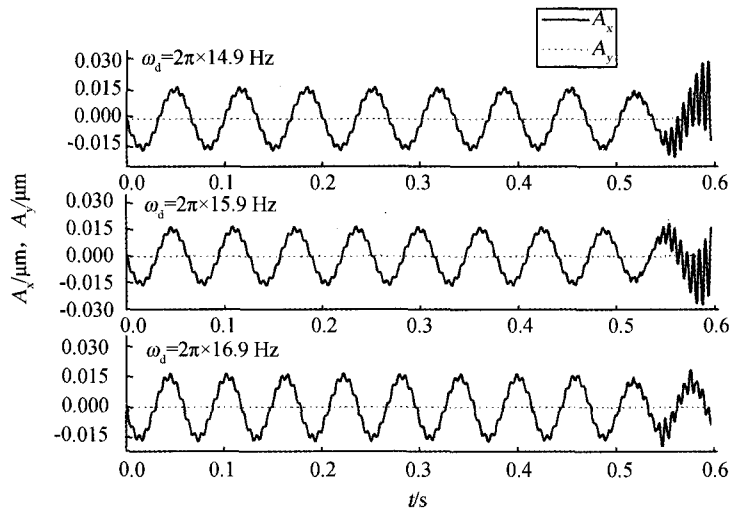


图2 不同驱动频率下, 凝聚体质心位置的时间演化

## 4 结 论

采用含时变分法,西班牙的 Perez-Garcia 等人曾研究过谐振子势中标量凝聚体的低能集体激发<sup>[7]</sup>,与实验结果<sup>[8]</sup>符合得非常好.2012年,清华大学的翟荟研究组也采用这种方法,研究了具有自旋-轨道耦合相互作用的旋量凝聚体中的集体激发<sup>[9]</sup>,与中科大陈帅研究组的实验结果<sup>[10]</sup>也符合的非常好.本文采用这种方法研究了非均匀磁场中铁磁性凝聚体的集体激发,结果表明在铁磁性凝聚体中的几何霍尔效应比反铁磁性凝聚体中的要弱得多.

## 参 考 文 献

- [1] STAMPER-KURN D, UEDA M. Spinor Bose gases: Symmetries, magnetism, and quantum dynamics[J]. *Rev Mod Phys*, 2013, 85: 1191-1244.
- [2] KAWAGUCHI Y, UEDA M. Spinor Bose-Einstein condensates[J]. *Phys Rep*, 2012, 520: 253-381.
- [3] CHOI J, KANG S, SEO S, et al. Observation of a Geometric Hall Effect in a Spinor Bose-Einstein Condensate with a Skyrmion Spin Texture[J]. *Phys Rev Lett*, 2013, 111: 245301.
- [4] RAY M, RUOKOKOSKI E, KANDEL S, et al. Observation of Dirac monopoles in a synthetic magnetic field[J]. *Nature*, 2014, 505: 657-660.
- [5] HO T. Spinor Bose Condensates in Optical Traps[J]. *Phys Rev Lett*, 1998, 81: 742-745.
- [6] PITAEVSKI L, STRINGARI S. Bose-Einstein Condensation[M]. London: Clarendon Press, 2003.
- [7] PEREZ-GARCIA V, MICHINE H, CIRAC J, et al. Low Energy Excitations of a Bose-Einstein Condensate: A Time-Dependent Variational Analysis[J]. *Phys Rev Lett*, 1996, 77: 5320-5323.
- [8] JIN D, ENSHER J, MATTHEWS M, et al. Collective Excitations of a Bose-Einstein Condensate in a Dilute Gas[J]. *Phys Rev Lett*, 1996, 77: 420-423.
- [9] CHEN Z, ZHAI H. Collective-mode dynamics in a spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensate[J]. *Phys Rev A*, 2012, 86: 041604.
- [10] ZHANG J, JI S, CHEN Z, et al. Collective Dipole Oscillations of a Spin-Orbit Coupled Bose-Einstein Condensate[J]. *Phys Rev Lett*, 2012, 109: 115301.

## Geometric Hall Effect of Ferromagnetic Condensate

ZHENG Gongping, FU Lixiang, CHANG Gaozhan, WU Zhe, YANG Lingling

(College of Physics and Electronic Engineering, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

**Abstract:** The geometric Hall effect of ferromagnetic condensate is studied with the numerical simulation of the dynamics, basing on a time-dependent variational approach. It is shown that the effect of ferromagnetic condensate is much weak than that of antiferromagnetic one.

**Keywords:** geometric Hall effect; ferromagnetic condensate; magnetic field