文章编号:1000-2367(2020)02-0014-06 DOI:10.16366/j.cnki.1000-2367.2020.02.003

一类非线性双曲型方程整体解的存在性和渐近性

王建平[1],张香伟[2]

(1.河南农业大学 信息与管理科学学院,郑州 450046;2.郑州师范学院 数学与统计学院,郑州 450044)

摘 要:研究了一类带有非线性耗散项的双曲型方程 $u_{tt}-\sum_{i=1}^{n}(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i})+a|u_t|^{q-2}u_t=b|u|^{r-2}u$ 在有界闭区域内的初边值问题,通过在 Sobolev 空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上构造稳定集,证明了这类问题的整体解的存在性,并利用 Komornik 的一个重要引理给出了整体解的渐近性态.

关键词:非线性双曲型方程;初边值问题;整体解存在性;渐近稳定性

中图分类号:O175.2 **文献标志码**:A

本文研究双曲型方程初边值问题整体解的存在性和渐近稳定性,

$$u_{tt}-\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+a|u_t|^{q-2}u_t=b|u|^{r-2}u,x\in\Omega,t>0, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=u_1(x), \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in\partial\Omega,t\geq 0, \tag{3}$$

这里 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界闭域,$a,b>0,q,r>2,\Delta_p=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(p>2)$ 为一散度算子(退化的拉普拉斯算子),称为 p-Laplace 算子.

问题(1)用来描述黏弹性力学中的纵向运动,也可被视为一个服从非线性 Voight 模型的黏弹性结构的控制纵向运动的场领域方程[1-4].

当 $b=0$ 时,对于任意的初始值,众所周知阻尼项可保证整体解的存在性和能量解的衰减[4-6].当 $a=0$ 时,若 $r>p$,则源项可导致带有负初始能量的解在有限时间内爆破[7].$p=q=2$ 时阻尼项和源项之间的交互作用首先被 LEVINE[8-9] 发现,他证明了带有负的初始能量解在有限时间内爆破.GEORGIEV 和 TODOROVA[10] 将 LEVINE 的结果扩展到了当 $q>2$ 时带有非线性阻尼项的方程.在他们的工作中,作者研究了问题(1)~(3)在 $p=2$ 时的情况,通过确定 q 和 r 的适当关系,应用凸性原理证明了解的整体存在性和在有限时间内的爆破性,精确地说,他们证明了当 $q\geq r$ 时,带有负能量的解关于时间 t 的整体存在性,当 $q<r$ 时解在有限时间内发生爆破.文献[11]将这些结果推广到阻尼项是非线性且初始能量解为正的情况.对于(1)式的 Cauchy 问题,文献[12]也给出了类似的结果.

杨志坚在文献[13-16]中研究了问题(1)~(3),并获得了关于非线性项和初值在增长条件的假设下整体解的存在性.对于整体解的不存在性,杨志坚获得了问题(1)~(3)在满足初始能量 $E(0)<\min\{-((rk_1+pk_2)/(r-p))^{\frac{1}{\delta}},-1\}(r>p,k_1,k_2$ 和 δ 是正常数)条件下的解的爆破性质[17].

因为 p-Laplace 算子 Δ_p 是非线性算子,证明和计算的推理过程不同于 Laplace 算子 $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.借助 Galerkin 方法和紧致性原理以及 Nakao 引入的一个差分不等式[18],叶耀军证明了 $p\geq r$ 时,带有非齐次项

收稿日期:2018-07-10;**修回日期**:2019-04-07.

基金项目:国家自然科学基金青年基金(11501175);国家自然科学基金联合基金(U1204104).

作者简介(通信作者):王建平(1972-),男,河南临颍人,河南农业大学副教授,主要从事微分方程研究,E-mail:Xwjpw007@126.com.

$f(x,t)$的问题(1)～(3)整体解的存在和衰减估计[19-20].

将应用 Sattinger 提出的位势井理论研究问题(1)～(3)的整体解的存在性，并借助 Komornik 的引理证明整体解的渐近性质.为方便起见，采用通用的符号和约定：$W^{k,p}(\Omega)$ 表示范数为 $\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \| D^\alpha u \|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}$ 的 Sobolev 空间，记 $W^{k,p}_0(\Omega)$ 是 $C^\infty_0(\Omega)$ 中 $W^{k,p}(\Omega)$ 上的闭包.为简单起见，以后用 $\| \cdot \|_p$ 表示 Lebesgue 空间 $L^p(\Omega)$ 的范数，记 $\| \cdot \|$ 为 $L^2(\Omega)$ 的范数，并用范数 $\| \nabla \cdot \|_p$ 等价代替 $W^{k,p}_0(\Omega)$ 的范数 $\| \cdot \|_{W^{1,p}(\Omega)}$，此外 $M > 0$ 表示依赖于已知常数的常数，在不同的地方可以不相同.

1　主要结果

为了陈述和证明主要结果，首先定义如下泛函：

$$K(u) = \| \nabla u \|^p_p - b \| u \|^r_r, J(u) = \frac{1}{p} \| \nabla u \|^p_p - \frac{b}{r} \| u \|^r_r, u \in W^{1,p}_0(\Omega). \tag{4}$$

定义稳定集 H 如下

$$H = \{ u \in W^{1,p}_0(\Omega), K(u) > 0 \} \cup \{0\}. \tag{5}$$

用(6)式表示与(1)～(3)式有关联的总能量

$$E(t) = \frac{1}{2} \| u_t \|^2 + \frac{1}{p} \| \nabla u \|^p_p - \frac{b}{r} \| u \|^r_r = \frac{1}{2} \| u_t \|^2 + J(u), u \in W^{1,p}_0(\Omega). \tag{6}$$

$E(0) = \frac{1}{2} \| u_1 \|^2 + J(u_0)$ 是初始值的总能量.

为了研究主要结果，需要下面的两个引理.

引理 1　设 $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$，若(1) $2 \le n \le p$ 时 $2 \le r < +\infty$，(2) $2 < p < n$ 时 $2 \le r \le \frac{np}{n-p}$，则 $u \in L^r(\Omega)$ 且 $\| u \|_r \le C \| u \|_{W^{1,p}_0(\Omega)}$，常数 C 是一个依赖于 Ω，p 和 r 的正常数.

引理 2[21]　设 $y(t): \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 是一个单调非增函数，假设有两个常数 $\beta \ge 1, A > 0$，使得

$$\int_s^{+\infty} y(t)^{\frac{\beta+1}{2}} \mathrm{d}t \le A y(s), 0 \le s < +\infty, \tag{7}$$

若 $\beta > 1$，则对于任意 $t \ge 0$，有

$$y(t) \le C y(0) (1+t)^{-\frac{2}{\beta-1}};$$

若 $\beta = 1$，则对于任意 $t \ge 0$，有

$$y(t) \le C y(0) \mathrm{e}^{-\omega t},$$

其中 C 和 ω 是不依赖 $y(0)$ 于的正常数.

引理 3　设 $u(t,x)$ 是问题(1) ～ (3) 的解，则对于任意 $t > 0$，$E(t)$ 是一个单调非增函数，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(t) = -a \| u_t(t) \|^q_q. \tag{8}$$

证明　在(1)式两端同乘以 u_t，并在 Ω 上积分，可得：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(u(t)) = -a \| u_t(t) \|^q_q \le 0, \tag{9}$$

因此 $E(t)$是一个关于 t 的单调非增函数.

为了应用方便，下面给出众所周知的局部存在性结果[13-15].

引理 4　设 $u_0 \in W^{1,p}_0(\Omega)$，$u_1 \in L^2(\Omega)$，如果 $2 < p < r < \frac{np}{n-p}$，$n > p$ 和 $2 < p < r < +\infty$，$n \le p$，则存在 $T > 0$，使得问题(1) ～ (3) 具有唯一局部解 $u(t)$ 满足

$$u \in L^\infty([0,T); W^{1,p}_0(\Omega)), u_t \in L^\infty([0,T); L^2(\Omega)) \cap L^q([0,T); L^q(\Omega)). \tag{10}$$

引理 5　在引理 4 的假设条件下，则对于 $u \in H$，有

$$\frac{r-p}{rp}\|\nabla u\|_p^p \le J(u). \tag{11}$$

证明 由 $K(u)$和 $J(u)$的定义,可得下列等式

$$rJ(u)=K(u)+\frac{r-p}{p}\|\nabla u\|_p^p. \tag{12}$$

因 $u\in H$,故有 $K(u)\ge 0$. 因此由(12)式可得:

$$\frac{r-p}{rp}\|\nabla u\|_p^p \le J(u). \tag{13}$$

引理 6 假设 $2<p<r<\frac{np}{n-p}, n>p$ 及 $2<p<r<+\infty, n\le p$.若 $u_0\in H, u_1\in L^2(\Omega)$ 使得

$$\theta=bC^r\left(\frac{rp}{r-p}E(0)\right)^{\frac{r-p}{p}}<1, \tag{14}$$

则对于任意的 $t\in[0,T)$, 有

$$u(t)\in H.$$

证明 因 $u_0\in H$,故有 $K(u_0)>0$.则存在 $t_m\le T$,使得对于任意的 $t\in[0,t_m)$ 有

$$K(u(t))\ge 0,$$

从而由(6)式和(11)式可得:

$$\frac{r-p}{rp}\|\nabla u\|_p^p \le J(u)\le E(t), \tag{15}$$

由引理 3 知

$$\|\nabla u\|_p^p \le \frac{rp}{r-p}E(0). \tag{16}$$

由引理 1 和(14)式以及(16)式得:

$$b\|u\|_r^r\le bC^r\|\nabla u\|_p^r=bC^r\|\nabla u\|_p^{r-p}\|\nabla u\|_p^p\le bC^r\left(\frac{rp}{r-p}E(0)\right)^{\frac{r-p}{p}}\|\nabla u\|_p^p=$$
$$\theta\|\nabla u\|_p^p<\|\nabla U\|_p^p, \forall t\in[0,t_m). \tag{17}$$

因此

$$\|\nabla u\|_p^p-b\|u\|_r^r>0, \forall t\in[0,t_m), \tag{18}$$

这就意味着对于任意的 $t\in[0,t_m)$, $u(t)\in H$. 注意到

$$bC^r\left(\frac{rp}{r-p}E(t_m)\right)^{\frac{r-p}{p}}<bC^r\left(\frac{rp}{r-p}E(0)\right)^{\frac{r-p}{p}}<1, \tag{19}$$

重复步骤(15)~(17)式,则可将 t_m 延拓到 $2t_m$.继续上述过程即可得到引理 6 的结论.

定理 1 假设 $2<p<r<\frac{np}{n-p}, n>p$ 和 $2<p<r<+\infty, n\le p$, $u(t)$ 是问题(1)~(3)在$[0,T)$上的局部解.若 $u_0\in H, u_1\in L^2(\Omega)$ 满足(14)式,则 $u(t)$ 是问题(1)~(3)的整体解.

证明 只要证明 $\|u_t\|^2+\|\nabla u\|_p^p$ 不依赖于 t 是有界的即可.

在定理 1 的假设条件下,从引理 6 可得对于任意的 $t\in[0,T)$ 有 $u(t)\in H$. 因此(11)式成立.故由(11)式和引理 3 可得:

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{r-p}{rp}\|\nabla u\|_p^p\le\frac{1}{2}\|u_t\|^2+J(u)=E(t)\le E(0). \tag{20}$$

因此

$$\|u_t\|^2+\|\nabla u\|_p^p\le\max(2,\frac{rp}{r-p})E(0)<+\infty. \tag{21}$$

由上述不等式和连续性定理可得整体解的存在性,也就是说 $T=+\infty$,即 $u(t)$是问题(1)~(3)的整体解.

下面的定理给出了问题(1)~(3)整体解的渐近性质.

定理 2　若定理 1 的假设成立，且 $2<q<\dfrac{np}{n-p}$，$n>p$ 和 $2<q<+\infty$，$n\leq p$，则问题(1)～(3)的整体解具有下列渐近性质：

$$\lim_{t\to+\infty}\|u_t(t)\|=0,\lim_{t\to+\infty}\|\nabla u(t)\|_p=0. \tag{22}$$

证明　在(1)式两边同乘以 $E(t)^{\frac{q-2}{2}}u$，并在 $\Omega\times[S,T]$ 上积分，可得

$$0=\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{q-2}{2}}u[u_{tt}+\Delta_p u+a\mid u_t\mid^{q-2}u_t-bu\mid u\mid^{r-2}]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t, \tag{23}$$

这里 $0\leq S<T<+\infty$.

由于

$$\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{q-2}{2}}uu_{tt}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_\Omega E(t)^{\frac{q-2}{2}}uu_t\mathrm{d}x\mid_S^T-\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{q-2}{2}}\mid u_t\mid^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-$$
$$\frac{q-2}{2}\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{q-4}{2}}E'(t)uu_t\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{24}$$

将(24)式代入(23)式的右边，可得

$$0=\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{q-2}{2}}(\mid u_t\mid^2+\frac{2}{p}\|\nabla u\|_p^p-\frac{2b}{r}\mid u\mid^r)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{q-2}{2}}[2\mid u_t\mid^2-a\mid u_t\mid^{q-2}u_tu]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-$$
$$\frac{q-2}{2}\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{q-4}{2}}E'(t)uu_t\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+\int_\Omega E(t)^{\frac{q-2}{2}}uu_t\mathrm{d}x\mid_S^T+$$
$$b(\frac{2}{r}-1)\int_S^T E(t)^{\frac{q-2}{2}}\|u\|_r^r\mathrm{d}t+\frac{p-2}{p}\int_S^T E(t)^{\frac{q-2}{2}}\|\nabla u\|_p^p\mathrm{d}t. \tag{25}$$

由(15)、(17)式可得

$$b(1-\frac{2}{r})\int_S^T E(t)^{\frac{q-2}{2}}\|u\|_r^r\mathrm{d}t\leq\theta\frac{r-2}{r}\int_S^T E(t)^{\frac{q-2}{2}}\|\nabla u\|_p^p\mathrm{d}t\leq\frac{p(r-2)}{r-p}\theta\int_S^T E(t)^{\frac{q}{2}}\mathrm{d}t, \tag{26}$$

$$\frac{p-2}{2}\int_S^T E(t)^{\frac{q-2}{2}}\|\nabla u\|_p^p\mathrm{d}t\leq\frac{r(p-2)}{r-p}\int_S^T E(t)^{\frac{q}{2}}\mathrm{d}t. \tag{27}$$

联合(25)、(26)和(27)式有

$$\frac{4r-p[(r-2)\theta+r+2]}{r-p}\int_S^T E(t)^{\frac{q}{2}}\mathrm{d}t\leq\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{q-2}{2}}[2\mid u_t\mid^2-a\mid u_t\mid^{q-2}u_tu]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+$$
$$\frac{q-2}{2}\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{q-4}{2}}E'(t)u_tu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-\int_\Omega E(t)^{\frac{q-2}{2}}u_tu\,\mathrm{d}x\mid_S^T. \tag{28}$$

由 Hölder 不等式，引理 1 和(20)式可得

$$\left|\frac{q-2}{2}\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{q-4}{2}}E'(t)u_tu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\right|\leq\frac{q-2}{2}\int_S^T E(t)^{\frac{q-4}{2}}\mid E'(t)\mid(\frac{C^p rp}{r-p}\cdot\frac{r-p}{rp}\|\nabla u\|_p^p+\frac{1}{2}\|u_t\|^2)\mathrm{d}t\leq$$
$$-\frac{q-2}{2}\max\left\{\frac{C^p rp}{r-p},1\right\}\int_S^T E(t)^{\frac{q-2}{2}}E('t)\mathrm{d}t=-\frac{q-2}{2}\max\left\{\frac{C^p rp}{r-p},1\right\}E(t)^{\frac{q}{2}}\mid_S^T\leq ME(S)^{\frac{q}{2}}, \tag{29}$$

类似可得

$$\left|-\int_\Omega E(t)^{\frac{q-2}{2}}u_tu\,\mathrm{d}x\mid_S^T\right|\leq\max\left\{\frac{C^p rp}{r-p},1\right\}E(t)^{\frac{q}{2}}\mid_S^T\leq ME(S)^{\frac{q}{2}}. \tag{30}$$

将(29)、(30)式代入(28)式，可得出如下结论

$$\frac{4r-p[(r-2)\theta+r+2]}{r-p}\int_S^T E(t)^{\frac{q}{2}}\mathrm{d}t\leq\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{q-2}{2}}[2\mid u_t\mid^2-a\mid u_t\mid^{q-2}u_tu]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t+ME(S)^{\frac{q}{2}}. \tag{31}$$

由 $0<\theta<1$ 知，$\dfrac{4r-p[(r-2)\theta+r+2]}{r-p}>0$.

利用 Young 不等式[22]和引理 3 可得

$$2\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{q-2}{2}}\mid u_t\mid^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leq\int_S^T\int_\Omega(\varepsilon_1E(t)^{\frac{q}{2}}+M(\varepsilon_1)\mid u_t\mid^q)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leq\varepsilon_1\int_S^T E(t)^{\frac{q}{2}}\mathrm{d}t+$$

$$M(\varepsilon_1)\int_S^T \|u_t\|_q^q \mathrm{d}t=\varepsilon_1\int_S^T E(t)^{\frac{q}{2}}\mathrm{d}t-\frac{M(\varepsilon_1)}{a}(E(T)-E(S))\leq \varepsilon_1\int_S^T E(t)^{\frac{q}{2}}\mathrm{d}t+ME(S). \tag{32}$$

由 Young 不等式和引理 1 和引理 3 以及(20)式可得

$$\begin{aligned}-a\int_S^T\int_\Omega E(t)^{\frac{q-2}{2}}uu_t\,|u_t|^{q-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq a\int_S^T E(t)^{\frac{q-2}{2}}(\varepsilon_2\|u\|_q^q+M(\varepsilon_2)\|u_t\|_q^q)\mathrm{d}t\leq\\ aC^q\varepsilon_2E(0)^{\frac{q-2}{2}}\int_S^T\|\nabla u\|_q^q\mathrm{d}t+aM(\varepsilon_2)E(S)^{\frac{q-2}{2}}\int_S^T\|u_t\|_q^q\mathrm{d}t\leq\\ aC^q\varepsilon_2E(0)^{\frac{q-2}{2}}\left(\frac{rp}{r-p}\right)^{\frac{q}{p}}\int_S^T E(t)^{\frac{q}{2}}\mathrm{d}t+M(\varepsilon_2)E(S)^{\frac{q}{2}}.\end{aligned} \tag{33}$$

选择足够小的 ε_1 和 ε_2,使得

$$M(\varepsilon_1)+aC^qE(0)^{\frac{q-2}{2}}\left(\frac{rp}{r-p}\right)^{\frac{q}{p}}\varepsilon_2<\frac{4r-p[(r-2)\theta+r+2]}{r-p}, \tag{34}$$

将(32)、(33)式代入(31)式,可得

$$\int_S^T E(t)^{\frac{q}{2}}\mathrm{d}t\leq ME(S)+ME(S)^{\frac{q}{2}}\leq M(1+E(0))^{\frac{q-2}{2}}E(S). \tag{35}$$

因此由引理 2 可得

$$E(t)\leq ME(0)(1+t)^{-\frac{q-2}{2}},t\in[0,+\infty), \tag{36}$$

这里 $ME(0)$是一个依赖于 $E(0)$的正常数.

故可从(20)、(36)式得到

$$\lim_{t\to+\infty}\|u_t(t)\|=0,\lim_{t\to+\infty}\|\nabla u(t)\|_p=0.$$

即问题(1)～(3)的解具有渐近性质.

2 结　论

本文研究了一类具有非线性源项和耗散项的双曲型方程(1)在有界闭区域内的初边值问题.通过在空间 $W_0^{1,p}(\Omega)$中定义稳定集,应用位势井理论及连续有界性原理证明了这类问题(1)～(3)整体解的存在性,并利用 Komornik 积分不等式及能量估计的方法建立了问题(1)～(3)整体解的长时间行为.

参　考　文　献

[1] ANDREWS G.On the existence of solutions to the equation[J].Journal of Differential Equations,1980,35(2):200-231.

[2] ANDREWS G,BALL J M.Asymptotic behavior and changes of phase in one-dimensional nonlinear viscoelasticity[J].Journal of Differential Equations,1982,44(2):306-341.

[3] ANG D D,DIBH P N.Strong solutions of quasi-linear wave equation with non-linear damping[J].SIAM Journal on Mathematical Analysis,1985,19:337-347.

[4] KAWASHIMA S,SHIBATA Y.Global existence and exponential stability of small solutions to nonlinear viscoelasticity[J].Communications in Mathematical Physics,1992,148(1):189-208.

[5] HARAUX A,ZUAZUA E.Decay estimates for some semi-linear damped hyperbolic problems[J].Archive for Rational Mechanics and Analysis,1988,100(2):191-206.

[6] KOPACKOVA M.Remarks on bounded solutions of a semi-linear dissipative hyperbolic equation[J].Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae,1989,30(4):713-719.

[7] BALL J M.Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations[J].The Quarterly Journal of Mathematics,1977,28(112):473-486.

[8] LEVINE H A.Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form[J].Transactions of the American Mathematical Society,1974,192:1-21.

[9] LEVINE H A.Some additional remarks on the nonexistence of global solution with nonlinear wave equations[J].SIAM Journal on Mathematical Analysis,1974,5:138-146.

[10] GEORGIEV V,TODOROVA G.Existence of solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms[J].Journal of Differential Equations,1994,109(2):295-308.

[11] VITILLARO E.Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation[J].Archive for Rational Mechanics and Analysis,1999,149(2):155-182.

[12] TODOROVA G.Stable and unstable sets for the Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms [J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,1999,239(2):213-226.

[13] YANG Z J.Existence and asymptotic behavior of solutions for a class of quasi-linear evolution equations with non-linear damping and source terms[J].Mathematical Methods in the Applied Science,2002,25(10):795-814.

[14] YANG Z J,CHEN G W.Global Existence of solutions for quasi-linear wave equations with viscous damping[J].Journal of Mathematical analysis and Applications,2003,285(2):604-618.

[15] YANG Z J.Initial boundary value problem for a class of non-linear strongly damped wave equations[J].Mathematical Methods in the Applied Science,2003,26(12):1047-1066.

[16] YANG Z J.Blow up of solutions for a class of non-linear evolution equations with non-linear damping and source terms[J].Mathematical Methods in the Applied Sciences,2002,25(10):825-833.

[17] LIU Y C,ZHAO J S.Multidimensional viscoelasticity equations with non-linear damping and source terms[J].Nonlinear Analysis:Theory,Methods and Applications,2004,56(6):851-865.

[18] NAKAO M.A difference inequality and its application to non-linear evolution equations[J].Journal of the Mathematical Society of Japan,1978,30(4):747-762.

[19] YE Y J.Existence of global solutions for some non-linear hyperbolic equation with a non-linear dissipative term[J].Journal of Zhengzhou University.Natural Science Edition,1997,29(3):18-23.

[20] YE Y J.On the decay of solutions for some non-linear dissipative hyperbolic equation[J].Acta Mathematicae Applicatae sinica.English series,2004,20(1):93-100.

[21] KOMOMIK V.Exact Controllability and Stabilization.The Multiplier Method[M].Paris:Masson,1994:78-79.

[22] 王建平,张香伟.一类带有阻尼项的高阶非线性波动方程的整体解[J].河南师范大学学报(自然科学版),2015,43(1):25-28.
WANG J P,ZHANG X W.Existence and asymptotic property of global solutions for some nonlinear wave equation with nonlinear damping term[J].Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition),2015,43(1):25-28.

Global existence and asymptotic behavior of solution for some nonlinear hyperbolic equation

Wang Jianping[1],Zhang Xiangwei[2]

(1.Department.of Information & Management Science,Henan Agricultural University,Zhengzhou 450046,China;
2.School of Mathematics and Statistics,Zhengzhou Normal University,Zhengzhou 450044,China)

Abstract:The initial boundary value problem for a class of hyperbolic equation with nonlinear dissipative term,namely, $u_{tt}-\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+a\,|u_t|^{q-2}u_t=b\,|u|^{r-2}u$ in a bounded domain is studied.The existence of global solution to this problem is proved by constructing a stable set in $W_0^{1,p}(\Omega)$, and the asymptotic behavior of this global solution is established through an important lemma of Komornik.

Keywords:nonlinear hyperbolic equation;initial boundary value problem;global existence;asymptotic stability

[责任编校　陈留院　赵晓华]