

具有两类平行顾客的灾难清空 排队系统均衡分析

徐秀丽,张荣荣

(燕山大学 理学院,河北 秦皇岛 066004)

摘要:研究了具有两类平行顾客、不完全可靠服务台即带有灾难清空的排队系统中顾客的均衡进队策略.在该排队系统中,两种不同类型的顾客独立到达,且该过程分别形成不同参数的泊松过程.系统是不完全可靠的,系统内所有顾客因灾难发生而被全部清空,且未接受服务被迫退队的顾客可得到一定的补偿.基于顾客的收益-损失函数,在系统信息完全可见和几乎可见两种情形下,分析了两类顾客的均衡阈值策略和系统平均社会收益.最后给出数值案例,得到了系统参数对顾客策略的影响.

关键词:平行顾客;灾难;止步策略;平均社会收益

中图分类号: O226

文献标志码: A

文章编号: 1000-2367(2024)01-0042-09

从经济学的角度研究排队系统的顾客止步行为已成为近年随机运筹和管理科学研究的热点.NAOR^[1]首次研究了在简单线性收益函数下可见情形 M/M/1 排队系统中顾客的均衡策略.在服务系统中,由于故障出现可能导致在场的顾客全部消失,进而产生了清空排队.ECONOMOU 等^[2]研究了顾客到达率和清空发生率随外部随机环境变化而变化的清空排队系统,得到了顾客的均衡策略.张雪露等^[3]在几乎可见情形下将马氏清空排队系统应用于交通服务中,得到了顾客的均衡进队策略.BU 等^[4]研究了具有启动时间和多重休假的 M/G/1 清空服务系统,得到了任意时刻系统的平均队长等性能指标,并对该系统进行了成本分析.

在清空排队系统中,故障发生时顾客可能并未接受服务而被迫退出,需要对顾客的损失给予一定的补偿,如航空公司因天气或其他不可抗力取消航班,此时航空公司会负责安排顾客食宿问题或提出其他解决顾客出行的办法.因而,ECONOMOU 等^[5]在不可见情形下讨论了不可靠排队系统中顾客的均衡止步行为.BOUDALI 等^[6]研究了顾客因灾难到达而被迫退队离开的 M/M/1 排队系统,且被迫退队的顾客可得到一定程度的补偿,服务台被修理完成后顾客才能进入系统,最后求得了顾客的均衡策略和社会最优进队策略.随后,BOUDALI 等^[7]考虑了更一般的情况,即在维修完成之前允许新到达的顾客进队.TIAN 等^[8]在文献[7]基础上考虑了顾客到达时队长不可见的情形,得到了顾客的均衡止步策略.近期,LI 等^[9]在重试排队系统中考虑了系统发生灾难的情形,并在完全可见和几乎不可见两种信息水平下得到了顾客的均衡止步策略和社会最优策略.

此外,在实际生活中,顾客的类型往往不止一种,如在网络平台购物或其他服务中新老顾客的到达;在银行或其他类似服务系统中,企业顾客和个人顾客的到达;票务服务中心来自不同渠道的订单等.这些不同类型

收稿日期: 2022-09-27; **修回日期:** 2022-11-03.

基金项目: 国家自然科学基金(62171143).

作者简介: 徐秀丽(1976—),女,辽宁北票人,燕山大学教授,博士生导师,研究方向为随机服务系统理论及优化,E-mail: xxl-ysu@163.com.

通信作者: 张荣荣(1995—),女,山西临汾人,燕山大学硕士研究生,研究方向为排队经济学,E-mail: zhangrr0714@163.com.

引用本文: 徐秀丽,张荣荣.具有两类平行顾客的灾难清空排队系统均衡分析[J].河南师范大学学报(自然科学版),2024,52(1):42-50.(Xu Xiuli, Zhang Rongrong. Equilibrium analysis of queueing system with two types of parallel customers and disaster[J]. Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition), 2024, 52(1): 42-50. DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2022.09.27.0002.)

的顾客以不同速率到达系统,且两者完成服务得到的收益和等待带来的损失皆不相同.张淞钦等^[10]研究了服务器不完全可靠的排队系统,该系统服务台的维修带有延迟维修特性,并得到了两类平行顾客的均衡策略行为.徐秀丽等^[11]研究了完全可见情形下,具有完全故障和可中断启动关闭策略的排队系统中两类顾客的均衡策略和社会最优收益.

考虑到在各种网购平台大型店铺特殊节日的限时促销活动中,新老顾客的到达率不相同,但都会面临因后台崩溃而抢单失败的可能,而商家将通过发放优惠券作为补偿.在网络通信中,服务器可能会在不同类型信息的传输过程中遭受病毒的攻击,而使待传输的信息丢失或损坏,系统则通过及时抢修和处理,在一定程度上恢复部分信息,以此可视为补偿.基于上述背景,本文将两类平行顾客与灾难清空的系统相结合,基于线性收益-损失函数,在完全可见和几乎可见两种情形下,得到了顾客的均衡阈值策略以及系统单位时间的平均社会收益.最后,在数值分析中讨论了灾难到达率与顾客进队策略及系统平均社会收益的影响关系.

1 模型描述

考虑一个先到先服务(FCFS),容量无限的 M/M/1 排队系统.该系统中两类平行顾客的到达过程相互独立且分别是参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松过程.服务台正常工作时,服务时间服从参数为 μ 的负指数分布.当系统发生灾难时,在场的顾客包括正在接受服务的顾客全部被清空,且灾难维修期间新到达的顾客不再进入系统.灾难发生的时间间隔及维修时间分别服从参数为 ξ 和 η 的负指数分布.在该系统中,顾客到达过程、灾难到达过程、服务过程及维修过程均相互独立.

将时刻 t 系统所处的状态记为 $(N(t), I(t))$,其中 $N(t)$ 和 $I(t)$ 分别表示时刻 t 系统中的顾客数和服务台的状态,且 $I(t) = 0, 1$ 分别表示系统处于灾难维修状态或正常工作状态.因此,随机过程 $\{(N(t), I(t)), t \geq 0\}$ 是一个二维连续时间马尔科夫链,其状态空间为 $\Omega = \{(0, 0)\} \cup \{(n, 1), n \geq 0\}$.

假设顾客是风险中立的,顾客一旦进入系统不能中途退出或决定止步后不能再进入系统.本文关注顾客到达系统时的策略行为,即选择进入还是选择止步.记第 j 类顾客线性“收益-损失”函数为

$$S_j(n) = R_j P_s + R_f (1 - P_s) - C_j E(W), j = 1, 2, \quad (1)$$

其中, R_j 表示第 j 类顾客在接受服务后所能获得的收益, P_s 表示顾客接受服务后离开系统的概率, R_f 表示因灾难发生而被迫退队的顾客得到的补偿,其在一定程度上可减轻顾客的不满, C_j 表示第 j 类顾客单位时间的等待费用, $E(W)$ 表示顾客的平均逗留时间.

顾客需要根据到达系统时获取的信息作出决策,通过了解顾客是否知晓系统中的顾客数和自身顾客类型,将信息分为以下两种:

(1) 完全可见情形:顾客到达时系统中的顾客数及自身所属顾客类型均可见;

(2) 几乎可见情形:顾客到达时系统中的顾客数可见,自身所属顾客类型不可见(实际问题中可由系统分配).

2 完全可见下的均衡策略分析

在完全可见的情形下,到达的顾客知道系统中的顾客数,同时也知道自身所属的顾客类型.假定第 j 类顾客进入系统排队的阈值为 $N_j, j = 1, 2$,即当系统中的顾客数 $N(t) \leq N_j$ 时,顾客选择进入;否则止步.不妨假设第一类顾客先止步,即 $N_1 \leq N_2$.记 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$,其状态转移图如图 1 所示.

定理 1 在具有两类平行顾客且灾难清空的完全可见 M/M/1 排队系统中,第 j 类顾客的均衡止步策略为 $N_j, j = 1, 2$,则顾客的均衡止步策略为:

情形 1 当 $\frac{C_j}{\xi} - \frac{\mu R_j}{\xi} \leq R_j < \frac{C_j}{\xi}$ 时,均衡阈值 N_j 有如下形式

$$N_j = \lfloor \frac{\ln A_j}{\ln B} \rfloor - 1, j = 1, 2, \quad (2)$$

其中, $A_j = \frac{C_j - \xi R_f}{\xi R_{s_j} - \xi R_f + C_j}$, $B = \frac{\mu}{\mu + \xi}$, $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

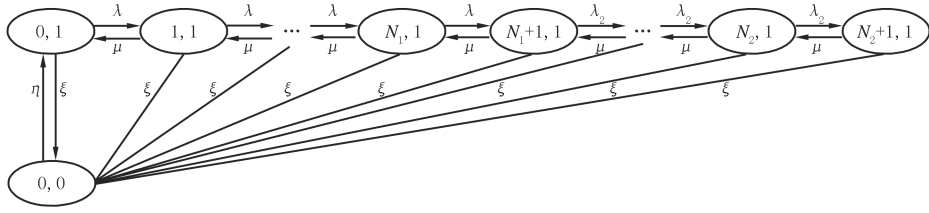


图1 完全可见下的系统状态转移图

Fig.1 Transition rate diagram in fully observable case of queue system

情形 2 当 $R_f \geq \frac{C_j}{\xi}$ 时, 到达的顾客均选择进入系统.

证明 到达的顾客只在系统正常工作状态时才进入系统. 因此考虑当系统处于状态 $(n, 1)$ 时, 一个标记的第 j 类顾客选择进入系统, 那么该顾客离开系统时有两种情形: 一是接受服务后离开系统, 此时该顾客的逗留时间为 $n + 1$ 个顾客接受服务的时间, 记为 Y_{n+1} ; 二是系统发生灾难, 则该标记顾客被迫退队离开, 此时顾客的逗留时间为灾难发生的时间间隔, 记为 X . 因此, 第 j 类标记顾客在系统中的逗留时间为 $W = \min(Y_{n+1}, X)$. 显然, Y_{n+1} 服从参数为 $(n + 1, \mu)$ 的 Erlang 分布, X 服从参数为 ξ 的负指数分布, 且 Y_{n+1} 与 X 相互独立.

由式(1)可知, 在完全可见 M/M/1 排队系统中, 当系统具有两类平行顾客且灾难清空时, 当第 j 类顾客观察到系统状态为 $(n, 1)$, 进入系统接受服务或被迫离开时获得的平均收益 $S_{oj}(n)$ 可表示为

$$S_{oj}(n) = R_{sj}P(Y_{n+1} < X) + R_fP(Y_{n+1} \geq X) - C_jE(W), j = 1, 2. \tag{3}$$

由模型假设计算得出:

$$P(Y_{n+1} < X) = \int_0^\infty e^{-\xi y} \frac{\mu^{n+1}}{n!} y^n e^{-\mu y} dy = \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}\right)^{n+1}, \tag{4}$$

$$E(W) = \int_w^\infty e^{-\xi w} \int_w^\infty \frac{\mu^{n+1}}{n!} u^n e^{-\mu u} du dw = \frac{1}{\xi} \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}\right)^{n+1}\right]. \tag{5}$$

将式(4)、(5)带入式(3)整理得:

$$S_{oj}(n) = R_{sj} \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}\right)^{n+1} + (R_f - \frac{C_j}{\xi}) \left[1 - \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}\right)^{n+1}\right] = (R_{sj} - R_f + \frac{C_j}{\xi}) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi}\right)^{n+1} - \frac{C_j}{\xi} + R_f, j = 1, 2. \tag{6}$$

情形 1 当 $\frac{C_j}{\xi} - \frac{\mu R_{sj}}{\xi} \leq R_f < \frac{C_j}{\xi}$ 时, 由式(6)可知, 到达的顾客在观察到系统状态为 $(0, 1)$ 时会选择进入系统, 且 $S_{oj}(n)$ 是关于 n 的单调减函数, 则 $S_{oj}(n) = 0$ 有唯一解. 令顾客的平均收益损失函数 $S_{oj}(n) = 0$, 可分别得到两类顾客的均衡止步策略 N_j .

情形 2 当 $R_f \geq \frac{C_j}{\xi}$ 时, 由式(6)可知, 顾客的平均收益函数只有非负项, 即顾客的平均收益恒为非负, 此时到达的顾客均选择进入系统.

注 为满足第一类顾客先止步即 $N_1 \leq N_2$, 需满足 $A_1 \geq A_2$, 即

$$\frac{C_1 - \xi R_f}{\xi R_{s1} - \xi R_f + C_1} \geq \frac{C_2 - \xi R_f}{\xi R_{s2} - \xi R_f + C_2}.$$

接下来求系统的平稳分布. 当第 j 类顾客到达时观察到系统顾客数 $N(t) \leq N_j$ 时进入系统, 令 $\{P(0, 0)\} \cup \{P(n, 1), n = 0, 1, \dots, N_2 + 1\}$ 表示系统的稳态概率, 可列出系统稳态平衡方程:

$$\eta P(0,0) = \xi \sum_{n=0}^{N_2+1} P(n,1), n=0,1,\dots,N_2+1, \tag{7}$$

$$(\lambda + \xi)P(0,1) = \eta P(0,0) + \mu P(1,1), \tag{8}$$

$$(\lambda + \mu + \xi)P(n,1) = \lambda P(n-1,1) + \mu P(n+1,1), n=1,2,\dots,N_1, \tag{9}$$

$$(\lambda_2 + \mu + \xi)P(N_1+1,1) = \lambda P(N_1,1) + \mu P(N_1+2,1), \tag{10}$$

$$(\lambda_2 + \mu + \xi)P(n,1) - \lambda_2 P(n-1,1) + \mu P(n+1,1), n=N_1+2,\dots,N_2, \tag{11}$$

$$(\mu + \xi)P(N_2+1,1) = \lambda_2 P(N_2,1). \tag{12}$$

利用齐次线性差分方程求解技术和正则性条件 $P(0,0) + \sum_{n=0}^{N_2+1} P(n,1) = 1$ 求解式(7) ~ (12), 可得到下述结论.

定理 2 在具有两类平行顾客且灾难清空的完全可见 M/M/1 排队系统中, 当所有顾客都遵循均衡阈值策略 (N_1, N_2) 时, 系统的平稳分布为

$$\begin{cases} P(0,0) = \frac{\xi}{\xi + \eta}, \\ P(0,1) = \frac{\eta\xi}{(\eta + \xi)(\lambda + \xi)} + \frac{\mu}{\lambda + \xi}(c_1x_1 + c_2x_2), \\ P(n,1) = c_1x_1^n + c_2x_2^n, n=1,2,\dots,N_1, \\ P(N_1+1,1) = \frac{\lambda}{\lambda_2 + \mu + \xi}(c_1x_1^{N_1} + c_2x_2^{N_1}) + \frac{\mu}{\lambda_2 + \mu + \xi}(c_3x_3^{N_1+2} + c_4x_4^{N_1+2}), \\ P(n,1) = c_3x_3^n + c_4x_4^n, n=N_1+2,\dots,N_2, \\ P(N_2+1,1) = \frac{\lambda_2}{\mu + \xi}(c_3x_3^{N_2} + c_4x_4^{N_2}). \end{cases} \tag{13}$$

其中, $a_1 = \lambda + \mu + \xi - \frac{\lambda\mu}{\lambda + \xi}, b_1 = [(\lambda_2 + \mu + \xi)^2 - \lambda_2\mu]x_3^{N_1+2} - \mu(\lambda_2 + \mu + \xi)x_3^{N_1+3},$

$a_2 = \lambda_2 + \mu + \xi - \frac{\lambda_2\mu}{\mu + \xi}, b_2 = [(\lambda_2 + \mu + \xi)^2 - \lambda_2\mu]x_4^{N_1+2} - \mu(\lambda_2 + \mu + \xi)x_4^{N_1+2},$

$x_{1/2} = \frac{(\lambda + \mu + \xi) \pm \sqrt{(\lambda + \mu + \xi)^2 - 4\lambda\mu}}{2\mu}, x_{3/4} = \frac{(\lambda_2 + \mu + \xi) \pm \sqrt{(\lambda_2 + \mu + \xi)^2 - 4\lambda_2\mu}}{2\mu},$

$c_2 = \frac{a_1x_1 - \mu x_1^2}{\mu x_2^2 - a_1x_2}c_1 - \frac{\lambda\eta\xi}{(\lambda + \xi)(\xi + \eta)(\mu x_2^2 - a_1x_2)}, c_3 = \frac{\lambda_2x_4^{N_2-1} - a_2x_4^{N_2}}{a_2x_3^{N_2} - \lambda_2x_3^{N_2-1}}c_4,$

$c_4 = \frac{\lambda\lambda_2x_1^{N_1}}{b_2}c_1 + \frac{\lambda\lambda_2x_2^{N_1}}{b_2}c_2 - \frac{b_1}{b_2}c_3, ec_1 + fc_2 + gc_3 + hc_4 = 1 - k, k = \frac{\xi\eta}{(\xi + \eta)(\lambda + \xi)} + \frac{\xi}{\xi + \eta},$

$e = \frac{\mu}{\lambda + \xi}x_1 + \frac{\lambda x_1^{N_1}}{\lambda_2 + \mu + \xi} + \frac{x_1 - x_1^{N_1}}{1 - x_1}, f = \frac{\mu}{\lambda + \xi}x_2 + \frac{\lambda x_2^{N_1}}{\lambda_2 + \mu + \xi} + \frac{x_2 - x_2^{N_1+1}}{1 - x_2},$

$g = \frac{\mu x_3^{N_1+2}}{\lambda_2 + \mu + \xi} + \frac{x_3^{N_1+1} - x_3^{N_2+1}}{1 - x_3} + \frac{\lambda_2 x_3^{N_2}}{\mu + \xi}, h = \frac{\mu x_4^{N_1+2}}{\lambda_2 + \mu + \xi} + \frac{x_4^{N_1+1} - x_4^{N_2+1}}{1 - x_4} + \frac{\lambda_2 x_4^{N_2}}{\mu + \xi}.$

在完全可见情形下, 已知系统中的所有顾客分为两类, 则系统的平均社会收益 S_o^{soc} 等于两类顾客各自的平均社会收益 S_{oj}^{soc} 之和. 记第 j 类顾客的平均社会收益

$$S_{oj}^{soc} = \lambda_{ej} [P_{oj}^{ser}R_{sj} + (1 - P_{oj}^{ser}R_{sj})] - C_j E(L_j), j=1,2, \tag{14}$$

其中, λ_{ej} 表示第 j 类顾客的有效到达率, P_{oj}^{ser} 表示第 j 类顾客接受服务的概率, $E(L_j)$ 表示第 j 类顾客的平均队长.

定理 3 在具有两类平行顾客且灾难清空的完全可见 M/M/1 排队系统中, 系统单位时间的平均社会收益为

$$S_o^{soc} = S_{o1}^{soc} + S_{o2}^{soc}, \tag{15}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 S_{o1}^{\text{soc}} &= \lambda_1 \left\{ \left[\frac{\mu(R_{s1} - R_f)}{\mu + \xi} (P(0,1) + l_1) + (R_{s1} - R_f)l_2 + R_f \right] P(0,1) + (R_{s1} - R_f)l_1 l_2 + R_f L_1 + \right. \\
 &\quad \left. [(R_{s1} - R_f)(P(0,1) + l_1) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{N_1+2} + \frac{(N_1 + 1)C_1}{\lambda}] P(N_1 + 1, 1) \right\}, \\
 S_{o2}^{\text{soc}} &= \lambda_2 \left\{ (l_1 + l_4) [R_f + (l_2 + l_5)(R_{s2} - R_f)] - \frac{\lambda_2(l_3 + l_6)C_2}{\lambda} + [R_f + (R_{s2} - R_f)m + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\mu(R_{s2} - R_f)(l_1 + l_4)}{\mu + \xi}] P(0,1) + [R_f + (R_{s2} - R_f)m + (R_{s2} - R_f) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{N_1+2} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{(N_{e1} + 1)C_2}{\lambda}] P(N_1 + 1, 1) + [(R_{s2} - R_f)(l_1 + l_4) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{N_2+2} - \frac{(N_2 + 1)C_2}{\lambda}] P(N_2 + 1, 1) \right\}, \\
 m &= \frac{\mu}{\mu + \xi} P(0,1) + \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{N_1+2} P(N_1 + 1, 1) + \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{N_2+2} P(N_2 + 1, 1) + l_2 + l_5, \\
 l_1 &= \frac{x_1 - x^{N_1+1}}{1 - x_1} c_1 + \frac{x_2 - x^{N_1+1}}{1 - x_2} c_2, l_4 = \frac{x_3^{N_1+1} - x_3^{N_2+1}}{1 - x_3} c_3 + \frac{x_4^{N_1+1} - x_4^{N_2+1}}{1 - x_4} c_4, \\
 l_2 &= \frac{\mu^2 x_1 [(\mu + \xi)^{N_1} - (\mu x_1)^{N_1}]}{(\mu + \xi)^{N_1+1} (\mu + \xi - \mu x_1)} c_1 + \frac{\mu^2 x_2 [(\mu + \xi)^{N_1} - (\mu x_2)^{N_1}]}{(\mu + \xi)^{N_1+1} (\mu + \xi - \mu x_2)} c_2, \\
 l_3 &= \frac{(1 - x_1)(1 - x_1^{N_1} - N_1 x_1^{N_1}) + x_1(1 - x_1^{N_1})}{(1 - x_1)^2} x_1 c_1 + \frac{(1 - x_2)(1 - x_2^{N_1} - N_1 x_2^{N_1}) + x_2(1 - x_2^{N_1})}{(1 - x_2)^2} x_2 c_2, \\
 l_5 &= \frac{\mu(\mu x_3)^{N_1+2} [(\mu + \xi)^{N_2-N_1} - (\mu x_3)^{N_2-N_1}]}{(\mu + \xi)^{N_2+2} (\mu + \xi - \mu x_3)} c_3 + \frac{\mu(\mu x_4)^{N_1+2} [(\mu + \xi)^{N_2-N_1} - (\mu x_4)^{N_2-N_1}]}{(\mu + \xi)^{N_2+2} (\mu + \xi - \mu x_4)} c_4, \\
 l_6 &= \frac{(1 - x_3)[(N_1 + 2)x_3^{N_1+1} - (N_2 + 2)x_3^{N_2+1}] + x_3^{N_1+2}(1 - x_3^{N_2-N_1})}{(1 - x_3)^2} x_3 c_3 + \\
 &\quad \frac{(1 - x_4)[(N_1 + 2)x_4^{N_1+1} - (N_2 + 2)x_4^{N_2+1}] + x_4^{N_1+2}(1 - x_4^{N_2-N_1})}{(1 - x_4)^2} x_4 c_4.
 \end{aligned}$$

证明 由图 1 可知第一类和第二类顾客的有效到达率分别为

$$\lambda_{e1} = \lambda_1 (P(0,1) + \sum_{n=1}^{N_1} P(n,1)), \lambda_{e2} = \lambda_2 (P(0,1) + \sum_{n=1}^{N_1} P(n,1) + P(N_1 + 1, 1) + \sum_{n=N_1+2}^{N_2} P(n,1)).$$

在具有两类平行顾客且灾难清空的排队系统中, 顾客获得的收益由两部分构成: 服务完成获得的收益 R_{sj} ; 因灾难到达未接受服务而获得的补偿 R_f . 因此考虑一个到达的第 j 类顾客, 该顾客获得的平均收益为 R_{sj} 和 R_f 的加权均值. 由式(4)可知, 任意一个到达的顾客观察到系统状态为 $(n, 1)$ 时, 其接受服务的概率为 $P(Y_{n+1} < X) = (\mu / (\mu + \xi))^{n+1}$. 因此, 两类顾客接受服务的概率分别为

$$\begin{aligned}
 P_{o1}^{\text{ser}} &= \frac{\mu}{\mu + \xi} P(0,1) + \sum_{n=1}^{N_1} P(n,1) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} + \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{N_1+2} P(N_1 + 1, 1), \\
 P_{o2}^{\text{ser}} &= \frac{\mu}{\mu + \xi} P(0,1) + \sum_{n=1}^{N_1} P(n,1) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} + \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{N_1+2} P(N_1 + 1, 1) + \\
 &\quad \sum_{n=N_1+2}^{N_2} P(n,1) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} + \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{N_2+2} P(N_2 + 1, 1).
 \end{aligned}$$

由两类顾客的到达率及式(13)可知, 两类顾客的平均队长分别为

$$\begin{aligned}
 E(L_1) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\sum_{n=1}^{N_1} nP(n,1) + (N_1 + 1)P(N_1 + 1, 1) \right), \\
 E(L_2) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\sum_{n=1}^{N_1} nP(n,1) + (N_1 + 1)P(N_1 + 1, 1) \right) + \sum_{n=N_1+2}^{N_2} nP(n,1) + (N_2 + 1)P(N_2 + 1, 1).
 \end{aligned}$$

将上述结果代入式(14),整理可得式(15).

3 几乎可见下的均衡策略分析

考虑一个标记顾客,在几乎可见情形下,该顾客到达时系统中的顾客数对该顾客可见,自身所属的顾客类型对该顾客不可见.假定两类顾客有相同的阈值策略 N_e ,即 $N_1 = N_2 = N_e$,系统状态转移图如图 2 所示.

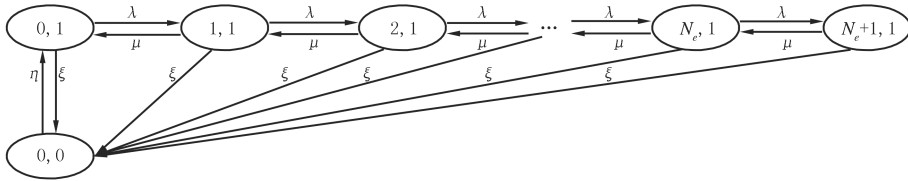


图2 几乎可见下的系统状态转移图

Fig.2 Transition rate diagram in almost observable case of queue system

定理 4 在具有两类平行顾客且灾难清空的几乎可见 M/M/1 排队系统中,任意一类顾客观察到系统中的顾客数 $N(t) \leq N_e$ 时,选择进入系统,均衡阈值 N_e 有如下形式

$$N_e = \lfloor \frac{\ln D - \ln(D + E)}{\ln B} \rfloor - 1, \tag{16}$$

其中, $D = \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2}{\xi(\lambda_1 + \lambda_2)} - R_f, E = \frac{\lambda_1 R_{s1} + \lambda_2 R_{s2}}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

证明 几乎可见情形下,在具有两类平行顾客且灾难清空的排队系统中,第一二类顾客的到达率分别为 λ_1 和 λ_2 ,因此考虑一个到达的顾客,该顾客为两类顾客中第一类顾客的概率为 $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$,为第二类顾客的概率为 $\lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$.令 $E(W)$ 表示到达顾客进队的平均逗留时间,显然, $E(W_1) = E(W_2) = E(W)$. 根据式(1),可知到达顾客进队获得的平均收益为

$$S_a(n) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} [R_{s1}P(Y_{n+1} < X) + R_fP(Y_{n+1} \geq X) - C_1E(W)] + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} [R_{s2}P(Y_{n+1} < X) + R_fP(Y_{n+1} \geq X) - C_2E(W)].$$

根据式(4)和式(5),整理得到顾客的平均收益为

$$S_a(n,1) = \left[\frac{\lambda_1 R_{s1} + \lambda_2 R_{s2}}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2}{\xi(\lambda_1 + \lambda_2)} - R_f \right] \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} + R_f - \frac{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2}{\xi(\lambda_1 + \lambda_2)}. \tag{17}$$

显然, $S_a(n)$ 是关于 n 的单调递减函数,所以顾客的均衡阈值 N_e 唯一.令顾客的平均收益 $S_a(n) = 0$,则可得两类顾客的均衡阈值 N_e .

接下来求系统的平稳分布.在几乎可见情形下,当到达的顾客观察到系统中的顾客数 $N(t) \leq N_e$ 时进入系统,令 $\{P(0,0)\} \cup \{P(n,1), n = 0, 1, \dots, N_e + 1\}$ 表示系统的稳态概率,可列出系统稳态平衡方程

$$\eta P(0,0) = \xi \sum_{n=0}^{N_e+1} P(n,1), n = 0, 1, \dots, N_e + 1, \tag{18}$$

$$(\lambda + \xi)P(0,1) = \eta P(0,0) + \mu P(1,1), \tag{19}$$

$$(\lambda + \mu + \delta)P(n,1) = \lambda P(n-1,1) + \mu P(n+1,1), n = 1, 2, \dots, N_e, \tag{20}$$

$$(\mu + \xi)P(N_e + 1,1) = \lambda P(N_e,1). \tag{21}$$

解上述平衡方程可得下述结论.

定理 5 在具有两类平行顾客且灾难清空的几乎可见 M/M/1 排队系统中,当系统中到达的顾客均以均衡阈值 N_e 作为止步策略时,系统的平稳分布为

$$\begin{cases} P(0,0) = \frac{\xi}{\xi + \eta}, \\ P(0,1) = \frac{\eta\xi}{(\lambda + \xi)(\xi + \eta)} + \frac{\mu}{\lambda + \xi}(d_1x_1 + d_2x_2), \\ P(n,1) = d_1x_1^n + d_2x_2^n, n = 1, 2, \dots, N_e, \\ P(N_e + 1,1) = \frac{\lambda}{\mu + \xi}(d_1x_1^{N_e} + d_2x_2^{N_e}), \end{cases} \quad (22)$$

其中, $d_2 = \frac{\lambda\eta\xi(a_3x_1^{N_e} - \lambda x_1^{N_e-1})}{(\xi + \eta)(\lambda + \xi)[(a_1x_1 - \mu x_1^2)(\lambda x_2^{N_e-1} - a_3x_2^{N_e}) - (\mu x_2^2 - a_1x_2)(a_3x_1^{N_e} - \lambda x_1^{N_e-1})]}$,

$$d_1 = \frac{\lambda x_2^{N_e-1} - a_3x_2^{N_e}}{a_3x_1^{N_e} - \lambda x_1^{N_e-1}}d_2, a_3 = \lambda + \mu + \xi - \frac{\lambda\mu}{\mu + \xi}.$$

定理 6 在具有两类平行顾客且灾难清空的几乎可见 M/M/1 排队系统中, 当任意到达的顾客均以阈值 N_e 作为止步策略时, 系统单位时间的平均社会收益为

$$S_a^{\text{soc}} = S_{a1}^{\text{soc}} + S_{a2}^{\text{soc}}, \quad (23)$$

其中,

$$S_{a1}^{\text{soc}} = \lambda_1 \left\{ \left[\frac{\mu(R_{s1} - R_f)}{\mu + \xi} P(0,1) + l_7 + (R_{s1} - R_f)l_8 + R_f \right] P(0,1) + [(R_{s1} - R_f) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{N_e+2} (P(0,1) + l_7) + \frac{\lambda_1(N_e + 1)C_1}{\lambda}] P(N_e + 1,1) + (R_{s1} - R_f)l_7l_8 + R_f l_7 - \frac{C_1}{\lambda} l_9 \right\},$$

$$S_{a2}^{\text{soc}} = \lambda_2 \left\{ \left[\frac{\mu(R_{s2} - R_f)}{\mu + \xi} (P(0,1) + l_7) + (R_{s2} - R_f)l_8 + R_f \right] P(0,1) + [(R_{s2} - R_f) \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{N_e+2} (P(0,1) + l_7) + \frac{\lambda_2(N_e + 1)C_2}{\lambda}] P(N_e + 1,1) + (R_{s2} - R_f)l_7l_8 + R_f l_7 - \frac{C_2}{\lambda} l_9 \right\},$$

$$l_7 = \frac{x_1 - x_1^{N_e+1}}{1 - x_1} d_1 + \frac{x_2 - x_2^{N_e+1}}{1 - x_2} d_2,$$

$$l_8 = \frac{\mu^2 x_1 [(\mu + \xi)^{N_e} - (\mu x_1)^{N_e}]}{(\mu + \xi)^{N_e+1} (\mu + \xi - \mu x_1)} d_1 + \frac{\mu^2 x_2 [(\mu + \xi)^{N_e} - (\mu x_2)^{N_e}]}{(\mu + \xi)^{N_e+1} (\mu + \xi - \mu x_2)} d_2,$$

$$l_9 = \frac{(1 - x_1)(1 - x_1^{N_e} - N_e x_1^{N_e}) + x_1(1 - x_1^{N_e})}{(1 - x_1)^2} x_1 d_1 + \frac{(1 - x_2)(1 - x_2^{N_e} - N_e x_2^{N_e}) + x_2(1 - x_2^{N_e})}{(1 - x_2)^2} x_2 d_2.$$

证明 由图 2 可得到两类顾客的有效到达率分别为

$$\lambda_{aej} = \lambda_j (P(0,1) + \sum_{n=1}^{N_e} P(n,1)), j = 1, 2.$$

因到达的顾客不知道自身所属的顾客类型, 则两类顾客有相同的阈值策略, 且两类顾客接受服务或被迫退队的概率相同. 同样对于任意一个到达的顾客, 其接受服务的概率为

$$P_{a1}^{\text{ser}} = P_{a2}^{\text{ser}} = \frac{\mu}{\mu + \xi} P(0,1) + \sum_{n=1}^{N_e} \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{n+1} + \left(\frac{\mu}{\mu + \xi} \right)^{N_e+2} P(N_e + 1,1).$$

由系统稳态分布可知, 两类顾客的平均队长分别为

$$E(L_j) = \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[\sum_{n=1}^{N_e} n P(n,1) + (N_e + 1) P(N_e + 1,1) \right], j = 1, 2.$$

根据式(14), 可分别得到几乎可见下两类顾客单位时间的平均社会收益, 整理可得式(23).

4 数值分析

本节基于上述研究结果, 在完全可见和几乎可见两种信息精度下, 分析了两类顾客个体均衡阈值和系统

单位时间的平均社会收益对灾难到达率 ξ 的敏感度.

设 $R_{s1} = 9, R_{s2} = 7, R_f = 6, C_1 = 7, C_2 = 6, \mu = 4$, 图 3 表明完全可见情形下两类顾客的均衡阈值 N_j 随灾难到达率 ξ 的变化趋势. 首先, 个体的均衡阈值与两类顾客的到达率无关. 其次, 在完全可见情形下, 顾客以均衡阈值进队需满足条件 $\xi \geq C_j/R_f$, 因而由图 3 可以看出, 随着灾难到达率的增大, 两类顾客的均衡阈值在逐渐减小, 说明此时顾客因灾难获得的补偿小于在系统中等待付出的成本, 则新到达的顾客不愿意进入系统, 若要增加系统中的顾客数, 系统管理者需要提高对顾客的补偿.

设 $R_{s1} = 8, R_{s2} = 7, R_f = 6, C_1 = 7, C_2 = 6, \mu = 4, \eta = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 图 4 表明完全可见情形下系统平均社会收益 S_a^{soc} 随灾难到达率 ξ 的变化趋势. 可以看出, 当 ξ 在此范围内变化时, 随着灾难到达率的增大, 两类顾客的平均社会收益逐渐增加, 说明此时因补偿不能弥补等待成本, 两类顾客进队阈值降低, 不愿进入系统, 从而避免了系统过度拥挤, 此时系统管理者可通过适当提高补偿以增加系统中两类顾客的顾客数.

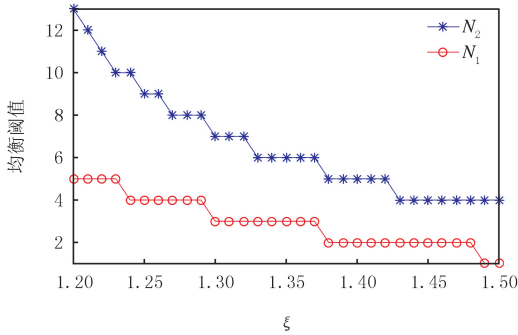


图3 N_j 随 ξ 的变化图

Fig. 3 N_j with respect to ξ

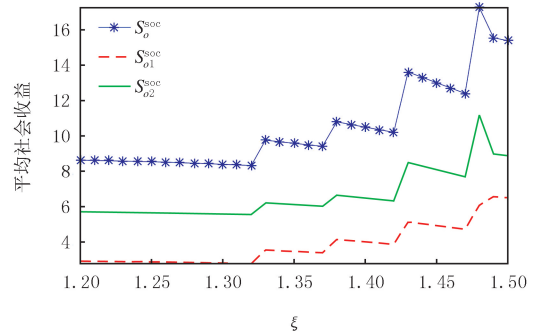


图4 S_a^{soc} 随 ξ 的变化图

Fig. 4 S_a^{soc} with respect to ξ

设 $R_{s1} = 8, R_{s2} = 7, R_f = 6, C_1 = 7, C_2 = 6, \mu = 4, \eta = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 图 5 为几乎可见情形下两类顾客的均衡阈值 N_e 与灾难到达率 ξ 的相关关系图. 当两类顾客不知自身顾客类型时, 有相同的均衡阈值. 总体阈值在 $\xi = 1$ 处取得极值, 在 $\xi = 1$ 左侧阈值随灾难到达率的增加而增加, 在 $\xi = 1$ 右侧阈值随灾难到达率的增加而减小.

设 $R_{s1} = 8, R_{s2} = 7, R_f = 6, C_1 = 7, C_2 = 6, \mu = 4, \eta = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, 图 6 为几乎可见情形下灾难到达率 ξ 与系统单位时间的平均社会收益 S_a^{soc} 的相关关系图. 当 ξ 在 $[1.0, 1.7]$ 范围内变化时, 系统单位时间的平均社会收益基本保持不变, 说明在此范围内灾难到达造成的损失和补偿可以相互抵消, 而当 ξ 大于 1.9 时, 系统的社会收益突然减小, 说明到达的顾客造成系统过于拥挤, 此时系统管理者可通过适当降低补偿以减缓系统压力.

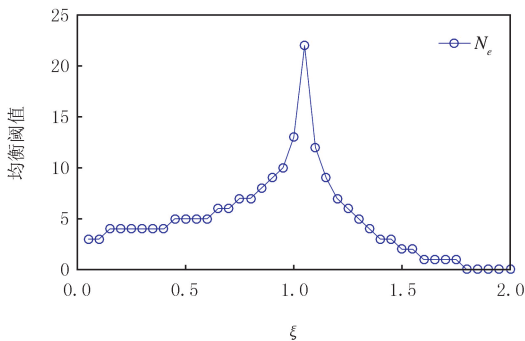


图5 N_e 随 ξ 的变化图

Fig. 5 N_e with respect to ξ

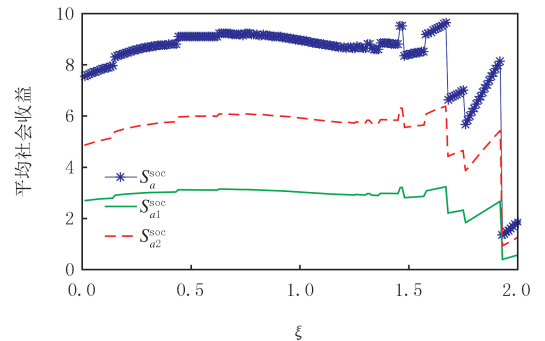


图6 S_a^{soc} 随 ξ 的变化图

Fig. 6 S_a^{soc} with respect to ξ

5 结 语

本文研究了在具有两类平行顾客的灾难清空排队系统中顾客均衡策略行为. 在完全可见和几乎可见两

种信息精度下,基于顾客收益-损失函数,得到了个体均衡阈值策略和系统单位时间的平均社会收益.最后,通过数值算例得到了灾难到达率对顾客阈值策略和系统平均社会收益的影响,可为相关灾难清空排队系统的优化提供一定参考.

参 考 文 献

- [1] NAOR P.The regulation of queue size by levying tolls[J].Econometrica,1969,37(1):15.
- [2] ECONOMOU A,MANOU A.Equilibrium balking strategies for a clearing queueing system in alternating environment[J].Annals of Operations Research,2013,208(1):489-514.
- [3] 张雪露,王金亭.伴有故障和延迟维修的清空排队系统的均衡分析[J].北京交通大学学报,2014,38(3):141-145.
ZHANG X L,WANG J T.Equilibrium analysis for a clearing queueing system with breakdowns and delayed repairs[J].Journal of Beijing Jiaotong University,2014,38(3):141-145.
- [4] BU Q H,LIU L W.An M/G/1 clearing queueing system with setup time and multiple vacations for an unreliable server[J].Communications in Statistics-Theory and Methods,2019,48(11):2810-2826.
- [5] ECONOMOU A,KANTA S.Equilibrium balking strategies in the observable single-server queue with breakdowns and repairs[J].Operations Research Letters,2008,36(6):696-699.
- [6] BOUDALI O,ECONOMOU A.Optimal and equilibrium balking strategies in the single server Markovian queue with catastrophes[J].European Journal of Operational Research,2012,218(3):708-715.
- [7] BOUDALI O,ECONOMOU A.The effect of catastrophes on the strategic customer behavior in queueing systems[J].Naval Research Logistics(NRL),2013,60(7):571-587.
- [8] TIAN R L,WANG Y L.Equilibrium strategies in the almost unobservable queues with catastrophes and repairs[C]//2019 Chinese Control Conference(CCC).[s.l.]:IEEE,2019:1321-1326.
- [9] LI K L,WANG J T.Equilibrium balking strategies in the single-server retrial queue with constant retrial rate and catastrophes[J].Quality Technology & Quantitative Management,2021,18(2):156-178.
- [10] 张淞钦,徐秀丽.具有两类平行顾客的不完全故障排队系统均衡分析[J].系统科学与数学,2019,39(4):637-647.
ZHANG S T,XU X L.Equilibrium analysis of queueing system with two types of parallel customers and partial failures[J].Journal of Systems Science and Mathematical Sciences,2019,39(4):637-647.
- [11] 徐秀丽,王蕊.完全可见下具有两类顾客和故障启动排队系统的均衡分析[J].河南师范大学学报(自然科学版),2021,49(2):7-14.
XU X L,WANG R.Equilibrium strategies of queueing system with two types of parallel customers,breakdowns and setup times in fully visible case[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2021,49(2):7-14.

Equilibrium analysis of queueing system with two types of parallel customers and disaster

Xu Xiuli, Zhang Rongrong

(School of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: This paper studies the equilibrium strategies of two classes of parallel customers in a queueing system which has disaster arrival. In this queueing system, the arrival processes of two types of customers are mutually independent and form a Poisson process with different parameters respectively. The system is not completely reliable, all customers in the system are emptied due to the arrival of disaster, so that customers who have not finished the service are forced to withdraw from the queue and receive certain compensation. According to the benefit-loss function, the paper analyzes the equilibrium balking strategies of customers and the average social benefit of the system at the two cases of fully observable and almost observable system information level, respectively. Finally, the influence of system parameters on these strategies is analyzed through numerical examples.

Keywords: parallel customers; disaster; balking strategies; the average social benefits