

一类 Minimax 分式规划问题的迭代算法

申培萍, 陈晓

(河南师范大学 数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

摘要:对一类 Minimax 分式规划问题(MFP)提出一个迭代算法. 首先通过引进变量和指数变换, 将问题(MFP)等价转化为问题(Q), 然后利用代数-几何平均不等式以及合适的转化过程, 将等价问题(Q)压缩为凸规划问题(\tilde{Q}). 从而根据选择不同的点所对应的压缩问题(\tilde{Q}), 将原问题的求解过程转化为求解一系列的凸规划问题. 数值实验表明算法是可行有效的.

关键词:Minimax 问题; 凸规划; 迭代算法

中图分类号:O221.2

文献标志码:A

考虑如下—类带有广义多项式约束的 Minimax 分式规划问题:

$$(MFP): \begin{cases} \min \max & \left\{ \frac{n_1(x)}{d_1(x)}, \frac{n_2(x)}{d_2(x)}, \dots, \frac{n_p(x)}{d_p(x)} \right\}, \\ \text{s.t.} & x \in X = \{ x \in \mathbf{R}_n^+ \mid \phi_m(x) \leq 1, m = 1, 2, \dots, l \}. \end{cases}$$

其中,

$$n_j(x) = \sum_{t=1}^{T_j^1} \alpha_{jt} \prod_{i=1}^n x_i^{\rho_{jti}^1}, j = 1, 2, \dots, p,$$

$$d_j(x) = \sum_{t=1}^{T_j^2} \beta_{jt} \prod_{i=1}^n x_i^{\rho_{jti}^2}, j = 1, 2, \dots, p,$$

$$\phi_m(x) = \sum_{t=1}^{T_m^3} \gamma_{mt} \prod_{i=1}^n x_i^{\rho_{mti}^3}, m = 1, 2, \dots, l.$$

$\alpha_{jt}, \beta_{jt}, \gamma_{mt}, \rho_{jti}^1, \rho_{jti}^2, \rho_{mti}^3$ 均为任意实数; T_j^1, T_j^2, T_m^3 为任意正整数. 假设问题(MFP)的可行域 X 是有界集, 且目标函数中的 $n_j(x), d_j(x)$ 满足下面条件:

$$n_j(x) \geq 0, d_j(x) > 0, \forall x \in X, j = 1, 2, \dots, p.$$

问题(MFP)是一类特殊的分式规划问题, 这类问题在很多领域有广泛应用, 如: 电子电路设计^[1], 神经网络^[2], 信号处理^[3], 衡量系统效率或生产率^[4]等. 近几年, 对于这类问题已提出多种求解方法, 包括分支定界算法^[5], 确定性算法^[6], 割平面算法^[7], 单调化方法^[8]等等. 这些方法都是针对问题(MFP)的特殊形式进行讨论的, 如 $n_j(x), d_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, p$) 均为线性函数^[5-6]. 本文考虑—类带有广义多项式约束的 Minimax 分式规划问题, 首先通过引入变量将原来的 Minimax 问题转化为等价的极小化问题, 再根据指数变换和代数-几何平均不等式, 将等价问题压缩为易于求解的凸规划问题. 这样, 原来的 Minimax 问题的最优解就可以通过求解—系列凸规划问题而获得. 同时, 数值实验结果表明本文提出算法是可行和有效的. 相比于其他方法, 本文考虑的模型不仅更为广泛, 而且数值算例表明算法在较少的迭代次数和运行时间内获得问题(MFP)的最优解.

收稿日期:2017-12-10; 修回日期:2017-12-25.

基金项目:国家自然科学基金(11671122); 河南省高等学校重点科研项目(17A110006).

作者简介(通信作者): 申培萍(1964—), 女, 河南南阳人, 河南师范大学教授, 博士, 研究方向为最优化理论与应用,

E-mail: shenpp@htu.cn.

1 等价问题

首先,通过引进变量 x_{n+1} ,将问题(MFP)转化为如下等价形式:

$$(EP1): \begin{cases} \min & x_{n+1}, \\ \text{s.t.} & \frac{n_j(x)}{d_j(x)} \leq x_{n+1}, \quad j = 1, 2, \dots, p, \\ & \phi_m(x) \leq 1, \quad m = 1, 2, \dots, l, \end{cases}$$

问题(MFP)与问题(EP1)的等价性由下面定理 1 给出.

定理 1 如果 $(x^*, x_{n+1}^*) \in \mathbf{R}^{n+1}$ 是问题(EP1)的全局最优解,则 x^* 是问题(MFP)的全局最优解.反之,如果 x^* 是问题(MFP)的全局最优解,那么 (x^*, x_{n+1}^*) 是问题(EP1)的全局最优解,其中 $x_{n+1}^* =$

$$\max \left\{ \frac{n_1(x^*)}{d_1(x^*)}, \dots, \frac{n_p(x^*)}{d_p(x^*)} \right\}.$$

证明 由问题(MFP)和问题(EP1)的结构易知结论成立,故略.

为了求解问题(EP1),令 $x_i = \exp(\tau_i)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$,则问题(EP1)中的不等式约束可写为:

$$\sum_{t=1}^{T_j^1} \alpha_{jt} \exp\left(\sum_{i=1}^n \rho_{jti}^1 \tau_i\right) \leq \sum_{t=1}^{T_j^2} \beta_{jt} \exp\left(\sum_{i=1}^n (\rho_{jti}^2 \tau_i + \tau_{n+1})\right), \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (1)$$

$$\sum_{t=1}^{T_m^3} \gamma_{mt} \exp\left(\sum_{i=1}^n \rho_{mti}^3 \tau_i\right) \leq 1, \quad m = 1, 2, \dots, l. \quad (2)$$

进一步,对于不等式约束(1)~(2)式,为了把它们表示为两个正项式差的形式,引入如下记号:

$$p_j^+ = \{t \in T_j^1 \mid \alpha_{jt} > 0\}, p_j^- = \{t \in T_j^1 \mid \alpha_{jt} < 0\},$$

$$q_j^+ = \{t \in T_j^2 \mid \beta_{jt} > 0\}, q_j^- = \{t \in T_j^2 \mid \beta_{jt} < 0\},$$

$$J_m^+ = \{t \in T_m^3 \mid \gamma_{mt} > 0\}, J_m^- = \{t \in T_m^3 \mid \gamma_{mt} < 0\},$$

则不等式约束(1)~(2)式可表示为

$$f_j^+(\tau) - f_j^-(\tau) \leq g_j^+(\tau) - g_j^-(\tau), \quad (3)$$

$$\varphi_m^+(\tau) - \varphi_m^-(\tau) \leq 1, \quad (4)$$

其中,

$$f_j^+(\tau) = \sum_{t \in p_j^+} \alpha_{jt} \exp\left(\sum_{i=1}^n \rho_{jti}^1 \tau_i\right), f_j^-(\tau) = \sum_{t \in p_j^-} (-\alpha_{jt}) \exp\left(\sum_{i=1}^n \rho_{jti}^1 \tau_i\right),$$

$$\varphi_m^+(\tau) = \sum_{t \in J_m^+} \gamma_{mt} \exp\left(\sum_{i=1}^n \rho_{mti}^3 \tau_i\right), \varphi_m^-(\tau) = \sum_{t \in J_m^-} (-\gamma_{mt}) \exp\left(\sum_{i=1}^n \rho_{mti}^3 \tau_i\right),$$

$$g_j^+(\tau) = \sum_{t \in q_j^+} \beta_{jt} \exp\left(\sum_{i=1}^n (\rho_{jti}^2 \tau_i + \tau_{n+1})\right), g_j^-(\tau) = \sum_{t \in q_j^-} (-\beta_{jt}) \exp\left(\sum_{i=1}^n (\rho_{jti}^2 \tau_i + \tau_{n+1})\right).$$

上面的不等式约束(3)式和(4)式,可进一步变为:

$$\frac{f_j^+(\tau) + g_j^-(\tau)}{f_j^-(\tau) + g_j^+(\tau)} \leq 1, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

$$\frac{\varphi_m^+(\tau)}{\varphi_m^-(\tau) + 1} \leq 1, \quad m = 1, 2, \dots, l.$$

现在考虑(EP1)中的目标函数 x_{n+1} ,经指数变换 $x_i = \exp(\tau_i)$ 后,它可转化为 $\exp(\tau_{n+1})$.根据指数函数的单调性,可将 τ_{n+1} 代替 $\exp(\tau_{n+1})$ 作为目标函数.因此,通过上述引进变量和指数变换,问题(EP1)等价于下面的问题(Q):

$$(Q): \begin{cases} \min & h_0(\tau) = \tau_{n+1}, \\ \text{s.t.} & h_k(\tau) \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, p + l, \end{cases}$$

其中,

$$h_k(\omega) = \begin{cases} \frac{f_k^+(\omega) + g_k^-(\omega)}{f_k^-(\omega) + g_k^+(\omega)}, k = 1, 2, \dots, p, \\ \frac{\varphi_{k-p}^+(\omega)}{\varphi_{k-p}^-(\omega) + 1}, k = p + 1, \dots, p + l. \end{cases}$$

问题(EP1)与问题(Q)的等价性由如下定理2给出.

定理2 若 $\omega^* = (\ln(x_1^*), \dots, \ln(x_{n+1}^*))$ 是问题(Q)的全局最优解, 则 $(x^*, x^*)_{n+1} \in \mathbf{R}^{n+1}$ 是问题(EP1)的全局最优解, 其中 $x^* \in \mathbf{R}^n$. 反之, 若 $(x^*, x_{n+1}^*) \in \mathbf{R}^{n+1}$ 是问题(EP1)的全局最优解, 那么 ω^* 是问题(Q)的全局最优解, 其中 $\omega^* = (\ln(x_1^*), \dots, \ln(x_{n+1}^*))$.

证明 由问题(Q)的构造过程, 易知问题(EP1)与问题(Q)的等价性成立, 故略.

2 凸化过程

基于定理1和定理2, 原问题(MFP)等价于问题(Q). 然而, 观察到问题(Q)中的约束是一种多项式与多项式之比的形式, 这使得问题(Q)是一类不易解决的NP-难问题. 为了解决问题(Q), 将提出一种新的压缩方法, 首先, 将问题(Q)中约束的分母用单项式代替, 使得问题(Q)中的约束转化为凸约束. 为此, 考虑如下函数:

$$G(\omega) = \sum_{t=1}^q b_t \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_{ti} \omega_i\right). \quad (7)$$

给定点 $\omega \in \mathbf{R}^{n+1}$, 通过代数-几何平均不等式, 有

$$G(\omega) \geq \hat{G}(\omega; \bar{\omega}) = \prod_{t=1}^q \left(\frac{b_t}{\alpha_t(\bar{\omega})} \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_{ti} \bar{\omega}_i\right) \right)^{\alpha_t(\bar{\omega})} = \prod_{t=1}^q \left(\frac{b_t}{\alpha_t(\bar{\omega})} \right)^{\alpha_t(\bar{\omega})} \exp\left(\sum_{t=1}^q \alpha_t(\bar{\omega}) \sum_{i=1}^{n+1} \mu_{ti} \bar{\omega}_i\right), \quad (8)$$

其中参数 $\alpha_t(\bar{\omega})$ 可由(9)式得到

$$\alpha_t(\bar{\omega}) = \frac{b_t}{G(\bar{\omega})} \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_{ti} \bar{\omega}_i\right), t = 1, 2, \dots, q. \quad (9)$$

现在, 对问题(Q)的约束条件中的分母, 利用(8)~(9)式, 可以得到以下结果:

当 $k = 1, 2, \dots, p$ 时, 令

$$\theta_{kt}(\bar{\omega}) = \frac{(-\alpha_{kt}) \exp\left(\sum_{i=1}^n \rho_{kti} \bar{\omega}_i\right)}{f_k^-(\bar{\omega}) + g_k^+(\bar{\omega})}, \sigma_{kt}(\bar{\omega}) = \frac{\beta_{kt} \exp\left(\sum_{i=1}^n (\rho_{kti}^2 \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_{n+1})\right)}{f_k^-(\bar{\omega}) + g_k^+(\bar{\omega})}, \quad (10)$$

$$\lambda_{kt}^1(\bar{\omega}) = \left(\prod_{t \in \bar{p}_k} \left(\frac{-\alpha_{kt}}{\theta_{kt}(\bar{\omega})} \right)^{\theta_{kt}(\bar{\omega})} \right) \left(\prod_{t \in \bar{q}_k^+} \left(\frac{\beta_{kt}}{\sigma_{kt}(\bar{\omega})} \right)^{\sigma_{kt}(\bar{\omega})} \right).$$

那么有

$$f_k^-(\omega) + g_k^+(\omega) \geq \prod_{t \in \bar{p}_k} \left(\frac{(-\alpha_{kt})}{\theta_{kt}(\bar{\omega})} \exp\left(\sum_{i=1}^n \rho_{kti} \omega_i\right) \right)^{\theta_{kt}(\bar{\omega})} \prod_{t \in \bar{q}_k^+} \left(\frac{\beta_{kt}}{\sigma_{kt}(\bar{\omega})} \exp\left(\sum_{i=1}^n (\rho_{kti}^2 \omega_i + \omega_{n+1})\right) \right)^{\sigma_{kt}(\bar{\omega})} = \lambda_{kt}^1(\bar{\omega}) \exp\left(\sum_{t \in \bar{p}_k} \theta_{kt}(\bar{\omega}) \sum_{i=1}^n \rho_{kti} \omega_i + \sum_{t \in \bar{q}_k^+} \sigma_{kt}(\bar{\omega}) \sum_{i=1}^n (\rho_{kti}^2 \omega_i + \omega_{n+1})\right) \triangleq F_k(\omega; \bar{\omega}).$$

当 $k = p + 1, \dots, p + l$ 时, 记

$$\xi_{k-p}(\bar{\omega}) = \frac{1}{\varphi_{k-p}^-(\bar{\omega}) + 1}, \quad (11)$$

$$\zeta_{(k-p)t}(\bar{\omega}) = \frac{(-\gamma_{(k-p)t}) \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} \eta_{(k-p)ii}^3 \bar{\omega}_i\right)}{\varphi_{k-p}^-(\bar{\omega}) + 1}, \quad (12)$$

$$\lambda_{(k-p)t}^2(\bar{w}) = \prod_{i \in J_{k-p}^-} \left(\frac{-\gamma_{(k-p)t}}{\zeta_{(k-p)t}(\bar{w})} \right)^{\zeta_{(k-p)t}(\bar{w})} \left(\frac{1}{\xi_{k-p}(\bar{w})} \right). \quad (13)$$

则有

$$\begin{aligned} \varphi_{k-p}^-(w) + 1 &\geq \prod_{i=1}^{J_{k-p}^-} \left(\frac{-\gamma_{(k-p)t}}{\zeta_{(k-p)t}(\bar{w})} \exp\left(\sum_{i=1}^n \eta_{(k-p)it}^3 w_i\right) \right)^{\zeta_{(k-p)t}(\bar{w})} \left(\frac{1}{\xi_{k-p}(\bar{w})} \right)^{\xi_{k-p}(\bar{w})} = \\ &\lambda_{(k-p)t}^2(\bar{w}) \exp\left(\sum_{i \in J_{k-p}^-} \zeta_{(k-p)t}(\bar{w}) \sum_{i=1}^n \eta_{(k-p)it}^3 w_i\right) \triangleq \Phi_{k-p}(w; \bar{w}). \end{aligned}$$

基于上述结果,可将问题(Q)最终压缩成下面问题:

$$\tilde{Q}(w): \begin{cases} \min & h_0(w) = w_{n+1}, \\ \text{s.t.} & \tilde{h}_k(w; \bar{w}) \leq 1, k = 1, 2, \dots, p+l, \end{cases}$$

其中,

$$\tilde{h}_k(w; \bar{w}) = \begin{cases} \frac{f_k^+(w) + g_k^-(w)}{F_k(w; \bar{w})}, k = 1, 2, \dots, p, \\ \frac{\varphi_{k-p}^+(w)}{\Phi_{k-p}(w; \bar{w})}, k = p+1, \dots, p+l. \end{cases}$$

由 $f_k^+(w), g_k^-(w), \varphi_{k-p}^+(w)$ 的表达式知, $f_k^+(w), g_k^-(w), \varphi_{k-p}^+(w)$ 都是凸函数, 又根据 $F_k(w; \bar{w})$ 和 $\Phi_{k-p}(w; \bar{w})$ 均为单项式, 故 $\tilde{h}_k(w; \bar{w})$ 为凸函数. 这样, 问题 $\tilde{Q}(w)$ 是凸规划问题.

对于任意给定的点 $\bar{w} \in \mathbf{R}^{n+1}$, 从问题 $\tilde{Q}(\bar{w})$ 的构造过程, 可以发现, 问题 $\tilde{Q}(\bar{w})$ 和问题(Q)的最优值是相等的, 且可以证明问题(Q)和问题 $\tilde{Q}(\bar{w})$ 的约束函数满足: $h_k(w) = \tilde{h}_k(w; \bar{w})$. 这样, 通过选取 $\bar{w} \in \mathbf{R}^{n+1}$, 问题 $\tilde{Q}(\bar{w})$ 可以作为问题(Q)的近似. 因此, 依靠选取不同的点 \bar{w} , 问题(Q)的最优解就可以通过求解一系列的凸规划问题 $\tilde{Q}(\bar{w})$ 得到, 详细过程将在下面给出.

3 算法及其收敛性

基于上述讨论, 原问题(MFP)等价于问题(Q). 对于给定点 \bar{w} , 利用代数-几何平均不等式, 问题(Q)被压缩转化为凸规划问题 $\tilde{Q}(\bar{w})$. 下面, 将提出一个迭代算法, 通过求解一系列的凸规划问题 $\tilde{Q}(\bar{w})$ 来获得问题(Q)的最优解, 继而获得问题(MFP)的最优解. 首先, 对于给定的初始点 w^0 , 令 $\bar{w} = w^0$, 计算(10)、(11)和(12)式中相应参数 $\theta_{kt}, \sigma_{kt}, \xi_{k-p}$ 和 $\zeta_{(k-p)t}$, 并求解凸规划问题 $\tilde{Q}(w^0)$, 记其解为 w^1 . 如果 $w^1 = w^0$, 算法终止, w^1 为问题(Q)的最优解. 否则, 令 $\bar{w} = w^1$, 重复上述过程直至满足终止条件. 算法具体过程如下:

步骤 0 选取初始点 w^0 . 置迭代次数 $r = 1$.

步骤 1 令 $\bar{w} = w^{r-1}$. 用 \bar{w} 计算(10)、(11)和(12)中相应的参数 $\theta_{kt}, \sigma_{kt}, \xi_{k-p}, \zeta_{(k-p)t}$.

步骤 2 求解凸规划问题 $\tilde{Q}(\bar{w})$ 获得解 w^r .

步骤 3 若 $w^r = w^{r-1}$, 算法停止. 令 $w^* = w^r$ 且 w^* 为问题(Q)的最优解. 否则, 置 $r = r + 1$, 并转向步骤 1.

注 当算法停止时, 问题(MFP)的最优解为 $x^* = (\exp(w_1^*), \exp(w_2^*), \dots, \exp(w_n^*))$.

下面为了讨论算法的收敛性, 先给出引理 1.

引理 1 对于算法中产生的每一个点 $w^r (r \geq 1)$ 均有

$$h_k(w^r) = \tilde{h}_k(w^r; w^r) \nabla h_k(w^r) = \nabla \tilde{h}_k(w^r; w^r), k = 1, 2, \dots, p+l,$$

其中, ∇ 代表函数的梯度.

证明 首先考虑(7)式和(8)式的函数 $G(w)$ 和 $\hat{G}(w; \bar{w})$. 由(8)式知,

$$\hat{G}(w; \bar{w}) = \prod_{i=1}^q \left(\frac{b_i}{\alpha_i(\bar{w})} \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_{it} \bar{w}_i\right) \right)^{\alpha_i(\bar{w})}, \quad (14)$$

将(9)式中的 $\alpha_i(\bar{w})$ 代入(14)式, 结合 $\sum_{i=1}^q \alpha_i(\bar{w}) = 1$, 有

$$\hat{G}(\bar{w}; \bar{w}) = \prod_{i=1}^q (G(\bar{w}))^{\alpha_i(\bar{w})} = (G(\bar{w}))_{i=1}^{\sum_{i=1}^q \alpha_i(\bar{w})} = G(\bar{w}),$$

即 $G(w) = \hat{G}(w; w)$.

另外,由(7)式和(8)式,得

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G(w)}{\partial w_i} \right|_w &= \sum_{i=1}^q b_i \mu_{ii} \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_{ii} w_i\right), i=1, 2, \dots, n+1, \\ \left. \frac{\partial \hat{G}(w; w)}{\partial w_i} \right|_w &= \prod_{i=1}^q \left(\frac{b_i}{\alpha_i(\bar{w})}\right)^{\alpha_i(\bar{w})} \exp\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i(\bar{w}) \sum_{i=1}^{n+1} \mu_{ii} w_i\right) \sum_{i=1}^q \alpha_i \mu_{ii}, i=1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

结合 $\sum_{i=1}^q \alpha_i = 1$, 可得

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \hat{G}(w; w)}{\partial w_i} \right|_w &= \frac{G(w)}{\exp\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i(\bar{w}) \sum_{i=1}^{n+1} \mu_{ii} w_i\right)} \exp\left(\sum_{i=1}^q \alpha_i(\bar{w}) \sum_{i=1}^{n+1} \mu_{ii} w_i\right) \sum_{i=1}^q \frac{b_i}{G(\bar{w})} \mu_{ii} \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_{ii} w_i\right) = \\ & \sum_{i=1}^q b_i \mu_{ii} \exp\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_{ii} w_i\right), i=1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

从而, $\frac{\partial G(w)}{\partial w_i} = \frac{\partial \hat{G}(w; w)}{\partial w_i}, i=1, 2, \dots, n+1$, 即 $\nabla G(w) = \nabla \hat{G}(w; w)$. 利用上述结果, 有下面式子成立:

$$\begin{aligned} f_k^-(w^r) + g_k^+(w^r) &= F_k(w^r; w^r), \nabla(f_k^-(w^r) + g_k^+(w^r)) = \nabla F_k(w^r; w^r), k=1, 2, \dots, p; \\ \varphi_{k-p}^-(w^r) + 1 &= \Phi_{k-p}(w^r; w^r), \nabla(\varphi_{k-p}^-(w^r) + 1) = \nabla \Phi_{k-p}(w^r; w^r), k=p+1, \dots, p+l. \end{aligned}$$

从而, 有 $h_k(w^r) = \tilde{h}_k(w^r; w^r)$ 和 $\nabla h_k(w^r) = \nabla \tilde{h}_k(w^r; w^r)$ 成立.

定理 3 对于算法中产生的每个点 $w^r (r \geq 1)$, 假设 $\tilde{Q}(w)$ 满足 Slater's 约束规范. 如果算法迭代是有限步的, 则算法终止于问题(Q)的 KKT 点; 否则, 如果算法产生无限序列 $\{w^r\}$, 则 $\{w^r\}$ 的任意聚点都是问题(Q)的 KKT 点.

证明 若算法迭代 r 步后停止, 那么, 由于 $\tilde{Q}(w^r)$ 满足 Slater's 约束规范, 则问题 $\tilde{Q}(w^{r-1})$ 的最优解 w^r 是 KKT 点, 即有

$$\begin{aligned} \nabla h_0(w^r) + \sum_{k=1}^{p+l} \lambda_k \nabla(\tilde{h}_k(w^r; w^{r-1}) - 1) &= 0, \\ \lambda_k(\tilde{h}_k(w^r; w^{r-1}) - 1) &= 0, k=1, 2, \dots, p+l, \\ \lambda_k \geq 0, \tilde{h}_k(w^r; w^{r-1}) &\leq 1, k=1, 2, \dots, p+l, \end{aligned}$$

其中, λ_k 是拉格朗日乘子. 由算法第 3 步, 有 $w^{r-1} = w^r$, 从而,

$$\begin{aligned} \nabla h_0(w^r) + \sum_{k=1}^{p+l} \lambda_k \nabla(\tilde{h}_k(w^r; w^r) - 1) &= 0, \\ \lambda_k(\tilde{h}_k(w^r; w^r) - 1) &= 0, k=1, 2, \dots, p+l, \\ \lambda_k \geq 0, \tilde{h}_k(w^r; w^r) &\leq 1, k=1, 2, \dots, p+l. \end{aligned}$$

由引理 1 可以得出:

$$\begin{aligned} \nabla h_0(w^r) + \sum_{k=1}^{p+l} \lambda_k \nabla(h_k(w^r) - 1) &= 0, \\ \lambda_k(h_k(w^r) - 1) &= 0, k=1, 2, \dots, p+l, \\ \lambda_k \geq 0, h_k(w^r) &\leq 1, k=1, 2, \dots, p+l, \end{aligned}$$

这意味着 w^r 是问题(Q)的 KKT 点.

若算法是无限步迭代的, 并假设 w^* 是序列 $\{w^r\}$ 的聚点, 则不失一般性, 假设当 $r \rightarrow \infty$ 时, $\{w^r\} \rightarrow w^*$. 对(15)~(17)式两边取极限, 可得

$$\nabla h_0(w^*) + \sum_{k=1}^{p+l} \lambda_k \nabla(h_k(w^*) - 1) = 0,$$

$$\lambda_k(h_k(w^*) - 1) = 0, k = 1, 2, \dots, p + l,$$

$$\lambda_k \geq 0, h_k(w^*) \leq 1, k = 1, 2, \dots, p + l,$$

即 w^* 是问题(Q)的 KKT 点.

4 数值实验

为验证本文算法,将下面两个例子分别用本文算法与文献[5,9]算法在酷睿双核 CPU(主频 2.5 GHz), 4 GB 内存的微机上用 Matlab 进行数值计算,结果列于表 1 中,从表 1 可以看出本文算法是可行有效的.

例 1

$$\begin{aligned} \min \max & \left\{ \frac{2.1x_1 + 2.2x_2 - x_3 + 0.8}{1.1x_1 - x_2 + 1.2x_3}, \frac{3.1x_1 - x_2 + 1.3x_3}{8.2x_1 + 4.1x_2 - x_3} \right\}, \\ \text{s.t.} & \quad x_1 + x_2 - x_3 \leq 1, \\ & \quad -x_1 + x_2 - x_3 \leq -1, \\ & \quad 12x_1 + 5x_2 + 12x_3 \leq 40, \\ & \quad 12x_1 + 12x_2 + 7x_3 \leq 50, \\ & \quad -6x_1 + x_2 + x_3 \leq -2, \\ & \quad 1.0 \leq x_1 \leq 1.2, 0.55 \leq x_2 \leq 0.65, 1.35 \leq x_3 \leq 1.45. \end{aligned}$$

例 2

$$\begin{aligned} \min \max & \left\{ \frac{5x_1 + 4x_2 - x_3 + 0.9}{3x_1 - x_2 + 2x_3 + 0.5}, \frac{3x_1 - x_2 + 4x_3 + 0.5}{9x_1 + 3x_2 - x_3 + 0.5}, \frac{4x_1 - x_2 + 6x_3 + 0.5}{12x_1 + 7x_2 - x_3 + 0.9}, \right. \\ & \left. \frac{7x_1 - x_2 + 7x_3 + 0.5}{11x_1 + 9x_2 - x_3 + 0.9}, \frac{7x_1 - x_2 + 7x_3 + 0.7}{11x_1 + 7x_2 - x_3 + 0.9} \right\}, \\ \text{s.t.} & \quad 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3, \\ & \quad -2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq -1, \\ & \quad 11x_1 + 7x_2 + 12x_3 \leq 47, \\ & \quad 13x_1 + 13x_2 + 6x_3 \leq 56, \\ & \quad -6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq -1, \\ & \quad 1.0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0.35 \leq x_2 \leq 0.9, \quad 1.0 \leq x_3 \leq 1.55. \end{aligned}$$

从表 1 可以看出,本文得到的最优值优于文献[5,9]的结果,且算法的迭代次数以及运行时间均少于文献[5,9]中的数据.

表 1 数值计算结果

例子	文献	最优解	最优值	迭代次数	运行时间/s
1	[5]	(1.0,0.55,1.45)	1.160 9	6	0.010 4
	[9]	(1.0,0.55,1.45)	1.161 6	18	0.133 2
	本文	(1.0,0.55,1.45)	1.160 3	2	0.010 0
2	[5]	(1.752 8,0.350 0,1.550 0)	1.117 7	26	0.148 7
	[9]	(1.753 8,0.350 0,1.550 0)	1.118 3	10	0.083 5
	本文	(1.752 8,0.350 0,1.550 0)	1.115 9	2	0.062 0

5 结 论

本文考虑一类带有广义多项式约束的 Minimax 分式规划问题,该优化问题包括二次规划、广义几何规划和多乘积规划等几类重要的数学规划问题,能广泛应用于电子电路设计、信号处理、经济金融等众多实际问题中. 该文基于指数变量变换和代数-几何平均不等式,将原问题的等价问题压缩成易于求解的凸规划问

题,通过求解一系列凸规划问题获得原问题的最优解.理论分析和数值实验结果表明本文提出算法是可行和有效的.

参 考 文 献

- [1] Barrodale I. Best rational approximation and strict quasiconvexity[J]. *SIAM J Numer Anal*, 1973, 10(1): 8-12.
- [2] Balasubramaniam P, Lakshmanan S. Delay-interval-dependent robust-stability criteria for neutral stochastic neural networks with polytopic and linear fractional uncertainties[J]. *Int J Comput Math*, 2011, 88(10): 2001-2015.
- [3] Ding Feng. Decomposition based fast least squares algorithm for output error systems[J]. *Signal Process*, 2013, 93: 1235-1242.
- [4] Stancu-Minasian I M. *Fractional Programming: Theory, Methods and Applications*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [5] Jiao H W, Liu S Y. A new linearization technique for minimax linear fractional programming[J]. *J Comput Math*, 2014, 91(8): 1730-1743.
- [6] Feng Q G, Jiao H W, Mao H P, et al. A Deterministic Algorithm for Min-max and Max-min Linear Fractional Programming Problems[J]. *Int J Comput Intell Syst*, 2011, 4: 134-141.
- [7] Barros A I, Frenk J B G. Generalized fractional programming and cutting plane algorithms[J]. *J Optim Theory Appl*, 1995, 87(1): 103-120.
- [8] Phuong NTH, Tuy H. A unified monotonic approach to generalized linear fractional programming[J]. *J Global Optim*, 2003, 26: 229-259.
- [9] Zhao Y F, Liu S Y, Jiao H W. A new branch and bound algorithm for minimax ratios problems[J]. *Open Mathematics*, 2017, 15: 840-851.

An iterative algorithm for a class of Minimax fractional programming problems

Shen Peiping, Chen Xiao

(College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: In this paper, we propose an iterative algorithm for solving a class of Minimax fractional programming problems. By introducing a new variable and utilizing an exponential variable transformation, problem (MFP) is equivalent to problem (Q). Then using condensed method, problem (Q) is converted into a series of convex programming problems (\tilde{Q}). Numerical results show the feasibility and efficiency of the proposed algorithm.

Keywords: Minimax problem; convex programs; iterative algorithm

[责任编辑 陈留院]