文章编号:1000-2367(2015)02-0030-04　　DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2015.02.006

边染色临界图边数的新下界

李卫奇,苗连英,齐林明

(中国矿业大学 理学院,江苏 徐州 221000)

摘　要:Vizing 于 1968 年提出猜想:如果图 G 是一个点数为 n,边数为 m 的 Δ-临界图,那么满足 $m\geq\frac{1}{2}[(\Delta-1)n+3]$. 根据临界图的若干引理,利用差值转移规则给出 5-临界图和 6-临界图(不含三圈)边数的新下界,改进了已有的结果.

关键词:临界图;度;边数

中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A

本文考虑的图都是有限、简单、无向图.

定义 1[1]　设 G 是一个图,用 $d(v)$ 表示 G 的顶点的度数,$V(G)$ 表示 G 的顶点集,$E(G)$ 表示 G 的边集,$\Delta(G)$ 表示 G 的最大度,$\delta(G)$ 表示 G 的最小度,m 表示 G 的边数,n 表示 G 的点数.

定义 2[2-3]　若 $v\in V(G)$ 且 $d(v)=\Delta$,则称 v 是 G 的主顶点.

定义 3[4]　若对 G 的任何边 e,令 $G'=G-e$,如果 $\chi'(G')<\chi'(G)$,则称 G 是临界的. 若 G 是临界的且 $\chi'(G)=\Delta$,则称 G 是 Δ- 临界图. 其中 $\chi'(G)$ 表示 G 的边色数.

1　主要引理

引理 1[5]　设 $xy\in E(G)$,$d(x)=k$,则有:

1) 若 $k<\Delta$,则 y 至少与 $\Delta-k+1$ 个主顶点邻接;

2) 若 $k=\Delta$,则 y 至少与两个主顶点邻接;

3) G 至少有 $\Delta-\delta(G)+2$ 个主顶点;

4) G 至少有 3 个主顶点.

引理 2[6-7]　设 G 是 Δ- 临界图且 $xy\in E(G)$,$d(x)+d(y)=\Delta+2$,则有:

1) x,y 的所有邻点(除 x,y) 均为 Δ 度点;

2) 与 x 距离为 2 的点的度数至少为 $\Delta-1$;

3) 当 $d(x),d(y)<\Delta$ 时,与 x,y 距离为 2 的顶点的度均为 Δ.

引理 3[8]　设 G 是 Δ- 临界图,$\Delta\geq 5$,$d(x)=3$,则 x 至少有两个 Δ 度顶点,记为:u,v 则 u,v 的邻点除 x 外其余的点 $\geq\Delta-1$.

引理 4[9]　设 G 是 Δ- 临界图,$d(x)=4$,若 $\Delta\geq 6$,则有:

1) 若 x 邻接一个($\Delta-2$) 度点,则 x 的其他邻点均为 Δ 度顶点;

2) 若 x 的邻点全是($\geq\Delta-1$) 度点,并且其中一个邻接 3 度点,则 x 的其他 3 个邻点只邻接一个($\leq\Delta-2$) 度点;

3) 若 x 邻接 2 个($\Delta-1$) 度点,则 x 的两个 Δ 度邻点只邻接一个($\leq\Delta-2$) 度点.

收稿日期:2014-05-27;**修回日期**:2014-10-21.

基金项目:国家自然科学基金(11271365)

作者简介:李卫奇(1991-),男,河南新乡人,中国矿业大学硕士研究生,研究方向为图的染色,E-mail: liweiqi0714@163.com.

引理 5[10]　设 G 是 Δ- 临界图，$d(x)=4$，x 有一个 $(\Delta-1)$ 度邻点，记为 w. 如果 w(除 x 外) 邻接一个 $(\Delta-1)$ 度顶点，则 x 的其他 3 个邻点均为 Δ 度顶点，且每一个 Δ 度顶点的邻点均 $\geq \Delta-1$.

2　主要结果

定理 1 对于 5- 临界图(不含三圈)，有 $m \geq \frac{121}{56}n$.

证明　将运用差值转移的规则，对相邻点之间进行转移，从而达到要求.

规则 1　对 $d(x)=2$ 的点，邻接为两个 5 度顶点，设为 u,v. 此时 u,v 向 x 转移差值 $\frac{19}{28}$，并且 u,v 的邻点(异于 x) 向 x 转移差值 $\frac{19}{28}\times\frac{1}{5}$.

规则 2　对 $d(x)=3(\delta(x)=4)$ 的点，设 x 的 3 个邻点分别为 v_1,v_2,v_3 且 $d(v_1)=4$，此时 v_1 向 x 转移差值 0，v_2,v_3 向 x 转移差值 $\frac{19}{28}$.

规则 3　对 $d(x)=3(\delta(x)=5)$. 设 x 的 3 个邻点分别为 v_1,v_2,v_3 且 $d(v_1)=5$，则 v_1 最多关联两个 <5 度的点. 此时 v_1 向 x 转移差值 $\frac{19}{28}\times\frac{1}{j}$，$v_2,v_3$ 向 x 转移差值 $\frac{19}{28}$，j 表示与 v_1 点所邻接 3，4 度的顶点个数之和.

规则 4　对 $d(x)=4$，则 x 从与 x 相邻接的 5 度邻点上转移 $\frac{5}{28}$.

下面按照顶点的度数分别进行讨论. 文中 $c'(x)=c(x)-\frac{121}{28}$ 为经过差值转移后所得到新值.

情形 1　对 $d(x)=2$ 的点

设 x 是一个 2 度顶点，x 邻接 2 个 5 度顶点，设为 u,v. 由引理 2 及本文所限定的条件，u 邻接 4 个不同于 v 的 5 度顶点，v 同样如此，根据规则 1，有 $c'(x)\geq c(x)+\frac{19}{28}\times 2+2\times 4\times\frac{19}{28}\times\frac{1}{5}=\frac{17}{140}\geq 0$.

情形 2　对 $d(x)=3$ 的点.

若 $\delta(x)=4$，设 3 个邻点为 v_1,v_2,v_3 且 $d(v_1)=4$，则由引理 2，v_2,v_3 邻点度数(除 x 外) 均 ≥ 4 且 v_1 有 4 个不同于 x 的 5 度顶点，由规则 2 知：$c'(x)\geq c(x)+\frac{19}{28}\times 2=\frac{1}{28}\geq 0$.

若 $\delta(x)=5$，则由引理 3，x 邻接的 3 个 5 度顶点中至少有 2 个其邻点(除 x 外) 度数均大于等于 4，这两个 5 度顶点均向 x 转移差值 $\frac{19}{28}$，x 的另一个邻点至少向 x 转移差值 $\frac{19}{28}\times\frac{1}{2}$，所以由规则 3 知

$$c'(x)\geq c(x)+\frac{19}{28}\times 2+\frac{19}{28}\times\frac{1}{2}=\frac{21}{56}\geq 0.$$

情形 3　对 $d(x)=4$ 的点.

与 x 相邻接的至少两个 5 度顶点，由规则 4 可知：$c'(x)\geq c(x)+\frac{5}{28}\times 2=\frac{1}{28}\geq 0$.

情形 4　对 $d(x)=5$ 的点.

若 $\delta_1(x)=2$，由引理 2 知 x 的其他邻点均为 5 度点，且与 x 距离为 2 的点的度数均为 4，由规则 1，x 向它的 2 度邻点转移差值 $\frac{19}{28}$，则：$c'(x)\geq c(x)-\frac{19}{28}\geq 0$.

若 $\delta(x)=3,4$，由规则 3 和 4，x 至多向它的邻点转移差值 $\frac{19}{28}$，则 $c'(x)\geq c(x)-\frac{19}{28}\geq 0$.

通过以上验证可知，对于 5- 临界图(不含三圈) 的任意顶点 x，通过差值转移规则，都可以得到 $c'(x)\geq 0$，结论成立.

定理 2　对于 6- 临界图(不含三圈)，有 $m\geq\frac{133}{52}n$.

证明 将运用差值转移的规则,对相邻点之间进行转移,从而达到要求.

规则 1′ 对 $d(x)=2$ 的点,邻接两个 6 度顶点,设为 u,v. 此时 u,v 向 x 转移差值$\frac{23}{26}$,且 u,v 的邻点(异于 x)向 x 转移差值$\frac{23}{26}\times\frac{1}{6}$.

规则 2′ 对 $d(x)=3(\delta(x)=5)$ 的点,设 x 的 3 个邻点分别为 v_1,v_2,v_3,且 $d(v_1)=5$,此时 v_1 向 x 转移差值 0,v_1 的邻点除 x 外向 x 转移差值$\frac{23}{26}\times\frac{1}{6}$,$v_2,v_3$ 向 x 转移差值$\frac{23}{26}$.

规则 3′ 对 $d(x)=3(\delta(x)=6)$. 设 x 的 3 个邻点分别为 v_1,v_2,v_3,且 v_1 最多关联两个小于 5 度的点. 此时 v_1 向 x 转移差值$\frac{23}{26}\times\frac{1}{j}$,$v_2,v_3$ 向 x 转移差值$\frac{23}{26}$. j 表示与 v_1 点所邻接 3,4 度的顶点个数之和.

规则 4′ 对 $d(x)=4$,则 x 从与 x 相邻接的 6 度邻点上转移$\frac{23}{26}$且$(\Delta-2)$度邻点的邻点向 x 转移差值$\frac{23}{26}\times\frac{1}{6}$.

规则 5′ 对 $d(x)=5$,则 x 从与其相邻接的 6 度点上转移$\frac{1}{26}$即可.

下面按照顶点的度数分别进行讨论. 文中 $c''(x)=c(x)-\frac{132}{26}$,为经过差值转移后所得到新值.

情形 1 对 $d(x)=2$ 的点

设 x 是一个 2 度顶点,x 邻接 2 个 6 度顶点,设为 v_2,v_3. 由引理 2 及本文所限定的条件,u 邻接 4 个不同于 v 的 6 度顶点,v 同样如此,根据规则 1′,有 $c''(x)\geq c(x)+\frac{23}{26}\times 2+2\times 5\times\frac{23}{26}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{65}\geq 0$.

情形 2 对 $d(x)=3$ 的点.

若 $\delta(x)=5$,设 3 个邻点为 v_1,v_2,v_3,则由引理 2,v_2,v_3 邻点度数(除 x 外)均 ≥ 5 且 v_1 有 5 个不同于 x 的 6 度顶点,由规则 2′ 知:$c''(x)\geq c(x)+\frac{23}{26}\times 2+\frac{23}{26}\times\frac{1}{6}\times 5\geq 0$.

若 $\delta(x)=6$,则由引理 3,x 邻接的 3 个 6 度顶点中至少有 2 个其邻点(除 x 外)度数均大于等于 5,这两个 6 度顶点均向 x 转移差值$\frac{23}{26}$,x 的另一个邻点至少向 x 转移差值$\frac{23}{26}\times\frac{1}{2}$,所以由规则 3′

$$c''(x)\geq c(x)+\frac{23}{26}\times 2+\frac{23}{26}\times\frac{1}{2}=\frac{57}{52}\geq 0.$$

情形 3 对 $d(x)=4$ 的点.

若 $\delta(x)=4$,由引理 2 知,x 的其他邻点均为 7 度,且 x 邻点的邻点为 7 度,规则 3′ 知:

$$c''(x)=c(x)+\frac{23}{26}\times 3=\frac{20}{13}\geq 0.$$

若 $\delta(x)=5$,则 x 要么邻接 1 个 5 度点,要么邻接 2 个 5 度点. 对于这两种情况都至少有两个 6 度点,则:

$$c''(x)=c(x)+\frac{23}{26}\times 2=\frac{17}{26}\geq 0.$$

情形 4 对 $d(x)=5$ 的点.

每个 x 至少邻接两个 6 度点,则由规则 5′ 可知:$c''(x)=c(x)+\frac{1}{26}\times 2=0$.

情形 5 对 $d(x)=6$ 的点.

若 $\delta_1(x)=2$,由引理 2 知,x 的其他邻点均为 6 度点,且与 x 距离为 2 的点的度数均 ≥ 5,规则 1′,向它的 2 度邻点转移$\frac{23}{26}$,则:$c''(x)=c(x)-\frac{23}{26}=0\geq 0$.

若 $\delta(x)=3,4$,由规则 3′ 和 4′,x 至多向它的邻点转移差值$\frac{23}{26}$,则 $c''(x)=c(x)-\frac{23}{26}=0\geq 0$.

若 $\delta(x)=5$，由规则 $5'$，x 至多向它的邻点转移差值$\frac{23}{26}$，则 $c''(x)=c(x)-\frac{23}{26}=0\geq 0$.

通过以上验证可知，对于 6- 临界图（不含三圈）的任意顶点 x，通过差值转移规则，都可以得到 $c''(x)\geq 0$，结论成立.

3 结　论

临界图具有很多邻接性质，运用差值转移的方法得到边染色 5- 临界图和 6- 临界图（不含三圈）边数的下界分别为 $m\geq\frac{121}{56}n$ 和 $m\geq\frac{133}{52}n$，比目前最好的结果 $m\geq\frac{15}{7}n$[2] 和 $m\geq\frac{33}{13}n$[4] 分别提高了$\frac{1}{56}n$ 和$\frac{1}{52}n$. 所得结论更接近 Vizing 猜想[11]，更有意义.

致谢　对所有帮助该论文顺利完成的老师和同学表示诚挚的谢意.

参　考　文　献

[1] 邦　迪. 图论及其应用[M]. 吴望名，译. 北京：科学出版社，1984.

[2] Luo Rong, Zhang Cunquan. Edge coloring of graphs with small average degree[J]. Discrete Mathematics, 2004, 275: 207-218.

[3] Luo Rong, Miao Lianying, Zhao Yue. The size of edge chromatic critical graphs with maximum degree 6[J]. J Graph Theory, 2009, 60: 149-171.

[4] Woodall D R. The average degree of an edge-chromatic critical graph[J]. Discrete Mathematics, 2008, 308: 803-819.

[5] Vizing V G. Critical graphs with a given chromatic class[J]. DiskretAnaliz, 1965(5): 9-17.

[6] Woodall D R. The average degree of an edge-chromatic critical graph II[J]. J Graph Theory, 2007, 56(3): 194-218.

[7] Miao Lianying. On the size of critical graphs with maximum degree 8[J]. Discrete Mathematics, 2010, 310: 2215-2218.

[8] Vizing V G. Critical graphs with a given chromatic class[J]. Disketnyi Analiz Issledovanie Operatsii, 1965(5): 9-17.

[9] LI Shuchao, Li Xuechao. Edge coloring of graphs with small maximum degrees[J]. Discrete Mathmatice, 2009, 309: 4843-4852.

[10] Miao Lianying. On the average of critical graphs with maximum degree six[J]. Discrete Mathematics, 2011, 311: 2574-2576.

[11] Zhao Yue. New lower bounds for the size of edge chromatic critical graphs[J]. J Graph Theory, 2004, 46(2): 81-92..

The New Size of Edge Chromatic Critical Graphs

LI Weiqi, MIAO Lianying, QI Linming

(School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221000, China)

Abstract: *In 1968, Vizing proposed the following conjecture: If $G=(V,E)$ is a critical graph of ordernand sizem, then* $m\geq\frac{1}{2}[(\Delta-1)n+3]$. Based on some lemmas on critical graphs and the discharging method, a new lower bound for the size of edge chromatic critical graphs with maximum degree 5 and 6 are given.

Keywords: critical graphs; degree; the size of edge