第 44 卷 第 1 期
2016 年 1 月

河南师范大学学报(自然科学版)
Journal of Henan Normal University(Natural Science Edition)

Vol.44 No.1
Jan. 2016

文章编号:1000－2367(2016)01－0008－07 **DOI**:10.16366/j.cnki.1000－2367.2016.01.002

初值间断的 Navier-Stokes 方程柯西问题弱解的存在性

王军礼[1,2],毕佳成[3],连汝续[4],马 悦[4]

(1.北京大学 光华管理学院,北京 100871;2.首都师范大学 数学科学学院,北京 100048;3.西安电子科技大学 计算机学院,西安 710071;4.华北水利水电大学 数学与信息科学学院,郑州 450045)

摘 要:主要研究了初值间断的一维可压缩 Navier-Stokes 方程的柯西问题. 当初始密度间断任意大时,证明了黏性系数依赖密度的一维可压缩 Navier-Stokes 方程柯西问题整体弱解的存在性、分段正则性. 并证明了密度的跳跃间断以指数速率衰减到零,同时弱解也趋于平衡态等.

关键词:Navier-Stokes 方程;柯西问题;初值间断;弱解

中图分类号:O29 **文献标志码**:A

Navier-Stokes 方程是重要的流体动力学模型,反映了黏性流体流动的基本力学规律,在流体力学中具有十分重要的意义. 本文研究了黏性系数依赖密度的一维可压缩 Navier-Stokes 方程,其具体形式如下

$$\begin{cases}\rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x + p_x - (\mu(\rho) u_x)_x = 0,\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\rho \geq 0$ 和 u 分别表示流体的密度和速度. $p(\rho) = \rho^\gamma (\gamma > 1)$ 是压力函数,$\mu(\rho) = \rho^\alpha (\alpha > 0)$ 是黏性系数. 特别地,当 $\gamma = 2$ 且 $\alpha = 1$ 时,(1) 就是流体动力学中的经典模型 ——Saint-Venant 模型.

有关初值间断的可压缩 Navier-Stokes 方程整体弱解的适定性研究已经有了许多重要进展,例如,当黏性系数是常数时,Hoff 在文献[1－3] 中证明了一维 Navier-Stokes 方程的间断解的整体存在性. 对于初值间断的等温流体,Hoff 在文献[4] 中构造出了可压缩 Navier-Stokes 方程的球对称弱解,并证明了整体弱解的存在性. 在文献[5－6] 中,Hoff 还研究了高维等温可压流整体弱解的存在性. 对于初值间断情形,文献[7] 证明了一维可压缩热传导流的整体弱解的存在性. 当初值在超曲面上间断时,Hoff 在文献[8] 中研究了二维和三维可压缩热传导流体的整体弱解的存在性. Hoff 还在文献[9] 中得到了二维正压 Navier-Stokes 方程的整体弱解的存在性.

当黏性系数依赖密度,即 $\mu(\rho) = \rho^\alpha$ 且 $0 < \alpha < 1$ 时,对于初始密度间断任意大的初值,文献[10] 研究了一维可压缩 Navier-Stokes 方程自由边界问题的整体弱解的存在性,并得到了整体弱解的分段正则性. 当初值满足一定条件时,文献[11] 证明了自由边界问题整体强解的存在唯一性. 而当 $0 < \alpha \leq 1$ 时,对于初始密度间断有界的初值,文献[12] 证明了一维可压缩 Navier-Stokes 方程固定边界问题整体弱解的存在性,分段正则性以及弱解的大时间行为等. 当 $0 < \alpha \leq 1$ 时,对于初始密度间断有界的初值,文献[13] 研究了一维可压缩 Navier-Stokes 方程的柯西问题,并得到了整体弱解的存在性,分段正则性以及弱解的大时间行为等.

本文的主要目的是研究初值间断的黏性系数依赖密度的一维可压缩 Navier-Stokes 方程(1) 的柯西问题整体弱解的存在性. 当 $0 < \alpha \leq 1$,且初始密度间断任意大时,证明了整体弱解的存在性,分段正则性以及弱解的大时间行为等.

收稿日期:2015-01-04;**修回日期**:2015-11-13.

基金项目:河南省自然科学基金(14B110037)

第 1 作者简介(通信作者):王军礼(1979－),男,河南驻马店人,北京大学光华管理学院讲师,博士,研究方向为偏微分方程应用、复杂网络,E-mail: wang math@gmail.com.

1　主要结果

本文研究方程(1) 具有如下初边值条件的柯西问题

$$\begin{cases}\rho_t+(\rho u)_x=0,\\ (\rho u)_t+(\rho u^2)_x+(\rho^\gamma)_x-(\rho^\alpha u_x)_x=0,\\ (\rho,\ u)(x,0)=(\rho_0,u_0)(x),x\in R,\\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\rho,u)=(\bar\rho,0),t>0,\end{cases}\tag{2}$$

其中 $\bar\rho$ 是一个正常数.

下面，给出柯西问题(2) 整体弱解的定义.

定义 1　对于任意时间 $T>0$，如果(ρ,u) 满足如下正则性

$$\begin{cases}\rho-\bar\rho\in L^\infty(0,T;L^1(R)\cap L^2(R)),\sqrt{\rho}u\in L^\infty(0,T;L^2(R)),\\ (\rho^\gamma-\rho^\alpha u_x)\in L^2(0,T;H^1(R)),\end{cases}\tag{3}$$

并且方程(2) 中第 1、2 式在分布意义下成立，即对任意的 $\varphi\in C_0^\infty(R\times[0,T))$，(4) 式成立

$$\int_R(\rho_0-\bar\rho)\varphi(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_R(\rho-\bar\rho)\varphi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_R\sqrt{\rho}\sqrt{\rho}u\varphi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,\tag{4}$$

对任意的 $\psi\in C_0^\infty(R\times[0,T))$，(5) 式成立

$$\int_R\rho_0u_0\psi(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^T\int_R(\sqrt{\rho}\sqrt{\rho}u\psi_t+(\sqrt{\rho}u)^2\psi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_R(\rho^\gamma-\rho^\alpha u_x)\psi_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0,\tag{5}$$

则称(ρ,u) 是柯西问题(2) 的一个整体弱解.

对于柯西问题(2)，不妨假设初始密度的间断点即为零点，且初值满足如下条件

$$\begin{cases}\rho_0(0-0)>\rho_0(0+0),\quad \inf\limits_{R/\{0\}}\rho_0\geq\rho_->0,\\ \rho_0-\bar\rho\in H^1(R/\{0\}),\quad u_0\in H^2(R/\{0\}),\end{cases}\tag{6}$$

(6) 式中的 ρ_- 是一个正常数. 同时定义如下函数

$$E_0:=\frac{1}{2}\int_R\rho_0\ u_0{}^2\mathrm{d}x+\int_R\rho_0(\frac{1}{\gamma-1}(\rho_0^{\gamma-1}-\bar\rho^{\gamma-1})+\bar\rho^\gamma(\rho_0^{-1}-\bar\rho^{-1}))\mathrm{d}x,\tag{7}$$

以及

$$E_1:=\frac{1}{2}\int_R\rho_0(u_0+\frac{1}{\alpha}\rho_0^{-1}(\rho_0^\alpha)_x)^2\mathrm{d}x+\int_R\rho_0(\frac{1}{\gamma-1}(\rho_0^{\gamma-1}-\bar\rho^{\gamma-1})+\bar\rho^\gamma(\rho_0^{-1}-\bar\rho^{-1}))\mathrm{d}x,\tag{8}$$

在上式中$\int_R:=\int_{-\infty}^0+\int_0^{+\infty}$.

然后给出弱解的整体存在性结论以及大时间行为.

定理 1　假设 $\gamma\geq1+\alpha$，当 $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$，并且初值满足(6) 时，或者当 $\alpha>\frac{1}{2}$，并且初值满足(6)，以及

$$E_0^{\frac{1}{2}}(E_0+E_1)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{\upsilon}{2(2\alpha-1)}\bar\rho^{-\frac{\gamma+2\alpha-1}{2}},\tag{9}$$

(9) 式中的 υ 是一个正常数，则柯西问题(2) 存在唯一的整体弱解，并且存在一条满足如下定义的间断线 $x=y(t)$

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=u(y(t),t),y(0)=0,t>0,\tag{10}$$

沿着间断线 $x=y(t)$，弱解(ρ,u) 满足如下间断跳跃条件

$$[u(y(t),t)]=0,[\rho^\gamma(y(t),t)]=[\rho^\alpha u_x(y(t),t)],\tag{11}$$

在(11) 式中$[f(y(t),t)]:=f(y(t)+0,t)-f(y(t)-0,t)$. 并且对任意的时间 $T>0$，弱解(ρ,u) 满足如下的分段正则性

$$\begin{cases}\rho-\bar\rho\in L^\infty([0,T];H^1(R/\{0\})),\\ u\in L^\infty([0,T];H^1(R/\{0\}))\cap L^2([0,T];H^2(R/\{0\})),\\ \rho^\gamma-\rho^\alpha u_x\in L^\infty([0,T];H^1(R/\{0\})).\end{cases}\tag{12}$$

此外,沿着间断线,可以得到密度的跳跃间断以指数速率衰减到零

$$|[\rho_0^\alpha(0)]|\mathrm{e}^{-C_0 t}\le|[\rho^\alpha(y(t),t)]|\le|[\rho_0^\alpha(0)]|e^{-C_1 t},\tag{13}$$

在(13)式中的 C_0,C_1 都是不依赖于时间的正常数,并且可以证明当时间趋于无穷时,整体弱解也衰减到零,

$$\|(\rho-\bar{\rho},u)(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(R/\{0\})}\to 0.\tag{14}$$

注 1 定理 1 对于黏性 Saint-Venant 模型也是成立的,即 $\gamma=2,\alpha=1$ 时的情形.

2 先验估计

根据文献[14]中对间断线的分析,可以得到一条满足如下定义的间断线 $x=y(t)$

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=u(y(t),t),y(0)=0,t>0,\tag{15}$$

并且沿着间断线 $x=y(t)$,弱解 (ρ,u) 满足间断跳跃条件

$$[u(y(t),t)]=0,[\rho^\gamma(y(t),t)]=[\rho_x^\alpha(y(t),t)].\tag{16}$$

为了证明先验估计,利用 Lagrange 变换

$$\xi=\int_{y(t)}^x\rho(y,t)\mathrm{d}y,\tau=t,\tag{17}$$

则间断线 $x=y(t)$ 变换为直线 $\xi=0$,并且间断跳跃条件变换为

$$[u(0,\tau)]=0,[\rho^\gamma(0,\tau)]=[\rho^{1+\alpha}u_\xi(0,\tau)].\tag{18}$$

则柯西问题(2)变换为

$$\begin{cases}\rho_\tau+\rho^2u_\xi=0,\\ u_\tau+(\rho^\gamma)_\xi=(\rho^{1+\alpha}u_\xi)_\xi,\\ (\rho,u)|_\tau=0=(\rho_0,u_0)(\xi),\xi\in R/\{0\},\\ \lim\limits_{\xi\to\pm\infty}(\rho,u)=(\bar{\rho},0),\tau>0,\end{cases}\tag{19}$$

并且初值满足

$$\begin{cases}\rho_0(0-0)>\rho_0(0+0),\inf\limits_{R/\{0\}}\rho_0\ge\rho_->0,\\ \rho_0-\bar{\rho}\in H^1(R/\{0\}),u_0\in H^2(R/\{0\}).\end{cases}\tag{20}$$

下面,将给出固定边界问题(19)的一些先验估计.

引理 1 假设定理 1 的条件成立,则有

$$\rho(0-0,\tau)>\rho(0+0,\tau),\tau\in[0,+\infty).\tag{21}$$

证明 由(18)式和(19)中第 1 式可得下式成立

$$[\rho^\alpha]_\tau+[\rho^\gamma]=0,\tag{22}$$

进而可得

$$[\rho^\alpha]=[\rho_0^\alpha]\exp(-\int_0^\tau\frac{[\rho^\gamma]}{[\rho^\alpha]}\mathrm{d}s)<0.\tag{23}$$

引理 2 假设定理 1 的条件成立,则柯西问题(19)的弱解满足

$$\int_R(\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{\gamma-1}(\rho^{\gamma-1}-\bar{\rho}^{\gamma-1})+\bar{\rho}^\gamma(\rho^{-1}-\bar{\rho}^{-1})\mathrm{d}\xi+\int_0^\tau\int_R\rho^{1+\alpha}u_\xi^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s=$$

$$\int_R(\frac{1}{2}u_0^2+\frac{1}{\gamma-1}(\rho_0^{\gamma-1}-\bar{\rho}^{\gamma-1})+\bar{\rho}^\gamma(\rho_0^{-1}-\bar{\rho}^{-1}))\mathrm{d}\xi=E_0,\tau\in[0,+\infty).\tag{24}$$

证明 在(19)中第 2 式两端乘 u,再关于 ξ 在 R 上积分并利用(16),可以得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_R(\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{\gamma-1}(\rho^{\gamma-1}-\bar{\rho}^{\gamma-1})+\bar{\rho}^\gamma(\rho^{-1}-\bar{\rho}^{-1}))\mathrm{d}\xi+\int_R\rho^{1+\alpha}u_\xi^2\mathrm{d}\xi=0,$$

再对上式关于 τ 积分可得引理 3.

引理 3 假设定理 1 的条件成立,则柯西问题(19)的弱解满足

$$\frac{1}{2}\int_R(u+(\rho^\alpha)_\xi/\alpha)^2\mathrm{d}\xi+\int_R(\frac{1}{\gamma-1}(\rho^{\gamma-1}-\bar{\rho}^{\gamma-1})+\bar{\rho}^\gamma(\rho^{-1}-\bar{\rho}^{-1}))\mathrm{d}\xi+\gamma\int_0^\tau\int_R\rho^{\gamma+\alpha-2}\rho_\xi^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+$$

$$(-[\rho^\gamma])y(\tau)+\gamma\int_0^\tau(-\frac{[\rho^{\gamma+1}][\rho^\gamma]}{[\rho^{1+\alpha}]})y(s)\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_R(u_0+(\rho_0{}^\alpha)_\xi/\alpha)^2\mathrm{d}\xi+$$

$$\int_R(\frac{1}{\gamma-1}(\rho_0^{\gamma-1}-\bar{\rho}^{\gamma-1})+\bar{\rho}^\gamma(\rho_0^{-1}-\bar{\rho}^{-1}))\mathrm{d}\xi=E_1,\tau\in[0,+\infty).\tag{25}$$

证明　在方程(19) 中第 1 式的两端同乘 $\rho^{\alpha-1}$ 则可得到

$$(\rho^\alpha)_\tau/\alpha+\rho^{1+\alpha}u_\xi=0,\tag{26}$$

再对(26) 式关于 ξ 求导可得

$$(\rho^\alpha)_{\tau\xi}/\alpha+(\rho^{1+\alpha}u_\xi)_\xi=0.\tag{27}$$

将(27) 式和(19) 中第 2 式相加可得

$$(u+(\rho^\alpha)_\xi/\alpha)_\tau+(\rho^\gamma)_\xi=0.\tag{28}$$

在方程(28) 两端同时乘以$(u+(\rho^\alpha)_\xi/\alpha)$，并在 $R\times[0,\tau]$ 上积分可得

$$\frac{1}{2}\int_0^1(u+(\rho^\alpha)_\xi/\alpha)^2\mathrm{d}\xi+\int_R(\frac{1}{\gamma-1}(\rho^{\gamma-1}-\bar{\rho}^{\gamma-1})+\bar{\rho}^\gamma(\rho^{-1}-\bar{\rho}^{-1}))\mathrm{d}\xi+$$

$$\gamma\int_0^\tau\int_0^1\rho^{\gamma+\alpha-2}\rho_\xi^2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s-\int_0^\tau[\rho^\gamma]u\,|_{\xi=0}\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_0^1(u_0+(\rho_0^\alpha)_\xi/\alpha)^2\mathrm{d}\xi+$$

$$\int_R(\frac{1}{\gamma-1}(\rho_0^{\gamma-1}-\bar{\rho}^{\gamma-1})+\bar{\rho}^\gamma(\rho_0^{-1}-\bar{\rho}^{-1}))\mathrm{d}\xi,$$

同时可以得到下式

$$-\int_0^\tau[\rho^\gamma]u\,|_{\xi=0}\mathrm{d}s=-\int_0^\tau[\rho^\gamma]y'(s)\mathrm{d}s=-[\rho^\gamma]y(\tau)+\gamma\int_0^\tau\rho^{\gamma-1}(0+0,s)\rho_s(0+0,s)\;y(s)\mathrm{d}s-$$

$$\gamma\int_0^\tau\rho^{\gamma-1}(0-0,s)\rho_s(0-0,s)y(s)\mathrm{d}s=-[\rho^\gamma]y(\tau)-\gamma\int_0^\tau[\rho^{\gamma+1}]u_\xi(0,s)y(s)\mathrm{d}s,$$

再利用

$$u_\xi(0,\tau)=\frac{[\rho^\gamma]}{[\rho^{1+\alpha}]}>0,$$

以及由(21) 式得到的结论

$$y(\tau)\geq 0,$$

可以证明(25) 式.

引理 4　假设定理 1 的条件成立，则柯西问题(19) 的弱解满足

$$0<c\leq\rho(\xi,\tau)\leq C,(\xi,\tau)\in R/\{0\}\times[0,+\infty),\tag{29}$$

(29) 式中的 c 和 C 都是不依赖于时间的正常数.

证明　定义如下函数

$$\varphi(\rho):=\frac{1}{\gamma-1}(\rho^{\gamma-1}-\bar{\rho}^{\gamma-1})+\bar{\rho}^\gamma(\rho^{-1}-\bar{\rho}^{-1}),\psi(\rho):=\int_{\bar{\rho}}^\rho\varphi(\eta)^{\frac{1}{2}}\eta^{\alpha-1}d\eta.$$

容易验证 $\varphi(\rho)\geq 0,\psi'(\rho)\geq 0$，并且当 $\rho\to+\infty$ 时，可以得到

$$\lim_{\rho\to+\infty}\psi(\rho)\to(\gamma-1)^{-\frac{1}{2}}\lim_{\rho\to+\infty}\int_{\bar{\rho}}^\rho\eta^{\frac{\gamma+2\alpha-3}{2}}\mathrm{d}\eta=$$

$$\lim_{\rho\to+\infty}\frac{2}{(\gamma+2\alpha-1)\sqrt{\gamma-1}}(\rho^{\frac{\gamma+2\alpha-1}{2}}-\bar{\rho}^{\frac{\gamma+2\alpha-1}{2}})\to+\infty,\tag{30}$$

而当 $\rho\to 0$ 时，有下式成立

$$\lim_{\rho\to 0}\psi(\rho)\to\lim_{\rho\to 0}\int_{\bar{\rho}}^{\rho}\bar{\rho}^{-\frac{\gamma}{2}}\eta^{\alpha-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\eta=\begin{cases}\lim_{\rho\to 0}\frac{2}{2\alpha-1}\bar{\rho}^{-\frac{\gamma}{2}}(\rho^{\alpha-\frac{1}{2}}-\bar{\rho}^{\alpha-\frac{1}{2}}),\alpha\neq\frac{1}{2},\\ \lim_{\rho\to 0}\bar{\rho}^{-\frac{\gamma}{2}}(\ln\rho-\ln\bar{\rho}),\alpha=\frac{1}{2},\end{cases}\to$$

$$\begin{cases}-\infty,0<\alpha\leq\frac{1}{2},\\ -\frac{2}{2\alpha-1}\bar{\rho}^{-\frac{\gamma+2\alpha-1}{2}},\alpha>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

另外,由(24)式和(25)式可得

$$|\psi(\rho)|\leq\left|\int_{-\infty}^{\xi}\partial_{\xi}\psi(\rho)\mathrm{d}\xi\right|+\left|\int_{\xi}^{+\infty}\partial_{\xi}\psi(\rho)\mathrm{d}\xi\right|\leq\left|\int_{-\infty}^{\xi}\varphi(\rho)^{\frac{1}{2}}\rho^{\alpha-1}\rho_{\xi}\mathrm{d}\xi\right|+\left|\int_{\xi}^{+\infty}\varphi(\rho)^{\frac{1}{2}}\rho^{\alpha-1}\rho_{\xi}\mathrm{d}\xi\right|\leq$$

$$\frac{2}{\upsilon}\left|\int_{R}\varphi(\rho)\mathrm{d}\xi\int_{R}\left(\frac{1}{\alpha}(\rho^{\alpha})_{\xi}\right)^{2}\mathrm{d}\xi\right|^{\frac{1}{2}}\leq\frac{4}{\upsilon}E_{0}^{\frac{1}{2}}(E_{0}+E_{1})^{\frac{1}{2}},$$

其中 υ 是一个不依赖于时间的正常数.

综上,当 $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$ 时,或者当 $\alpha>\frac{1}{2}$,下式成立时

$$E_{0}^{\frac{1}{2}}(E_{0}+E_{1})^{\frac{1}{2}}\leq\frac{\upsilon}{2(2\alpha-1)}\underline{\rho}^{-\frac{\gamma+2\alpha-1}{2}},$$

可以找到两个不依赖于时间的正常数 c 和 C,使得(30)式成立.

引理 5 假设定理 1 的条件成立,则柯西问题(19)的弱解满足

$$\int_{R}u_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi+\int_{R}u_{\tau}^{2}\mathrm{d}\xi+\int_{R}u_{\xi}^{2}\xi\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+\int^{\tau}0\int_{R}u_{s}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+\int_{0}^{\tau}\int_{R}\rho^{1+\alpha}u_{\xi s}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\leq C,\tau\in[0,+\infty),\tag{31}$$

其中 C 是一个不依赖于时间的正常数.

证明 在方程(19)中第 2 式两端乘以 $\rho^{-(1+\alpha)}u_{\tau}$,并关于 ξ 积分可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_{R}\left(\frac{1}{2}u_{\xi}^{2}-\rho^{\gamma-(1+\alpha)}u_{\xi}\right)\mathrm{d}\xi+\int_{R}\rho^{-(1+\alpha)}u_{\tau}^{2}\mathrm{d}\xi=(\gamma-(1+\alpha))\int_{R}\rho^{\gamma-\alpha}u_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi-(1+\alpha)\int_{R}\rho^{\gamma-(2+\alpha)}\rho_{\xi}u_{\tau}\mathrm{d}\xi+$$

$$(1+\alpha)\int_{R}\rho^{-1}\rho_{\xi}u_{\tau}u_{\xi}\mathrm{d}\xi+[\rho^{-(1+\alpha)}]((\rho^{\gamma}-\rho^{1+\alpha}u_{\xi})u_{\tau})\mid_{\xi=\xi_{0}^{+}},$$

再对上式关于 τ 积分,并经过计算可得

$$\int_{R}u_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{\tau}\int_{R}u_{s}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\leq C+C\int_{R}(\rho^{\gamma-(1+\alpha)}\bar{\rho}^{\gamma-(1+\alpha)})^{2}\mathrm{d}\xi+C\int_{0}^{\tau}\int_{R}u_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+C\int_{0}^{\tau}\int_{R}\rho_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+$$

$$C\int_{0}^{\tau}\int_{R}\rho_{\xi}^{2}u_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+\int_{0}^{\tau}\left|[\rho^{-(1+\alpha)}]((\rho^{\gamma}-\rho^{1+\alpha}u_{\xi})u_{s})\mid_{\xi=0+}\right|\mathrm{d}s\leq C+$$

$$C\int_{0}^{\tau}\int_{R}\rho_{\xi}^{2}u_{\xi}^{2\,2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+\int_{0}^{\tau}[\rho^{-(1+\alpha)}]((\rho^{\gamma}-\rho^{1}+\alpha u_{\xi})u_{s})\mid_{\xi}=0^{+}\mid\mathrm{d}s.$$

再由(24)式、(25)式和(29)式可得

$$C\int_{0}^{\tau}\int_{R}\rho_{\xi}^{2}u_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\leq\frac{C}{3}\int_{0}^{\tau}\int_{R}\rho_{\xi}^{2}u_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+\frac{1}{6}\int_{0}^{\tau}\int_{R}u_{s}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+C\int_{0}^{\tau}\int_{R}\rho_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+C\int_{0}^{\tau}\int_{R}u_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s,$$

以及

$$\int_{0}^{\tau}\left|[\rho^{-(1+\alpha)}]((\rho^{\gamma}-\rho^{1+\alpha}u_{\xi})u_{s})\mid_{\xi=0^{+}}\right|\mathrm{d}s\leq C\int_{0}^{\tau}\left|[\rho_{0}^{\alpha}]\right|\mathrm{e}^{-Cs}\|\rho^{\gamma}-\rho^{1+\alpha}u_{\xi}\|_{L^{\infty}}\|u_{s}\|_{L^{\infty}}\mathrm{d}s\leq$$

$$C\int_{0}^{\tau}\mathrm{e}^{-Cs}\|\rho^{\gamma}\|_{L^{\infty}}^{2}\mathrm{d}s+C\int_{0}^{\tau}\int_{R}\rho_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+C\int_{0}^{\tau}\int_{R}u_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+\frac{1}{4}\int_{0}^{\tau}\int u_{s}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+C\epsilon\int_{0}^{\tau}\int_{R}u_{\xi s}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s,$$

其中 C 是一个不依赖于时间的正常数,ϵ 是一个待定的充分小的正常数. 综上所述,可以得到

$$\int_{R}u_{\xi}^{2\,2}\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{\tau}\int_{R}u_{s}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\leq C+C\epsilon\int_{0}^{\tau}\int_{R}u_{\xi s}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s.$$

再对方程(19)中第 2 式关于 τ 求导,然后在所得结果两端乘以 u_{τ},并关于 ξ 积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_{R}u_{\tau}^{2}\mathrm{d}\xi+\int_{R}\rho^{1+\alpha}u_{\xi\tau}^{2}\mathrm{d}\xi=\int_{R}(\rho^{\gamma})_{\tau}u_{\xi\tau}\mathrm{d}\xi+\int_{R}(\rho^{1+\alpha})_{\tau}u_{\xi}u_{\xi\tau}\mathrm{d}\xi,\tag{32}$$

再对(32)式关于 τ 积分,可以得到

$$\sup_{\tau\in[0,T]}\int_{R}u_{\tau}^{2}\mathrm{d}\xi+\int_{0}^{\tau}\int_{R}\rho^{1+\alpha}u_{\xi s}^{2}\mathrm{d}\xi\leq C+C\int_{0}^{\tau}\int_{R}u_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+C\int_{0}^{\tau}\int_{R}u_{\xi}^{4}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s\leq C+C\sup_{\tau\in[0,T]}\|u_{\xi}^{2}\|_{L^{\infty}}\leq$$

$$-C+C\sup_{\tau\in[0,T]}\left(\int_{R}u_{\xi}^{2}\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{R}u_{\xi\xi}^{2}\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}}\leq C+C\epsilon\int_{0}^{\tau}\int_{R}\rho^{1+\alpha}u_{\xi s}^{2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\sup_{\tau\in[0,T]}\int_{R}u_{\tau}^{2}\mathrm{d}\xi,\tag{33}$$

(33)式中的 C 是一个不依赖于时间的正常数,并且令 ϵ 是一个充分小的正常数,再利用(33)式即可证明(31)式.

引理 6 假设定理 1 的条件成立,则柯西问题(19)的弱解满足

$$|[\rho_0^\alpha(\xi_0)]|\,\mathrm{e}^{-C_0\tau}\leq|[\rho^\alpha(\xi_0,\tau)]|\leq|[\rho_0^\alpha(\xi_0)]|\,\mathrm{e}^{-C_1\tau},\tau\in[0,+\infty),\tag{34}$$

(34) 式中的 C_0 和 C_1 都是不依赖于时间的正常数.

证明 由(23) 式和(30) 式可以证明(34) 式.

引理 7 假设定理 1 的条件成立，当时间趋于无穷时，柯西问题(21) 的弱解满足

$$\|(\rho-\bar{\rho},u)(\cdot,\tau)\|_{L^\infty(R/\{0\})}\to 0,\tau\to+\infty.\tag{35}$$

证明 由引理 1 至引理 5 可以得到

$$\int_0^\infty\int_R((\rho-\bar{\rho})_\xi^2+u_\xi^2)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\leq C,\tag{36}$$

以及

$$\int_0^\infty\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int_R((\rho-\bar{\rho})_\xi^2+u_\xi^2)\mathrm{d}\xi\right|\mathrm{d}\tau=\int_0^\infty\left|\int_R(-4\rho\rho_y^2u_y-2\rho^2\rho_yu_{yy})\mathrm{d}y+2\int_Ru_yu_{y}\tau\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}\tau\leq$$

$$C\int_0^\infty\int_R\rho_y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau+C\int_0^\infty\int_R(u_y^2+u_{yy}^2+u_{y\tau}^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\leq C,\tag{37}$$

由(36)、(37) 式可得

$$\|(\rho-\bar{\rho},u)_\xi\|_{L^2(R/\{0\})}^2\in W^1,1(R^+).\tag{38}$$

再由 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式

$$\|(\rho-\bar{\rho},u)\|_{L^\infty(R/\{0\})}\leq\|(\rho-\bar{\rho},u)\|_{L^2(R/\{0\})}^{\frac{1}{2}}\|(\rho-\bar{\rho},u)_\xi\|_{L^2(R/\{0\})}^{\frac{1}{2}},$$

以及(24) 式，(29) 式和(38) 式可得(35) 式.

3 定理证明

证明 采用对空间变量进行差分离散的方法(参考文献 [3,5,7])，构造一个柯西问题(19)的整体逼近解序列，并且该逼近解序列满足引理 1 至引理 7. 因此，应用紧性分析，可以证明该逼近解序列有收敛子列，其极限就是柯西问题(19)的整体弱解，并且存在一条由(24)式定义的间断线 $y(t)$，使得性质(25)－(27)成立. 而跳跃间断和弱解的大时间行为可以由引理 6 和引理 7 直接得到. 至此定理 1 证毕.

参 考 文 献

[1] Hoff D. Constructin of solutions for compressible, isentropic Navier-Stokesequations in one space dimension with nonsmooth initial data [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect A, 1986, 103: 301-315.

[2] Hoff D. Global existence for 1D, compressible, isentropic Navier-Stokesequations with large initial data [J]. Trans Amer Math Soc, 1987, 303(1): 169-181.

[3] Hoff D. Global well-posedness of the Cauchy problem for nonisentropic gasdynamics with discontinuous initial data[J]. J Differential Equations, 1992, 95(1): 33-73.

[4] Hoff D. Spherically symmetric solutions ofthe Navier-Stokes equations for compressible, isothermal flow withlarge, discontinuous initial data[J]. Indiana Univ Math J, 1992, 41(4): 1225-1302.

[5] Hoff D. Global solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensonalcompressible flow with discontinuous initial data[J]. J Differential Equations, 1995, 120(1): 215-254.

[6] Hoff D. Strong convergence to global solutions for multidimensionalflows of compressible, viscous fluids with polytropic equations ofstate and discontinuous initial data[J]. Arch Rational Mech Anal, 1995, 132(1): 1-14.

[7] Chen G Q, Hoff D, Trivisa K. Global solutions of the compressibleNavier-Stokes equations with large discontinuous initial data[J]. Comm PDEs, 2000, 25(11/12): 2233-2257.

[8] Hoff D. Discontinuous solutions of the Navier-Stokes equations for multidimensional flows of heat-conducting fluids[J]. Arch Rational Mech Anal, 1997, 139(4): 303-354.

[9] Hoff D. Dynamics of singularity surfaces for compressible, viscous flows in two space dimensions[J]. Commu Pure Appl Math, 2002, 55(11): 1365-1407.

[10] Fang D Y, Zhang T. Global solutions of the Navier-Stokes equationsfor compressible flow with density-dependent viscosity anddiscontinuous initial data[J]. J Differential Equations, 2006, 222(1): 63-94.

[11] Qin Y M, Huang L, Deng S X, et al. Interior regularity of the compressible Navier-Stokes equations with degenerate viscosity coeffi-

cient and vacuum[J]. Discret Cont Dyn Syst Ser S, 2009, 2: 163-192.

[12] Lian R X, Guo Z H, Li H L. Dynamical behaviors of vacuum states for 1Dcompressible Navier-Stokes equations[J]. J DifferentialEquations, 2010, 248(8): 1926-1954.

[13] Lian R X, Liu J, Li H L, et al. Cauchy problem for the one-dimensionalcompressible Navier-Stokes equations[J]. Acta Mathematica Scientia, 2012, 32B(1): 315-324.

[14] Hoff D, Smoller J. Solutions in the large for certain nonlinear parabolic systems[J]. Ann Inst H Poincaré Anal Non Liéaire, 1985, 3(2): 213-235.

Cauchy Problem for One-dimensional Barotropic Compressible Navier-Stokes Equations with Density-dependent Viscosity and Discontinuous Initial Data

WANG Junli[1,2], BI Jiacheng[3], LIAN Ruixiu[4], MA Yue[4]

(1. Guanghua School of Management Peking University, Beijing 100871, China; 2. School of Mathematical Sciences Capital Normal University, Beijing 100048, China; 3. School of Computer Science and Technology Xidian University, Xi'an 710071, China; 4. School of Mathematics and Information Science North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou 450045, China)

Abstract: This paper is concerned with the Cauchy problem for one-dimensional barotropic compressible Navier-Stokes equations with density-dependent viscosity coefficient and discontinuous initial data. For the Cauchy problem, we prove that there exists a unique global piecewise regular solution for piecewise regular initial density with arbitrarily large jump discontinuity. Moreover, we show that the jump of density decays exponentially in time and the piecewise regular solution also decays as time tends to infinity.

Keywords: Navier-Stokes equations; Cauchy problem; discontinuous initial data; weak solution