第 45 卷 第 5 期 河南师范大学学报(自然科学版) Vol.45 No.5
2017 年 9 月 Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition) Sep. 2017

文章编号:1000-2367(2017)05-0001-06 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2017.05.001

均方误差准则下的几乎无偏 Stein 岭型主成分估计的优良性

朱宁[a],刘庆华[a],周桂兰[a],农以宁[b]

(桂林电子科技大学 a.数学与计算科学学院;b.生命与环境科学学院,广西 桂林 541004)

摘 要:将 Stein 岭型主成分估计利用几乎无偏估计思想进行优化,得到几乎无偏 Stein 岭型主成分估计.并考虑均方误差准则,得到了几乎无偏 Stein 岭型主成分估计优于最小二乘估计、Stein 岭型主成分估计的充分条件.并通过数值实验证明在给定 k 或 p 时,几乎无偏 Stein 岭型主成分估计的均方误差与 Stein 岭型主成分估计的均方误差较为接近,且远大于最小二乘估计的均方误差.

关键词:均方误差;几乎无偏估计;岭型主成分估计;优良性

中图分类号:O212.1 **文献标志码:**A

考虑线性模型

$$y = X\beta + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I), \tag{1}$$

其中 y 为 $n \times 1$ 阶观测矩阵,X 为 $n \times p$ 阶设计矩阵,β 为 $p \times 1$ 阶未知参数向量,ε 为 $n \times 1$ 随机误差向量.

最小二乘估计在线性模型的参数估计理论和方法研究中起到了非常重要的作用[1-2],然而当设计矩阵 X 不是满秩阵时,利用最小二乘法估计参数效果不理想.在实际生活中,数据间非常可能会存在共线性,此时运用最小二乘估计去估计参数不具有稳定性.为了克服共线性,很多学者对此进行了深入研究,他们提出了许多新的估计量,如主成分估计[3]、岭估计[4]、LIU 估计[5]等等,这些新的估计均属于有偏估计.有偏估计克服共线性是以牺牲估计的无偏性为代价.近年来,有很多学者开始研究如何降低有偏估计量的离差.在 1984 年,Kadiyala[6]给出了几乎无偏估计的概念,并在此基础上得到了一类几乎无偏压缩估计.由于几乎无偏估计在克服了数据共线性的同时减少了估计量的偏差,因此,越来越多的学者关注几乎无偏估计,并深入研究各类别的几乎无偏估计性质.如文献[7-9]均利用几乎无偏的思想对一些有偏估计进行几乎无偏化.同时也有不少学者开始利用同样的方法对受约束回归模型、混合系数效应线性模型等不同的模型进行参数估计优化,如文献[10-13]分别对不同的模型,通过减少有偏估计量离差的方法来优化估计量.近年来,也有较多的学者研究几乎无偏估计的预测性与可容许性等.2015 年,文献[14]将几乎无偏 LIU 估计的预测性能与最小二乘估计、主成分估计、LIU 估计进行对比,得出几乎无偏 LIU 估计一致优于最小二乘估计、主成分估计和 LIU 估计的结论;2015 年,文献[15]在 Mahalanobis 损失函数下,相对于最小二乘估计来说,证明几乎无偏 LIU 估计是不可容许性.

本文在 Stein 岭型主成分估计[16]的基础上,对其进行几乎无偏优化,得到一种新的无偏估计,称为几乎无偏 Stein 岭型主成分估计.该估计包括几乎无偏岭估计和几乎无偏主成分估计.并在均方误差的前提下,研究几乎无偏岭型主成分估计的优良性,并给出其优于最小二乘估计、岭型主成分估计的充分条件.最后通过实例进行验证.

1 几乎无偏 Stein 岭型主成分估计

文献[17]提出 Stein 岭型主成分估计是最小二乘估计、岭型估计和主成分估计的推广,其定义为:

收稿日期:2016-11-11;**修回日期:**2017-05-04.

基金项目:国家科技支撑计划课题(2015BAL04B0305);广西科技重点研发计划项目(桂科 AB16380321);广西自然科学基金项目(2016GXNSFBA380102);桂林电子科技大学研究生教育创新计划(2016YJCX48).

作者简介:朱宁(1957-),男,湖南宁乡人,桂林电子科技大学教授,研究方向为线性统计模型.

通信作者:刘庆华(1990-),女,广西平乐人,研究方向为应用统计,E-mail:lqh_1220@163.com.

$$\hat{\beta}(k,p) = p(X'X + kI)^{-1}X'y, \tag{2}$$

其中参数 $k > 0, 0 < p < 1$.

模型(1) 的最小二乘估计为 $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$.

为了方便研究,下文对模型(1) 进行正交变换,得到其典则形式,设 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m$ 为对应于矩阵 $X'X$ 的特征根 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_m > 0$ 的标准正交化特征向量,记为 $Q = (\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_m)$,则模型(1)变换成如下形式

$$Y = Z\alpha + \varepsilon, \tag{3}$$

其中,$Z = XQ, \alpha = Q'\beta$. 因此,在线性模型的典则形式(3) 下,α 的最小二乘估计和岭型主成分估计分别为

$$\hat{\alpha} = \Lambda^{-1}Z'Y, \tag{4}$$

$$\hat{\alpha}(k,p) = p(\Lambda + kI)^{-1}\Lambda\hat{\alpha}. \tag{5}$$

定义 1 设 $\hat{\beta}$ 为 β 的有偏估计,$\hat{\beta}$ 的偏差为 $Bias(\hat{\beta}) = E(\hat{\beta}) - \beta = A\beta$,则称 $\tilde{\beta} = \hat{\beta} - A\hat{\beta}$ 为 β 的几乎无偏估计[6].

根据(5)式,很容易得到

$$Bias(\hat{\alpha}(k,p)) = E(\hat{\alpha}(k,p)) - \alpha = p(\Lambda + kI)^{-1}\Lambda\alpha - \alpha = p(\Lambda + kI)^{-1}\Lambda\alpha -$$
$$(\Lambda + kI)^{-1}(\Lambda + kI)\alpha = (\Lambda + kI)^{-1}(p\Lambda - \Lambda - kI)\alpha.$$

根据几乎无偏估计的定义,称 $\tilde{\alpha}(k,p) = \hat{\alpha}(k,p) - Bias(\hat{\alpha}(k,p)) = \hat{\alpha}(k,p) - (\Lambda + kI)^{-1}(p\Lambda - \Lambda - kI)\hat{\alpha}(k,p) = [I - (\Lambda + kI)^{-2}(p\Lambda - \Lambda - kI)^2]\hat{\alpha}$ 为典则模型的几乎无偏 Stein 岭型主成分估计.

从几乎无偏 Stein 岭型主成分估计 $\tilde{\alpha}(k,p)$ 的定义可以看到:

(1) 当 $k = 0$ 时,则 $\tilde{\alpha}(0,p) = p(2 - p)\hat{\alpha}$ 为几乎无偏主成分估计.

(2) 当 $p = 1$ 时,则 $\tilde{\alpha}(k,1) = [I - k^2(\Lambda + kI)^{-2}]\hat{\alpha}$ 为文献[7]提出来的几乎无偏岭估计.

因此,从一定意义上可得到,几乎无偏 Stein 岭型主成分估计是几乎无偏主成分估计和几乎无偏岭型估计的推广.

2 几乎无偏 Stein 岭型主成分估计的优良性

根据几乎无偏 Stein 岭型主成分估计 $\tilde{\alpha}(k,p)$ 的定义,其偏差和协方差分别为:

$$Bias(\tilde{\alpha}(k,p)) = \Delta\alpha, \tag{6}$$

$$Cov(\tilde{\alpha}(k,p)) = \sigma^2(I - \Delta)\Lambda^{-1}(I - \Delta)', \tag{7}$$

其中,$\Delta = (\Lambda + kI)^{-2}(p\Lambda - \Lambda - kI)^2$.

除了 $k = 0$ 且 $p = 1$ 外,$Bias(\tilde{\alpha}(k,p)) \neq \alpha$,因此几乎无偏 Stein 岭型主成分估计也是有偏估计. 只不过此时的偏差小于 Stein 岭型主成分估计与 α 间的偏差.

根据(6)式和(7)式,可得到几乎无偏 Stein 岭型主成分估计 $\tilde{\alpha}(k,p)$ 的均方误差矩阵:

$$MSEM(\tilde{\alpha}(k,p)) = \sigma^2(I - \Delta)\Lambda^{-1}(I - \Delta)' + \Delta\alpha\alpha'\Delta'. \tag{8}$$

几乎无偏岭型主成分估计 $\tilde{\alpha}(k,p)$ 的均方误差:

$$MSE(\tilde{\alpha}(k,p)) = \mathrm{tr}[MSEM(\tilde{\alpha}(k,p))]. \tag{9}$$

由于

$$\mathrm{tr}[\sigma^2(I - \Delta)\Lambda^{-1}(I - \Delta)'] = \sigma^2 \sum_{i-1}^{m}[1 - \frac{(p\lambda_i - \lambda_i - k)^2}{(\lambda_i + k)^2}]^2 \frac{1}{\lambda_i} = \sigma^2 \sum_{i-1}^{m} \frac{[(\lambda_i + k)^2 - (p\lambda_i - \lambda_i - k)^2]^2}{\lambda_i(\lambda_i + k)^4} =$$
$$\sigma^2 \sum_{i-1}^{m} \frac{p^2\lambda_i^2(2\lambda_i + 2k - p\lambda_i)^2}{\lambda_i(\lambda_i + k)^4} = \sigma^2 \sum_{i-1}^{m} \frac{p^2\lambda_i(2\lambda_i + 2k - p\lambda_i)^2}{(\lambda_i + k)^4}, \tag{10}$$

$$\mathrm{tr}(\Delta\alpha\alpha'\Delta') = \sum_{i-1}^{m} \frac{(p\lambda_i - \lambda_i - k)^4\alpha_i^2}{(\lambda_i + k)^4}. \tag{11}$$

由(8)、(9)、(10)和(11)式可得到:

$$MSE(\tilde{\alpha}(k,p)) = \mathrm{tr}[MSEM(\tilde{\alpha}(k,p))] = \mathrm{tr}[\sigma^2(I - \Delta)\Lambda^{-1}(I - \Delta)'] + \mathrm{tr}(\Delta\alpha\alpha'\Delta') =$$
$$\sigma^2 \sum_{i-1}^{m} \frac{p^2\lambda_i(2\lambda_i + 2k - p\lambda_i)^2}{(\lambda_i + k)^4} + \sum_{i-1}^{m} \frac{(p\lambda_i - \lambda_i - k)^4\alpha_i^2}{(\lambda_i + k)^4}. \tag{12}$$

在均方误差准则下，对比几乎无偏 Stein 岭型主成分估计与最小二乘估计、岭型主成分估计的优良性.

定理 1　令 $0<p<1$ 固定，如果 $\lambda_i<\frac{\sigma^2}{\alpha_i^2}$，则当 $k>\sqrt{\frac{4r_i\lambda_i^2}{r_i-\lambda_i}}-\lambda_i$ 时，几乎无偏 Stein 岭型主成分估计 $\tilde{\alpha}(k,p)$ 在均方误差准则下优于最小二乘估计 $\hat{\alpha}$，即 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))<MSE(\hat{\alpha})$.

证明　根据最小二乘估计 $\hat{\alpha}$ 的定义，其均方误差为

$$MSE(\hat{\alpha})=\sigma^2\sum_{i-1}^{m}\frac{1}{\lambda_i}. \tag{13}$$

根据(12)和(13)式，得到估计 $\tilde{\alpha}(k,p)$ 和估计 $\hat{\alpha}$ 的均方误差为：

$$D_1=MSE(\tilde{\alpha}(k,p))-MSE(\hat{\alpha})=\sigma^2\sum_{i-1}^{m}\frac{p^2\lambda_i(2\lambda_i+2k-p\lambda_i)^2}{(\lambda_i+k)^4}+\sum_{i-1}^{m}\frac{(p\lambda_i-\lambda_i-k)^4\alpha_i^2}{(\lambda_i+k)^4}-\sigma^2\sum_{i-1}^{m}\frac{1}{\lambda_i}=$$

$$\sum_{i-1}^{m}\frac{\sigma^2p^2\lambda_i^2(2\lambda_i+2k-p\lambda_i)^2+\lambda_i(p\lambda_i-\lambda_i-k)^4\alpha_i^2-\sigma^2(\lambda_i+k)^4}{\lambda_i(\lambda_i+k)}\overset{r_i=\frac{\sigma^2}{\alpha_i^2}}{=\!=\!=}$$

$$\sum_{i-1}^{m}\frac{\alpha_i^2}{\lambda_i(\lambda_i+k)^4}[r_ip^2\lambda_i^2(2\lambda_i+2k-p\lambda_i)^2+\lambda_i(p\lambda_i-\lambda_i-k)^4-r_i(\lambda_i+k)^4].$$

令 $f(k,p)=r_ip^2\lambda_i^2(2\lambda_i+2k-p\lambda_i)^2+\lambda_i(p\lambda_i-\lambda_i-k)^4-r_i(\lambda_i+k)^4$，若要使得 $D_1<0$，即 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))<MSE(\hat{\alpha})$，则 $f(k,p)<0$.

由 $0<p<1$ 知 $2\lambda_i+2k-p\lambda_i<2\lambda_i+2k$，$(p\lambda_i-\lambda_i-k)^4<(\lambda_i+k)^4$，则 $f(k,p)<r_i\lambda_i^2(2\lambda_i+2k)^2+\lambda_i(\lambda_i+k)^4-r_i(\lambda_i+k)^4=(\lambda_i+k)^2[4r_i\lambda_i^2+(\lambda_i-r_i)(\lambda_i+k)^2]$，若 $4r_i\lambda_i^2+(\lambda_i-r_i)(\lambda_i+k)^2<0$，则 $f(k,p)<0$ 必成立.

由 $r_i=\frac{\sigma^2}{\alpha_i^2}$ 得 $r_i>0$，而且 $\lambda_i>0$，则当 $\lambda_i<r_i$，$k>\sqrt{\frac{4r_i\lambda_i^2}{r_i-\lambda_i}}-\lambda_i$ 时，$4r_i\lambda_i^2+(\lambda_i-r_i)(\lambda_i+k)^2<0$，有 $f(k,p)<0$，故 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))<MSE(\hat{\alpha})$. 证毕.

根据定理 1，令 $0<p<1$，则得到在均方误差准则下，几乎无偏岭估计优于最小二乘估计的充分条件：$k>\sqrt{\frac{4r_i\lambda_i^2}{r_i-\lambda_i}}-\lambda_i$.

推论 1　如果 $\lambda_i<\frac{\sigma^2}{\alpha_i^2}$，则当 $k>\sqrt{\frac{4r_i\lambda_i^2}{r_i-\lambda_i}}-\lambda_i$ 时，几乎无偏岭估计 $\tilde{\alpha}(k,1)$ 在均方误差准则下优于最小二乘估计 $\hat{\alpha}$，即 $MSE(\tilde{\alpha}(k,1))<MSE(\hat{\alpha})$.

定理 2　令 $0<p<1$ 固定，$k_1=\frac{-(3pr_i+3p\lambda_i-4\lambda_i)+\sqrt{\Delta_1}}{-4}$，$k_2=\frac{-(3pr_i+3p\lambda_i-4\lambda_i)-\sqrt{\Delta_1}}{-4}$，其中 $\Delta_1=p^2(9r_i^2+26\lambda_ir_i+\lambda_i^2)$. 几乎无偏 Stein 岭型主成分估计 $\tilde{\alpha}(k,p)$ 在均方误差准则下优于 Stein 岭型主成分估计 $\hat{\alpha}(k,p)$，即 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))<MSE(\hat{\alpha}(k,p))$ 成立的充分条件是：

(1) 当 $k_1>0$ 时，对任意的 $0<k<k_1$ 或者 $k>k_2$，有 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))<MSE(\hat{\alpha}(k,p))$；

(2) 当 $k_2>0$ 且 $k_1<0$ 时，对任意的 $k>k_2$，有 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))<MSE(\hat{\alpha}(k,p))$；

(3) 当 $k_2<0$ 时，对任意的 $k>0$，有 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))<MSE(\hat{\alpha}(k,p))$.

证明　由(5)式知 $Bias(\hat{\alpha}(k,p))=p(\Lambda+kI)^{-1}\Lambda\hat{\alpha}-\hat{\alpha}=[p(\Lambda+kI)^{-1}\Lambda-I]\hat{\alpha}$，$Cov(\hat{\alpha}(k,p))=\sigma^2p(\Lambda+kI)^{-1}\Lambda\Lambda^{-1}[p(\Lambda+kI)^{-1}\Lambda]'=\sigma^2p^2(\Lambda+kI)^{-1}\Lambda(\Lambda+kI)^{-1}$，此时 $\hat{\alpha}(k,p)$ 的均方误差矩阵为 $MSEM(\hat{\alpha}(k,17p))=\sigma^2p^2(\Lambda+kI)^{-1}\Lambda(\Lambda+kI)^{-1}+[p(\Lambda+kI)^{-1}\Lambda-I]\alpha\alpha'[p(\Lambda+kI)^{-1}\Lambda-I]'$，其均方误差为

$$MSE(\hat{\alpha}(k,p))=\sigma^2p^2\sum_{i-1}^{m}\frac{\lambda_i}{(\lambda_i+k)^2}+\sum_{i-1}^{m}\alpha_i^2(\frac{p\lambda_i}{\lambda_i+k}-1)^2=$$

$$\sigma^2p^2\sum_{i-1}^{m}\frac{\lambda_i}{(\lambda_i+k)^2}+\sum_{i-1}^{m}\alpha_i^2(\frac{p\lambda_i-\lambda_i+k}{\lambda_i+k})^2, \tag{14}$$

令 $D_2=MSE(\tilde{\alpha}(k,p))-MSE(\hat{\alpha}(k,p))$，则

$$D_2=\sigma^2\sum_{i-1}^{m}\frac{p^2\lambda_i(2\lambda_i+2k-p\lambda_i)^2}{(\lambda_i+k)^4}+\sum_{i-1}^{m}\frac{(p\lambda_i-\lambda_i-k)^4\alpha_i^2}{(\lambda_i+k)^4}-\sigma^2p^2\sum_{i-1}^{m}\frac{\lambda_i}{(\lambda_i+k)^2}-$$

$$\sum_{i-1}^{m}\alpha_i^2(\frac{p\lambda_i-\lambda_i-k}{\lambda_+ k})^2 \xlongequal{r_i=\frac{\sigma^2}{\alpha_i^2}} \sum_{i-1}^{m}\frac{\alpha_i^2}{(\lambda_i+k)^4}[r_i p^2\lambda_i(2\lambda_i+2k-p\lambda_i)^2+ (p\lambda_i-\lambda_i-k)^4-p^2r_i\lambda_i(\lambda_i+k)^2-(p\lambda_i-\lambda_i-k)^2(\lambda_i+k)^2], \tag{15}$$

其中：

$$r_ip^2\lambda_i(2\lambda_i+2k-p\lambda_i)^2+(p\lambda_i-\lambda_i-k)^4-p^2r_i\lambda_i(\lambda_i+k)^2-(p\lambda_i-\lambda_i-k)^2(\lambda_i+k)^2= p^2r_i\lambda_i(2\lambda_i+2k-p\lambda_i+\lambda_i+k)(2\lambda_i+2k-p\lambda_i-\lambda_i-k)+(p\lambda_i-\lambda_i-k)^2(p\lambda_i- \lambda_i-k+\lambda_i+k)(p\lambda_i-\lambda_i-k-\lambda_i-k)=p^2r_i\lambda_i(3\lambda_i+3k-p\lambda_i)(\lambda_i+k-p\lambda_i)+ (p\lambda_i-\lambda_i-k)^2p\lambda_i(p\lambda_i-2\lambda_i-2k)=p\lambda_i(\lambda_i+k-p\lambda_i)[pr_i(3\lambda_i+ 3k-p\lambda_i)-(p\lambda_i-\lambda_i-k)(p\lambda_i-2\lambda_i-2k)], \tag{16}$$

以及

$$pr_i(3\lambda_i+3k-p\lambda_i)-(p\lambda_i-\lambda_i-k)(p\lambda_i-2\lambda_i-2k)=3\lambda_ipr_i+3kpr_i-p^2\lambda_ir_i- [p^2\lambda_i^2-3(\lambda_i+k)p\lambda_i+2(\lambda_i+k)^2]=3\lambda_ipr_i+3kpr_i-p^2\lambda_ir_i-p^2\lambda_i^2+3\lambda_i^2p+ 3kp\lambda_i-2\lambda_i^2-4\lambda_ik-2k^2=-2k^2+(3kpr_i+3kp\lambda_i-4\lambda_ik)+3\lambda_ipr_i- p^2\lambda_ir_i-p^2\lambda_i^2+3\lambda_i^2p-2\lambda_i^2=-2k^2+(3pr_i+3p\lambda_i-4\lambda_i)k+ 3\lambda_ipr_i-p^2\lambda_ir_i-p^2\lambda_i^2+3\lambda_i^2p-2\lambda_i^2, \tag{17}$$

根据(15)、(16)、(17)式，则 D_2 可化简为 $D_2=\sum_{i-1}^{m}\frac{\alpha_i^2p\lambda_i(\lambda_i+k-p\lambda_i)}{(\lambda_i+k)^4}[-2k^2+3pr_i+3p\lambda_i-4\lambda_i)k+3\lambda_ipr_i-p^2\lambda_ir_i-p^2\lambda_i^2+3\lambda_i^2p-2\lambda_i^2]=\sum_{i-1}^{m}\frac{\alpha_i^2p\lambda_i(\lambda_i+k-p\lambda_i)}{(\lambda_i+k)^4}g(k,p)$，其中 $g(k,p)=-2k^2+(3pr_i+3p\lambda_i-4\lambda_i)k+3\lambda_ipr_i-p^2\lambda_ir_i-p^2\lambda_i^2+3\lambda_i^2p-2\lambda_i^2$，

由于 $0<p<1,\lambda_i>0,k>0$，则 $\frac{\alpha_i^2p\lambda_i(\lambda_i+k-p\lambda_i)}{(\lambda_i+k)^4}>0$.

令 $0<p<1$ 固定，将 $g(k,p)$ 作为参数为 k 的函数. 此时，$g(k,g)$ 开口向下，其判别式 Δ_1 为

$$\Delta_1=(3pr_i+3p\lambda_i-4\lambda_i)^2+8(3pr_i\lambda_i-p^2\lambda_ir_i-p^2\lambda_i^2+3\lambda_i^2p-2\lambda_i^2)=9p^2(r_i+\lambda_i)^2- 24\lambda_ip(r_i+\lambda_i)+16\lambda_i^2+24pr_i\lambda_i-8p^2\lambda_ir_i-8p^2\lambda_i^2+24\lambda_i^2p-16\lambda_i^2= 9p^2(r_i+\lambda_i)^2+8p^2\lambda_ir_i-8p^3\lambda_i^2=p^2[9r_i^2+26\lambda_ir_i+\lambda_i^2]>0,$$

则 $g(k,g)=0$ 的两个根分别 $k_1=\frac{-(3pr_i+3p\lambda_i-4\lambda_i)+\sqrt{\Delta_1}}{-4}$，$k_2=\frac{-(3pr_i+3p\lambda_i-4\lambda_i)-\sqrt{\Delta_1}}{-4}$，且 $k_2>k_1$. 因此 $g(k,p)<0$ 的解集为 $\{k\mid k>k_2$ 或 $k<k_1\}$.

因此可得到：

(1) 当 $k_1>0$ 时，对任意的 $0<k<k_1$ 或者 $k>k_2$，有 $g(k,p)<0$，故 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))<MSE(\hat{\alpha}(k,p))$；

(2) 当 $k_2>0$ 且 $k_1<0$ 时，对任意的 $k>k_2$，有 $g(k,p)<0$，故 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))<MSE(\hat{\alpha}(k,p))$；

(3) 当 $k_2<0$ 时，对任意的 $k>0$，有 $g(k,p)<0$，故 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))<MSE(\hat{\alpha}(k,p))$.

证毕.

推论 2 由定理 2 知，令 $0<p<1$ 固定，$k_1=\frac{-(3pr_i+3p\lambda_i-4\lambda_i)+\sqrt{\Delta_1}}{-4}$，$k_2=\frac{-(3pr_i+3p\lambda_i-4\lambda_i)-\sqrt{\Delta_1}}{-4}$，其中 $\Delta_1=p^2(9r_i^2+26\lambda_ir_i+\lambda_i^2)$. 在均方误差准则 Stein 岭型主成分估计 $\hat{\alpha}(k,p)$ 优于几乎无偏 Stein 岭型主成分估计 $\tilde{\alpha}(k,p)$ 的充分条件，即 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))>MSE(\hat{\alpha}(k,p))$ 成立的充分条件是：(1) 当 $k_1>0$ 时，对任意的 $k_1<k<k_2$，有 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))>MSE(\hat{\alpha}(k,p))$；(2) 当 $k_2>0$ 且 $k_1<0$ 时，对任意的 $0<k<k_2$，有 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))<MSE(\hat{\alpha}(k,p))$.

3 数值实验

案例数据来自文献[17]中例 3.8.1 外贸数据分析问题，这组数据存在较为严重的共线性. 为此通过岭型

主成分估计、几乎无偏岭型主成分估计来估计未知参数是必要的. 在此，主要考虑不同的 k,p 取值对参数估计值的影响，并比较岭型主成分估计、几乎无偏岭型主成分估计下的均方误差. 根据文献[17]，分别对给定 $k=0.4$，p 分别取 0.1，0.2，0.3，0.4，0.5，利用上文中的(4)、(5)、(12)、(13)、(14)式计算得到各估计值以及均方误差，具体结果见表 1，表 2.

表 1　当 $k=0.4$，p 分别取 0.1，0.2，0.3，0.4，0.5 时参数估计值及均方误差

参数估计值及均方误差	$p=0.1$	$p=0.2$	$p=0.3$	$p=0.4$	$p=0.5$
$\hat{\alpha}_1$	−2.269 2	−2.269 2	−2.269 2	−2.269 2	−2.269 2
$\hat{\alpha}_2$	−0.869 2	−0.869 2	−0.869 2	−0.869 2	−0.869 2
$\hat{\alpha}_3$	3.135 0	3.135 0	3.135 0	3.135 0	3.135 0
$\hat{\alpha}_1(k,p)$	−0.033 2	−0.066 4	−0.099 6	−0.132 9	−0.166 1
$\hat{\alpha}_2(k,p)$	−0.083 6	−0.167 1	−0.250 7	−0.334 3	−0.417 9
$\hat{\alpha}_3(k,p)$	0.307 4	0.614 7	0.922 1	1.229 4	1.536 8
$\tilde{\alpha}_1(k,p)$	−0.066 2	−0.132 0	−0.197 4	−0.262 4	−0.326 9
$\tilde{\alpha}_2(k,p)$	−0.159 1	−0.302 2	−0.429 1	−0.54	−0.634 8
$\tilde{\alpha}_3(k,p)$	0.584 6	1.108 9	1.572 9	1.976 7	2.320 2
$MSE(\hat{\alpha})$	770.316	770.316	770.316	770.316	770.316
$MSE(\hat{\alpha}(k,p))$	36.088 0	34.151 8	30.288 2	31.251 9	32.539 8
$MSE(\tilde{\alpha}(k,p))$	34.306 4	31.678 1	29.766 9	29.629 3	30.199 7

表 2　当 $p=0.4$ 时，k 分别取 0.5，0.6，0.7，0.8，0.9 时参数估计值及均方误差

参数估计值及均方误差	$k=0.9$	$k=0.8$	$k=0.7$	$k=0.6$	$k=0.5$
$\hat{\alpha}_1$	−2.269 2	−2.269 2	−2.269 2	−2.269 2	−2.269 2
$\hat{\alpha}_2$	−0.869 2	−0.869 2	−0.869 2	−0.869 2	−0.869 2
$\hat{\alpha}_3$	3.135 0	3.135 0	3.135 0	3.135 0	3.135 0
$\hat{\alpha}_1(k,p)$	−0.061 2	−0.068 6	−0.078	−0.090 5	−0.107 6
$\hat{\alpha}_2(k,p)$	−0.318 9	−0.321 9	−0.324 9	−0.328 0	−0.331 1
$\hat{\alpha}_3(k,p)$	1.200 0	1.205 8	1.211 6	1.217 5	1.223 4
$\tilde{\alpha}_1(k,p)$	−0.121 7	−0.136 3	−0.154 9	−0.179 4	−0.213 1
$\tilde{\alpha}_2(k,p)$	−0.520 8	−0.524 6	−0.528 4	−0.532 2	−0.536 1
$\tilde{\alpha}_3(k,p)$	1.940 7	1.947 8	1.954 9	1.962 2	1.969 4
$MSE(\hat{\alpha})$	770.316	770.316	770.316	770.316	770.316
$MSE(\hat{\alpha}(k,p))$	31.703 7	31.634 3	31.555 5	31.465 5	31.363 0
$MSE(\tilde{\alpha}(k,p))$	29.592 2	29.540 2	29.493 5	29.464 4	29.482 7

从表 1 中可以看出，$k=0.4$，不管 p 取 0.1 至 0.5 中的何值都有 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p)) < MSE(\hat{\alpha}(k,p)) < MSE(\hat{\alpha})$. 且 $MSE(\hat{\alpha}(k,p))$ 与 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))$ 较为接近.

从表 2 中可以看出，$p=0.4$，不管 k 取 0.5 至 0.9 中的何值都有 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p)) < MSE(\hat{\alpha}(k,p)) < MSE(\hat{\alpha})$. 且 $MSE(\hat{\alpha}(k,p))$ 与 $MSE(\tilde{\alpha}(k,p))$ 较为接近，远小于 $MSE(\hat{\alpha})$.

综上所述，在均方误差准则下，给定 $k=0.4$，不管 p 取 0.1 至 0.5 中的何值，或者给定 $p=0.4$，不管 k 取 0.5 至 0.9 中的何值，几乎无偏 Stein 岭型主成分估计结果比最小二乘估计和 Stein 岭型主成分估计的结果要好. 几乎无偏 Stein 岭型主成分估计的均方误差与 Stein 岭型主成分估计的均方误差比较接近，但远远大于最小二乘估计. 因此说明当数据存在较为严重的共线性时，利用几乎无偏 Stein 岭型主成分估计进行参数估计具有实际意义.

4 结 论

本文首先在 Stein 岭型主成分估计的基础上，运用几乎无偏估计的思想，给出了几乎无偏 Stein 岭型主成分估计. 然后在均方误差准则下，研究几乎无偏 Stein 岭型主成分估计优于最小二乘估计和 Stein 岭型主成分估计的充分条件. 最后通过实例证明在 k 和 p 的一些特定取值下，几乎无偏 Stein 岭型主成分估计的结果较好.

参 考 文 献

[1] 王松桂. 线性模型引论[M]. 北京：科学出版社，2004：78-99.

[2] 朱宁，严冠东，刘庆华. Stein 岭型主成分估计下多个数据删除模型的强影响分析[J]. 汕头大学学报(自然科学版)，2015，30(2)：20-27.

[3] Massy W F. Principal components regression in exploratory statistical research [J]. Journal of the American Statistical Association，1964，60(309)：234-256.

[4] Arthur E II，Robert W K. Ridge regression：applications to nonorthogonal problems[J]. Technometrics，1970，12(1)：69-82.

[5] Liu K. A new class of biased estimate in linear regression[J]. Communications in Statistics Theory & Methods，1993，22(2)：393-402.

[6] Kadiyala K. A class of almost unbiased and efficient estimators of regression coefficients[J]. Economics Letters，1984，16(34)：293-296.

[7] Singh B，Dwivedi T D. An almost unbiased ridge estimator[J]. Sankhya：The Indian Journal of Statistics，1986，48(3)：342-346.

[8] Akdeniz F，Kaciranlar S. On the almost unbiased generalized Liu estimator and unbiased estimation of the bias and MSE[J]. Communication in Statistics- Theory and Methods，1995，24(7)：1789-1797.

[9] 胡宏昌. 半参数回归模型的几乎无偏岭估计[J]. 系统科学与数学，2009，29(12)：1605-1612.

[10] 黎雅莲，杨虎. 受约束回归模型参数的统一几乎无偏估计[J]. 系统科学与数学，2011，31(1)：105-113.

[11] 蔡择林，江秉华. 混合系数线性模型的几乎无偏岭估计[J]. 数学杂志，2013，33(2)：354-358.

[12] 常新锋，晋守博. 线性模型参数的几乎无偏两参数估计[J]. 统计与决策，2014(16)：25-27.

[13] 常新锋. 均方误差意义下几乎无偏两参数估计的优良性[J]. 统计与决策，2014(19)：30-33.

[14] Wu J B. On the predictive performance of the almost unbiased Liu estimator[J]. Communications in Statistics - Theory and Methods，2015. 45(17)：5193-5203.

[15] 王艳，华晶晶. 几乎无偏刘估计的不可容许性[J]. 重庆工商大学学报：自然科学版，2015，32(9)：26-30.

[16] 朱宁，李建军，李兵. 一种有偏岭-压缩组合估计的新形式[C]//第八届中国青年运筹信息管理学者大会论文集. 桂林：[出版者不详]，2006：287-290.

[17] 王松桂，陈敏，陈立萍. 线性统计模型线性回归与方差分析[M]. 北京：高等教育出版社，1999：28-74.

The Optimal Property of Almost Unbiased Stein Ridge Type Principal Component Estimator Under Mean Square Error

Zhu Ning[a]，Liu Qinghua[a]，Zhou Guilan[a]，Nong Yining[b]

(a. School of Mathematics and Computing Science；b. School of Life and Environment Science，Guilin University of Electronic Technology，Guilin 541004，China)

Abstract：We optimize the Stein ridge type principal component estimator by using the mind of almost unbiased estimator，and we get the almost unbiased Stein ridge type principal component estimator. In terms of the mean square error criterion，some sufficient conditions for the almost unbiased stein principal component estimator being better than the least squares estimator，the almost unbiased stein principal component estimator being better than the stein principal component estimator are given . Through numerical experiments，when k or p is given，it proves that the mean square error of the almost unbiased Stein ridge type principal component estimator is relatively close the Stein ridge type principal component estimator，and it is greater than the least squares estimator.

Keywords：mean square error；almost unbiased estimator；Stein ridge type principal component estimator；the optimal property

[责任编辑 陈留院]